MATEMATICA BÁSICA

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Eduardo Espinoza Ramos

MATEMATICA BASICA

- LOGICA
- CONJUNTOS
- N° REALES
- RELACIONES Y FUNCIONES
- INDUCCION MATEMATICA
- N° COMPLEJOS
- TEORIA DE POLINOMIOS
- VECTORES EN R^2

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA - PERÚ

IMPRESO EN EL PERÚ

05 - 05 - 2005

2° EDICIÓN

RUC	N° 10070440607
Ley del Libro	N° 28086
Ley de Derechos del Autor	N° 13714
Registro comercial	N° 10716
Escritura Publica	N° 4484

PROLOGO

La presente obra titulada "Matemática Básica" en su segunda edición contiene esencialmente los temas que generalmente se desarrolla en los primeros cursos en las carreras de ciencias, Ingeniería, Economía, Administración, Medicina, etc., así como también en los Institutos Superiores.

En la actualidad el contenido científico de un libro debe complementarse con el aspecto didáctico que es tan importante como el contenido científico, por tal motivo en el presente trabajo se expone en forma Teórica y Práctica en donde en cada capítulo comienza con enunciados claros de las definiciones y Teoremas juntos con sus respectivos ejemplos seguidos de una colección de problemas resueltos y problemas propuestos.

En las definiciones importantes así como los Teoremas y Propiedades son explicados en forma clara y amena ilustrado con gráficos y ejemplos en forma graduada.

La presente obra consta de ocho capítulos: Lógica, Conjunto, Sistema de los Números Reales, Relaciones y Funciones, inducción Matemática, Números Complejos, la Teoría de Polinomios y Vectores en R^2 que es el capítulo que se ha agregado a la edición anterior así mismo se ha incluido la divisibilidad de los números enteros, se ha incluido mas problemas y aplicaciones a la economía.

El presente texto es básicamente para estudiantes recién ingresantes a las Universidades en las especialidades de Ciencias Matemáticas, Físicas, Ingeniería y Economía y a toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a mis colegas de las diversas universidades en donde presto mis servicios, quienes con su apoyo moral y sugerencias han hecho posible la realización de este libro en su 2da edición.

Agradezco por anticipado la acogida que brinden a la presente obra.

Eduardo Espinoza Ramos

PROLOGO

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos:

RONALD, JORGE Y DIANA

que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser guías de su prójimo

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos:

RONALD, JORGE Y DIANA

que Dios ilumine sus caminos para que puedan

ser guías de su prójimo

INDICE

CAPITULO I

LÓGICA

CAPITULO II

TEORÍA DE CONJUNTOS

CAPITULO III

SISTEMA DE NÚMEROS REALES

CAPITULO IV

RELACIONES Y FUNCIONES



CAPITULO V

INDUCCIÓN MATEMATICA

CAPITULO VI

NÚMEROS COMPLEJOS

CAPITULO VII

TEORÍA DE ECUACIONES

CAPITULO VIII

VECTORES EN R^2

CAPITULO I

LÓGICA

1.1. INTRODUCCIÓN.-

Lógica es el estudio de los procesos válidos del razonamiento humano. En la actualidad, el estudio serio de cualquier tema tanto en el campo de las Humanidades como el de las ciencias y la técnica requieren conocer los fundamentos y métodos del razonamiento lógico preciso que permite al estudiante o profesional extraer y depurar sus conclusiones evitando el riesgo de modificar en forma equivocada la información que posee. Esto es aun más en esta era de la computación, herramienta que es empleada en todos los campos del desarrollo de una sociedad y con la velocidad a la cuál se procesan los datos cualquier error de lógica puede originar problemas técnicos, sociales y económicos.

Siendo muy importante, en la matemática moderna el análisis del lenguaje con un criterio lógico; la Lógica tiene como fin de conducirnos a un hábil manejo del lenguaje matemático y el empleo de métodos eficaces de razonamiento.

Existen dos tipos importantes del razonamiento: El inductivo y el Deductivo.

El razonamiento inductivo es el razonamiento por el cuál una persona en base a sus experiencias específicas, decide aceptar como válida un principio general.

El razonamiento deductivo es, en cambio, el medio según el cuál dicha persona utiliza el principio general aceptado previamente para decidir sobre la validez de una idea, que a su vez habrá de determinar el curso de su acción.

Dado que las proposiciones son preceptos válidos de razonamiento deductivo, en el desarrollo de nuestro estudio veremos lo esencial de la lógica proposicional, a través del uso y manejo de una simbología adecuada.

1.2. ELEMENTOS DE LÓGICA SIMBÓLICA.-

a) **ENUNCIADO.-** Se denomina enunciado a toda frase u oración.

Ejemplo.- (1) 11 es un número primo. (2) París está en Italia.

(3) ¿Qué hora es? (4) ¡Viva el Perú!

(5) $5 > 9$ (6) $6 + 2 = 8$

(7) $x^2 < 9$ (8) $x^2 + y^2 \leq 4$

Los enunciados que matemáticamente tienen significado son aquellos que pueden ser considerados como verdaderos o falsos (proposiciones); algunos enunciados no es posible afirmar si es verdadero o falso, como por ejemplo, las interrogaciones, las exclamaciones o las preguntas.

b) **ENUNCIADOS ABIERTOS.-** Son expresiones que contienen variables y no tienen la propiedad de ser verdadero o falso.

Ejemplo.-

(1) x < 7, es un enunciado abierto, porque no podemos afirmar si es verdadero o falso, solamente cuando a la variable x se le dá un valor numérico podemos decir si es verdadero o falso.

Así por ejemplo: para $x = 3$, $3 < 7$ es verdadero

para $x = 9$, $9 < 7$ es falso

(2) $x^2 + y^2 = 16$, también es un enunciado abierto.

c) **VARIABLE.-** Es una cantidad susceptible de variar en un determinado campo o recorrido, a las variables representaremos por las letras minúsculas x,

y, z, t, u, v, a estas variables se les dá el nombre de variables indeterminados.

Ejemplo.-

(1) $y = \sqrt{x-5}$ es un número real, si x es un número real que sea mayor o igual a 5. El campo o recorrido de x es $x \geq 5$.

(2) En la ecuación $x^2 + y^2 = 16$

- El campo o recorrido de x es $-4 \leq x \leq 4$
- El campo o recorrido de y es $-4 \leq y \leq 4$.

1.3. PROPOSICIONES LOGICAS.-

Llamaremos proposiciones lógicas a todo enunciado abierto que pueden ser calificado como verdaderas o bien como falsas, sin ambigüedades.

NOTACIÓN.- Las proposiciones lógicas serán denotadas generalmente con letras minúsculas p, q, r, t, ..., etc. A la veracidad o falsedad de una proposición se denomina valor de verdad.

Ejemplos de Proposiciones Lógicas.-

(1) p: 15 – 4 = 11, verdadero (V)

(2) q: Lima es la capital del Perú, verdadero (V)

(3) r: 107 + 301 = 48, falsa (F)

(4) t: 7 es un número par, falsa (F).

1.4. DEFINICIÓN.-

Se llama valores de verdad de una proposición a sus dos valores posibles; verdadero o falso, estos posibles valores se puede esquematizar en una tabla de verdad en la forma.



p
V
F

1.5. CONECTIVOS LÓGICOS.-

Son expresiones que sirven para unir dos o más proposiciones, entre los más importantes conectivos lógicos tenemos:

La conjunción, disyunción, implicación, bicondicional, negación, contradicción, esto mostraremos en el siguiente cuadro.

Nombre	Expresión	Símbolo Lógico
Conjunción	y	$\wedge$
Disyunción	ó	$\vee$
Implicación	Sí, ..., entonces, ...	$\longrightarrow$
Bicondicional, equivalencia doble implicación	... Sí y sólo sí, ...	$\longleftrightarrow$ $\equiv$
Negación	No	~
Contradicción	... no equivalente, ...	$\not\equiv$

1.6. CLASES DE PROPOSICIONES LÓGICAS.-

a) PROPOSICIONES SIMPLES Ó ATÓMICAS.-

En una proposición que no contiene ningún conectivo lógico.

Ejemplo.- ① 6 es par. ② $2 + 5 = 7$

b) PROPOSICIONES COMPUESTOS O MOLECULARES.-

Es una proposición que contiene al menos un conectivo lógico.

Ejemplo.- ① 5 es primo y 2 es par.

② Si 5 es par entonces 2 es impar.

③ Si n es par entonces n es divisible por 2.

1.7. PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICOS.-

a) LA NEGACIÓN.- Dado una proposición P, llamaremos la negación de P, a otra proposición que denotaremos por ~P, y que se le asigna el valor opuesto a p, y su tabla de verdad es:

p	~p
V	F
F	V

El principio lógico de la negación es:

Si una proposición es verdadera V, su negación es falsa F y recíprocamente, si dicha proposición es falsa F, su negación es verdadera V.

La proposición ~P es leída así "no P", "no es cierto que P"

Ejemplo.- (1) 2 es primo V

Su negación es: 2 no es primo F

(2) 5 es par F

Su negación es: no es cierto que 5 es par V

(3) Dada la proposición P: $5 \times 7 = 35$

Su negación es: ~P: no es cierto que $5 \times 7 = 35$

b) LA DISYUNCIÓN.- La disyunción de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta que resulta de unir p y q por el conectivo lógico "o" en el sentido inclusivo y/o y que el principio lógico es "La proposición $p \vee q$ es falsa únicamente en el caso en que p y q son ambas falsas, en cualquier otro caso es verdadera". La tabla de verdad para la disyunción es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo.- Hallar el valor de $p \vee q$ donde **p**: 7 es mayor que 9; **q**: 4 es menor que 5

Solución

p	q	$p \vee q$
F	V	V

c) LA CONJUNCIÓN.- La conjunción de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta que resulta de unir p y q mediante el conectivo lógico "y" que se simboliza $p \wedge q$, donde el principio lógico es "La conjunción $p \wedge q$ es verdadero V, sólo cuando p es verdadero y q es verdadero V, en todos los demás casos es falso". Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo.- Sí p: 4 < 7 y q: 6 es número par. Calcular el valor de verdad de $p \wedge q$

Solución

p	q	$p \wedge q$
V	V	V

d) LA CONDICIONAL (IMPLICATIVA).- La implicación o condicional de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta mediante el conectivo lógico "si, ..., entonces, ..." y se simboliza $p \longrightarrow q$, donde el principio lógico es "La proposición implicativa es falso únicamente en el caso que la proposición p es verdadera y la proposición q es falsa, siendo verdadera en todos los demás casos. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición p es llamado antecedente y la proposición q es llamado consecuente.

$$p \longrightarrow q$$

Antecedente — Consecuente
Premisa — Conclusión.
Hipótesis — Tesis.

OBSERVACIÓN.-

1. Una implicación es verdadera si el antecedente es falso, cualquiera que sea el consecuente.
2. Una implicación es verdadera si el consecuente es verdadero, cualquiera que sea el antecedente.

Ejemplo.- Sea p : Cristóbal Colón descubrió América. ; q : 6 + 3 = 8

Hallar el valor de verdad de p ⟶ q

Solución

Para calcular el valor de verdad de la proposición p ⟶ q, primero calcularemos el valor de verdad de las proposiciones dadas.

p : Cristóbal Colón descubrió América es verdadera V

q : 6 + 3 = 8, es falsa F

p	q	p → q
V	F	F

e) LA BICONDICIONAL (Equivalente ó Doble Implicación).-

La doble implicación o bicondicional de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta mediante el conectivo lógico "si y sólo si" y se simboliza p ⟵⟶ q son verdaderos V o son falsos F, en otros casos es falso F. Su tabla de verdad es:

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

f) LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA.- La disyunción exclusiva de dos proposiciones p y q es la proposición compuesto mediante conectivo lógico "o" y se simboliza p Δ q, donde ambas proposiciones p y q tengan valores de verdad opuestos y es falsa si ambas tiene idénticos valores. Su tabla de verdad es:

p	q	p Δ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo.- Sea **p** : k es par ; **q** : k es impar. Hallar el valor de verdad de $p \Delta q$.

<u>Solución</u>

Para calcular el valor de verdad de $p \Delta q$, primero veamos lo siguiente:

(1) Si k es par, si puede ser impar (Si p es V ; q es F)

(2) Si k es impar, no puede ser par (Si p es F ; q es V)

De las notaciones (1) y (2) vemos que $p \Delta q$ es verdadera.

En efecto:

p	q	$p \Delta q$
V	F	V
F	V	V

1.8. PROPOSICIONES COMPUESTAS.-

Mediante los conectivos lógicos se pueden combinar cualquier número finito de proposiciones cuyos valores de verdad pueden ser conocidos, construyendo su tabla de verdad, en dicha tabla se puede indicar los valores resultantes de estas proposiciones compuestas, para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones compuestas.

Ejemplo.- La tabla de verdad de la proposición compuesta de:

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow (p \longrightarrow r)$$

<u>Solución</u>

p	q	r	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow r$	$p \longrightarrow r$	$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow (p \longrightarrow r)$		
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

1.9. JERARQUÍA DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS.-

Si se tiene una proposición compuesta con varios conectivos lógicos, para realizar las operaciones primero se debe colocar los paréntesis adecuadamente empezando con las proposiciones que se encuentran dentro de los paréntesis anteriores, luego siguen todas las negaciones y se avanza de izquierda a derecha (los corchetes son considerados como paréntesis).

Ejemplo.- Hallar la tabla de valor de verdad de la proposición:

$$[p \vee (q \longrightarrow \sim r)] \wedge [(\sim p \vee r) \longleftrightarrow \sim q]$$

p	q	r	[p	∨	(q ⟶ ~r)]	∧	[(~p ∨ r)	⟷	~ q]
V	V	V	V	V	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V

1.10. TAUTOLOGÍAS, CONTRADICCIONES Y CONTINGENCIAS.-

a) **TAUTOLOGÍA.-** Son proposiciones compuestos que siempre son verdaderos cualquiera que sea el valor de las proposiciones componentes.

Ejemplos de Tautología.-

① $p \vee \sim p$ (principio del tercio excluido)

② $[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q$ ③ $\sim (p \wedge \sim p)$

En efecto tenemos:



p	p ∨ ~p		
V	V	V	F
F	F	V	V

Es Tautología

②

p	q	[(p ⟶ q)	∧	p]	⟶	q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F

Es una Tautología

③

p	~ p	~ (p ∧ ~p)	
V	F	V	F
F	V	V	F

Es una tautología

b) CONTRADICCIONES.- Son proposiciones compuestas que siempre son falsas, cualquiera que sea el valor de las proposiciones compuestas.

Ejemplo de contradicciones.-

① p ∧ ~p (principio de contradicción)

② ~(p ∨ ~p) ③ (p ⟶ q) ∧ (p ∧ ~q)

En efecto tenemos:

①

p	~p	p ∧ ~p
V	F	F
F	V	F

Es una contradicción

(2)

p	~p	~ (p ∨ ~p)
V	F	F V
F	V	F V

Es una contradicción

(3)

p	q	(p ⟶ q) ∧ (p ∧ ~q)
V	V	V F F
V	F	F F V
F	V	V F F
F	F	V F F

Es una contradicción.

c) **CONTINGENCIA.-** Son proposiciones compuestas que no son ni tautología ni contradicciones, es decir, son proposiciones que en algunos casos es F, y en otros es V.

Ejemplos de Contingencia.-

(1) p ⟷ q (2) p ∧ q

(3) (p ⟶ q) ⟶ p

En efecto tenemos:

(1)

p	q	p ⟷ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es una contingencia

(2)

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Es una contingencia



p	q	(p ⟶ q) ⟶ p		
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Es una contingencia

1.11. IMPLICACIÓN LÓGICA Y EQUIVALENCIA LÓGICA.-

i) A toda proposición condicional $p \to q$ que sea tautología le llamaremos implicación lógica (o simplemente implicación) en éste caso a la condicional denotaremos por $p \Rightarrow q$

Ejemplo de Implicación lógica se tiene: $[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

puesto que:

p	q	[((~p) ∨ q)	∧	~q]	⇒	~p
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Es una tautología. Por lo tanto es una implicación lógica.

ii) A toda bicondicional $p \leftrightarrow q$ que sea tautología se le llama equivalencia lógica (o simplemente equivalencia) y en éste caso a la bicondicional denotaremos por $p \Leftrightarrow q$.

Ejemplo de equivalencia lógica se tiene: $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

puesto que:

p	q	[p	∧	(p ∨ q)]	⇔	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F

Es una tautología. Por lo tanto es una equivalencia lógica.

1.12. PROPOSICIONES LOGICAMENTE EQUIVALENTES.-

Cuando sus tablas de verdad de dos proposiciones p y q son idénticos se denominan equivalentes (o lógicamente equivalentes) en este caso se simboliza en la forma $p \equiv q$.

Ejemplo.- Las proposiciones $(p \longrightarrow q)$ y $(\sim q \longrightarrow \sim p)$ son lógicamente equivalentes, puesto que sus tablas de verdad son idénticos. En efecto:

p	q	$p \longrightarrow q$	$\sim q \longrightarrow \sim p$
V	V	V	F V F
V	F	F	V F F
F	V	V	F V V
F	F	V	V V V

Idénticos

$\therefore \quad p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$

OBSERVACIÓN.-

(1) La equivalencia de este ejemplo es muy importante, porque viene a ser la base del llamado método de demostración por Reducción al absurdo, en una forma indirecta de un proceso de demostración que se va utilizar en el desarrollo del curso.

(2) Un par de proposiciones equivalentes $p \equiv q$ resulta siempre una equivalencia lógica $p \Leftrightarrow q$ y viceversa, por esta razón cuando se tiene una equivalencia lógica entre p y q, también se dice $p \equiv q$.

1.13. PRINCIPALES LEYES LÓGICAS O TAUTOLÓGICAS.-

Las llamadas leyes lógicas o principios lógicos viene a ser formas proposicionales tautológicas de carácter general y que a partir de estas leyes lógicas se puede generar otras tautológicas y también cualquier tautología se puede reducir a una de las leyes lógicas, entre las principales leyes lógicas mencionaremos.

1° LOS TRES PRINCIPIOS LÓGICOS CLÁSICOS.-

① Ley de identidad.

$\begin{cases} p \longrightarrow p \\ p \longleftrightarrow p \end{cases}$ "una proposición sólo son idénticos así mismo"

② Ley no contradicción.

$\sim(p \wedge \sim p)$ "una proposición no puede ser verdadero y falso a la vez"

③ Ley del Tercio excluído.

$p \vee \sim p$ "una proposición es verdadero o es falso no hay una tercera posibilidad"

2° EUIVALENCIAS NOTABLES.-

① Ley de la doble negación.

$\sim(\sim p) \equiv p$ "la negación de la negación es una afirmación"

② Ley de la Idempotencia.

a) $p \wedge p \equiv p$ **b)** $p \vee p \equiv p$

③ Leyes conmutativas.

a) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ **b)** $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

c) $p \longleftrightarrow q \equiv q \longleftrightarrow p$

④ Leyes Asociativa.

a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ **b)** $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

c) $p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r) \equiv (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r$

⑤ Leyes Distributivas.

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **b)** $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

c) $p \longrightarrow (q \wedge r) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$

d) $p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r)$

(6) Leyes De Morgan.

a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(7) Leyes del Condicional.

a) $p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$ b) $\sim(p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

(8) Las Leyes del Bicondicional.-

a) $(p \longleftrightarrow q) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

b) $(p \longleftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$

(9) Leyes De La Absorción.

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ b $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ d $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

(10) Leyes De Transposición.

a) $(p \longrightarrow q) \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$ b) $(p \longleftrightarrow q) \equiv \sim q \longleftrightarrow \sim p$

(11) Leyes De Exportación.

a) $(p \wedge q) \longrightarrow r \equiv p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$

b) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow r \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \longrightarrow (p_n \longrightarrow r)$

(12) Elementos Neutros para la Conjunción y Disyunción.

a) $p \wedge V \equiv p$, V neutro de la conjunción.

b) $p \vee F \equiv p$, F neutro de la Disyunción.

(13) También:

a) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p$ b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p$

OBSERVACIÓN.- Estas Leyes son muy útiles para simplificar los problemas, puesto que es válido reemplazar una proposición por su equivalente sin alterar el resultado.

Ejemplo.- Simplificar las proposiciones siguientes aplicando las leyes lógicas.

① $[(p \vee \sim q) \wedge q] \longrightarrow p$

Solución

$[(p \vee \sim q) \wedge q] \longrightarrow p \equiv \sim[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee p$

$\equiv [\sim(p \vee \sim q) \vee \sim q] \vee p$

$\equiv [\sim(p \vee \sim q)] \vee (p \vee \sim q)$

$\equiv p \vee \sim q$

② $\sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee q$

Solución

$\sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee q \equiv [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim q)] \vee q$ por (7b)

$\equiv \sim[(p \wedge q) \vee (\sim q)] \vee q$ por (6a)

$\equiv [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim q)] \vee q$ por (6b)

$\equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \vee q \equiv q \vee ((\sim p \vee \sim q) \wedge q)$ por (3b)

$\equiv q \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)] \equiv q$ por (9b)

③ Comprobar que las tres proposiciones siguientes son equivalentes:

a) $\sim [(q \vee \sim p) \vee (q \wedge (r \vee \sim p))]$

b) $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (\sim r \vee p)]$

c) $\sim(\sim q \longrightarrow \sim p) \wedge [q \longrightarrow \sim(p \longrightarrow r)]$

④ Determinar si (a) y (b) son proposiciones equivalentes:

a) $p \longrightarrow (r \vee \sim q)$

b) $(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p)$

Dejamos el desarrollo de este ejercicio al lector.

(5) $[((\sim p) \wedge q) \longrightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

Solución

$$[((\sim p) \wedge q) \longrightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q \equiv [((\sim p) \wedge q) \longrightarrow F] \wedge \sim q$$

$$\equiv [\sim((\sim p) \wedge q) \vee F] \wedge \sim q$$

$$\equiv [(p \vee \sim q) \vee F] \wedge \sim q$$

$$\equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim q \equiv \sim q$$

Ejemplo.- Determinar si a) y b) son proposiciones equivalentes:

a) $p \longrightarrow (r \vee \sim q)$ **b)** $(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p)$

Solución

Determinaremos la equivalencia mediante la tabla de verdad.

p	q	r	$p \longrightarrow (r \vee \sim q)$			$(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p)$		
V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Idénticos

Otra manera es mediante la simplificación.

a) $p \longrightarrow (r \vee \sim q) \equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q)$ ... (1)

b) $(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p) \equiv (\sim q \vee \sim p) \vee r \vee \sim p)$

$$\equiv (\sim q) \vee (\sim p \vee \sim p) \vee r$$

$$\equiv (\sim q) \vee (\sim p) \vee r$$

$$\equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q)$$ ... (2)

Luego de (1) y (2) se tiene: a) $\equiv$ b)

1.14. LA INFERENCIA LÓGICA O ARGUMENTO LÓGICO.-

Al proceso de pasar de un conjunto de premisas a una conclusión se denomina inferencia lógica o Argumento lógico.

La inferencia lógica es una condicional de la forma:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \longrightarrow q \qquad ... (\alpha)$$

donde las proposiciones $p_1, p_2, ..., p_n$ son llamadas premisas y que originan como consecuencia otra proposición q llamada conclusión.

OBSERVACIÓN.- Una inferencia lógica puede ser una tautología, una contingencia o una contradicción y por lo tanto se tiene:

① Si la condicional (α) es una tautología se denomina argumento válido o inferencia válida.

② Si la condicional (α) no es una tautología se denomina FALACIA.

Ahora veremos como se determina el valor de verdad de un argumento lógico.

1.15. DEFINICIÓN.-

El argumento (α) es verdadero si q es verdadero cuándo todas las premisas $p_1, p_2, ..., p_n$ son verdaderos, en cualquier otro caso el argumento (α) es falso.

NOTACIÓN.- También el argumento (α) se denota por:

$$p_1, p_2, ..., p_n \longrightarrow q \qquad ... (\beta)$$

Ejemplo.- Determinar si $p \vee q$ es una consecuencia válida de $\sim p \longrightarrow \sim q, \sim q \longrightarrow r, \sim r$

<u>Solución</u>

En este problema las premisas $\sim p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$, $\sim r$ y la conclusión es $p \vee q$, por lo tanto se debe demostrar que $(\sim p \longrightarrow \sim q) \wedge (\sim q \longrightarrow r) \wedge \sim r \longrightarrow p \vee q$ es una tautología.

p	q	r	[(~p ⟶ ~q)	∧	(~q ⟶ r)]	∧	[~r	⟶	(p ∨ q)]
V	V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	V	V	F

Es una tautología

Como es una tautología es una inferencia válida.

1.16. TEOREMA.-

Si el argumento (α) es válida y las premisas $p_1, p_2, ..., p_n$ son verdaderas, entonces la conclusión q es verdadera.

Demostración

Si el argumento (α) es válido, la condicional $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \longrightarrow q$ es una tautología en que $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n)$ es verdadera (puesto que cada $p_1, p_2, ..., p_n$ son verdaderos) de donde se tiene que la única posibilidad para la conclusión q es que sea verdadera, pues si fuese falsa, la condicional seria falsa y la inferencia no seria válida, contradiciendo la hipótesis.

OBSERVACIÓN.- Una inferencia no se modifica si una o varias de las proposiciones componentes $p_1, p_2, ..., p_n$, q se reemplaza por otra u otras que sean equivalentes.

NOTACIÓN.- Al argumento $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \longrightarrow q$, también se denota en la forma siguiente:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ . \\ . \\ . \\ \underline{p_n} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Ejemplo.- Demostrar que el argumento es válido.

$$\begin{array}{l} p \\ p \longrightarrow q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Solución

Se debe demostrar que la condicional

$[p \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q$ es una tautología

$$[p \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q \equiv \sim[p \wedge (p \longrightarrow q)] \vee q$$

$$\equiv [\sim p \vee \sim(p \longrightarrow q)] \vee q$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \vee \sim(\sim p \vee q)$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$$

$$\equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv V \text{ es tautología}$$

También puede haberse demostrado con la tabla de verdad.

p	q	[p	∧	(p ⟶ q)]	⟶	q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

Es una tautología

1.17. INFERENCIAS VÁLIDAS NOTABLES.-

(1) Ley De Módus Pones.- $[(p \longrightarrow q) \wedge q] \Rightarrow q$

también se simboliza

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

(2) Ley De Módus Tollens.- $[(p \longrightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)$

también se simboliza

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore\ \sim p \end{array}$$

(3) Ley Del Silogismo Hipotético. $[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \Rightarrow (p \longrightarrow r)$

También se simboliza:

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ q \longrightarrow r \\ \hline \therefore\ p \longrightarrow r \end{array}$$

(4) Ley Del Silogismo Disyuntivo. $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$

También se simboliza:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

(5) Ley Del Dilema Constructivo. $[(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$

También se simboliza:

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ r \longrightarrow s \\ p \vee r \\ \hline \therefore\ q \vee s \end{array}$$

(6) Ley De Simplificación.

a) $p \wedge q \Rightarrow p$ **b)** $p \wedge q \Rightarrow q$

También se simboliza:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \text{de} \therefore\ p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

1.18. EL MÉTODO ABREVIADO.-

El desarrollo de la tabla de valores de la inferencia $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \longrightarrow q$ es muy laborioso cuando se desea saber su validez, esto se puede evitar mediante el "método abreviado" que es fácil de manejar y de gran precisión.

El método abreviado consiste en analizar la única posibilidad de ser falsa la implicación $p \longrightarrow q$, es decir:

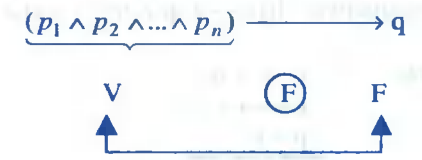


O sea que la implicación es falsa F sólo cuando el antecedente es verdadero V y el consecuente falsa F.

Ahora haremos un análisis a la inferencia. $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \longrightarrow q$

mediante los siguientes pasos:

1° Asignar el valor de verdad V a cada una de las premisas $p_1, p_2, ..., p_n$ y falso F a la conclusión, como el antecedente es verdadero y por ser una conjunción n premisas entonces cada premisa $p_1, p_2, ..., p_n$ es verdadera es decir:



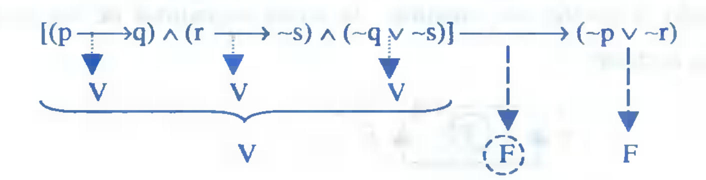
2° Deducir el valor de cada una de las variables proporcionales teniendo en cuenta las reglas $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, ~ que se pueden presentar en cada premisa.

3° Si cada una de las variables proporcionales tiene un sólo valor, entonces la inferencia no es válida, es decir no hay implicación puesto que la conjunción de premisas es V y la conclusión es F.

4° Si una variable proporcional llega tener dos valores a la vez (V y F), entonces quedará demostrado que no es posible que la conjunción de premisas es V y la conclusión es F, por lo tanto hay implicación y la inferencia es válida.

Ejemplo. Analizar la inferencia $[(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow \sim s) \wedge (\sim q \vee \sim s)] \longrightarrow (\sim p \vee \sim r)$

<u>**Solución**</u>



Analizando la conclusión $(\sim p \vee \sim r)$

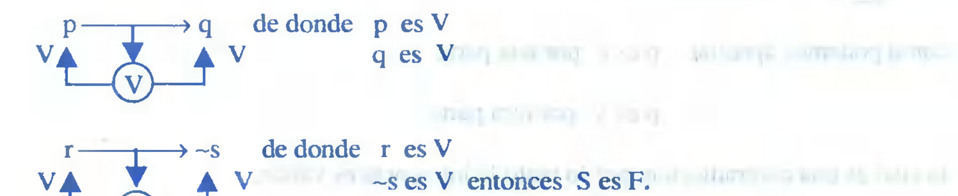
~p ∨ ~r

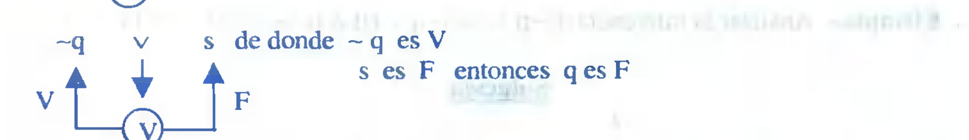
F F

F

de donde $\begin{cases} \sim p \text{ es } F \\ \sim r \text{ es } F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \text{ es } V \\ r \text{ es } V \end{cases}$

ahora analizaremos cada premisa

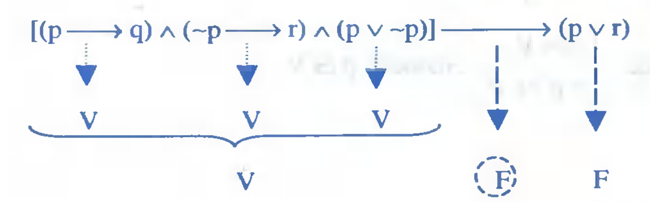




como se puede apreciar que q es V por una parte y q es F por otra parte, lo cual es una contradicción por lo tanto la inferencia es válida.

Ejemplo.- Analizar la inferencia $[(p \longrightarrow q) \wedge (\sim p \longrightarrow r) \wedge (p \vee \sim p)] \longrightarrow (p \vee r)$

Solución



Analizando la conclusión $p \vee r$

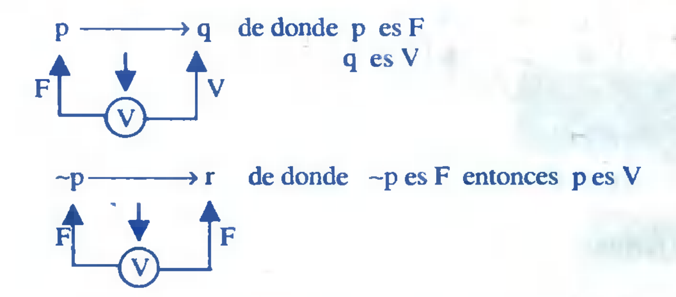
p ∨ r

F F

F

de donde $\begin{cases} p \text{ es } F \\ r \text{ es } F \end{cases}$

Ahora analizamos cada una de las premisas.



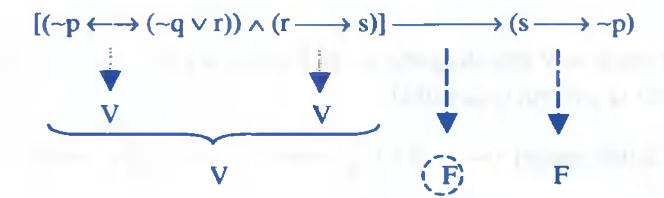
como podemos apreciar p es F por una parte

p es V por otra parte

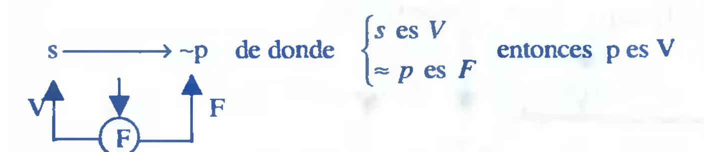
lo cual es una contradicción, por lo tanto la inferencia es válida.

Ejemplo.- Analizar la inferencia: $[(\sim p \leftrightarrow (\sim q \vee r)) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow (s \rightarrow \sim p)$

<u>Solución</u>

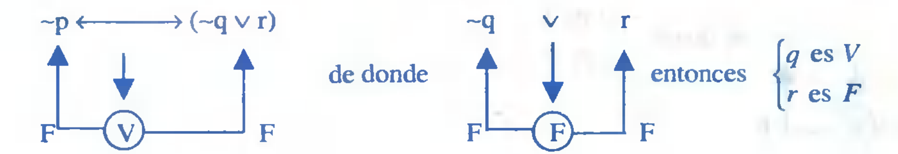


Analizando la conclusión $s \rightarrow \sim p$



$\begin{cases} s \text{ es } V \\ \sim p \text{ es } F \end{cases}$ entonces p es V

Ahora analizamos cada una de las premisas.



entonces $\begin{cases} q \text{ es } V \\ r \text{ es } F \end{cases}$

$r \longrightarrow s$ de donde r es F, s es F

(Diagrama: F bajo r, V en el centro, F bajo s)

Como se tiene una contradicción. Luego la inferencia no tiene validez.

1.19. MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN.-

En la demostración de teoremas y proposiciones que se presentan en el álgebra y el análisis se aplican ordenadamente los pasos lógicos agotando todas las premisas (antecedentes o hipótesis) para verificar la conclusión (consecuente o tesis).
Existen dos formas o métodos de demostración matemática, la directa y la indirecta.

1.20. FORMA O MÉTODO DIRECTO DE DEMOSTRACIÓN.-

En la tabla de verdad de la implicación $p \longrightarrow q$.

Si p es falso, la proposición $p \longrightarrow q$ es válida cualquiera que sea el valor de q, entonces no se tendrá nada que demostrar, es decir que interesan los casos de antecedente verdadero.

Sí a partir de la verdad de p o de un conjunto de premisas de la forma.

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q \qquad \ldots (1)$$

se deduce la verdad de la conclusión de q, se dice que se ha usado una demostración directa.

Ejemplo.- Mediante el método directo comprobar la validez de la inferencia lógica.

$$[\sim p \wedge (p \vee q)] \longrightarrow q$$

Solución

$$[\sim p \wedge (p \vee q)] \longrightarrow q \equiv \sim[\sim p \wedge (p \vee q)] \vee q$$

$$\equiv [p \vee \sim(p \vee q)] \vee q$$

$$\equiv \underbrace{(p \vee q) \vee \sim(p \vee q)}_{V}$$

$$\equiv \text{ tautología.}$$

1.21. FORMA O MÉTODO INDIRECTO DE DEMOSTRACIÓN.-

A esta forma de demostración también se denomina demostración por contradicción o por reducción al absurdo, este método consiste es negar la conclusión q y considerarla como una premisa, y a una de las premisas $p_1, p_2, ..., p_n$ negarla digamos a p_1 y construir el siguiente argumento lógico

$$((\sim q) \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \longrightarrow \sim p_1 \qquad \textbf{... (2)}$$

ahora probaremos que el argumento lógico(2) es equivalente al argumento lógico (1).

$$((\sim q) \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \longrightarrow \sim p_1 \equiv \sim[\sim q \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n] \vee \sim p_1$$

$$\equiv [q \vee \sim p_2 \vee ... \vee \sim p_n] \vee \sim p_1$$

$$\equiv [\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee ... \vee \sim p_n] \vee q$$

$$\equiv \sim[p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n] \vee q$$

$$\equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \longrightarrow q \quad \text{(argumento 1)}$$

1.22. DEFINICIÓN.-

Cuando en una demostración se emplea el argumento lógico (2) se dice que se está aplicando el método indirecto o método por reducción al absurdo.

Ejemplo.- Por el método indirecto comprobar la validez a la inferencia lógica siguiente:

$$[\sim p \wedge (p \vee q)] \longrightarrow q$$

Solución

Negaremos la conclusión q y la consideremos como premisa y negaremos a la premisa ~p y considerarla como conclusión.

$$[(\sim q) \wedge (p \vee q)] \longrightarrow p \equiv \sim[(\sim q) \wedge (p \vee q)] \vee p$$

$$\equiv [q \vee \sim(p \vee q)] \vee p$$

$$\equiv \underbrace{(p \vee q) \vee \sim(p \vee q)}_{V}$$

$$\equiv \text{ tautología}$$

Ejemplo.- Probar que él número $\sqrt{2}$ no es racional.

Solución

La comprobación lo haremos por el método de reducción al absurdo.

1ro. Suponemos que $\sqrt{2}$ es racional.

2do. Si $\sqrt{2}$ es racional $\Rightarrow \exists$ m, n $\in$ Z prímos entre sí tal que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

3ro. Sí $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$ ... (α)

4to. Como $m^2 = 2n^2$, con n entero $\Rightarrow m^2$ es par, por lo tanto m es par.

5to. Como m es par $\Rightarrow$ m = 2k, para algún k entero.

6to. Reemplazando en (α) se tiene: $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$

7mo. Como $n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ es par, por lo tanto n es par.

8vo. Como n es par $\Rightarrow$ n = 2l, para algún l entero.

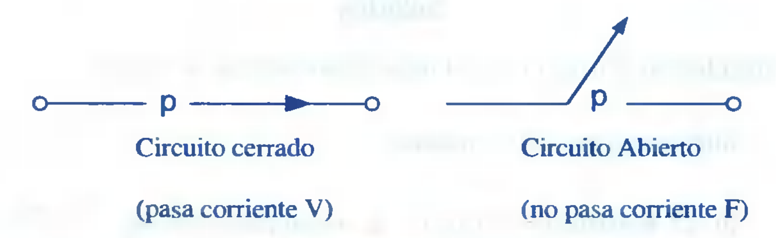
9no. De 5to. y 8vo. se tiene m = 2k, n = 2l de donde m y n tiene un factor común 2, lo cual contradice a la hipótesis de que m y n son prímos entre sí.

10mo. Conclusión, por lo tanto $\sqrt{2}$ no es racional.

1.23. CIRCUITOS LÓGICOS.-

A un ensamblaje de interruptores automáticos que permiten el paso de la corriente eléctrica o la interrumpen de denomina circuitos eléctricos.

A un interruptor se puede representar por medio de una proposición p y viceversa, de tal manera que el valor de verdad de la proposición p se identifique con el "paso de la corriente" en este caso se dice que el "circuito está cerrado" y cuando el valor es "falso" con la interrupción de la corriente en este caso se dice que el circuito está abierto.



OBSERVACIÓN.- Para diseñar los circuitos eléctricos, se usa la siguiente notación.

Él 1 indica "pasa corriente"

El 0 indica "no pasa corriente"

Luego en circuitos eléctricos se usan como notación.

"El 1 en lugar de V"

"El 0 en lugar de F"

En el diseño de esquemas de circuitos eléctricos para representar a proposiciones compuestas y viceversa consideramos dos clases de instalaciones, en serie y en paralelo.

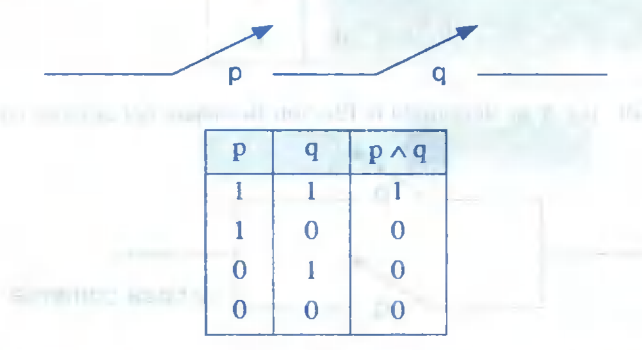
1.24. DISEÑO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN SERIE.-

Consideremos dos interruptores p y q conectados en serie.



Pasa corriente

Se observa que este circuito admite paso de corriente cuando estos dos interruptores p y q están cerrados, en cualquier otro caso no hay paso de corriente, es decir ésta situación corresponde a la tabla de verdad de la conjunción p y q.



p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

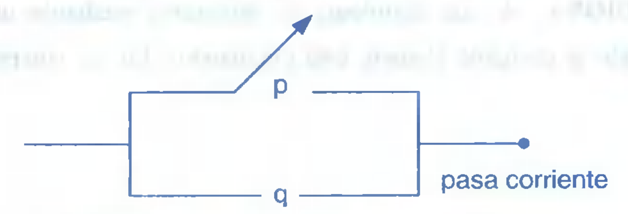
En la tabla de verdad se observa que basta que uno de los interruptores esté abierto "O" para que no circule la corriente en todo el circuito.



A la expresión $p \wedge q$ se le llama la "Función Booleana del circuito en serie".

1.25. DISEÑO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN PARALELO.-

Consideremos dos interruptores p y q instalados en paralelo.

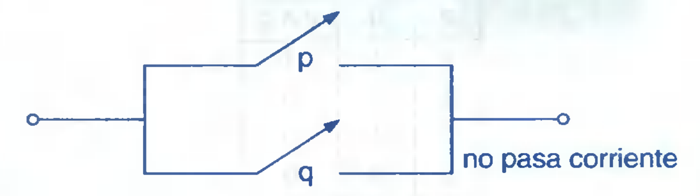


Se observa en el circuito para que circule corriente es suficiente que alguno de los interruptores o ambos p o q esté cerrado "1" y no hay paso de corriente si ambos interruptores están abiertos (ambos con el valor "0").

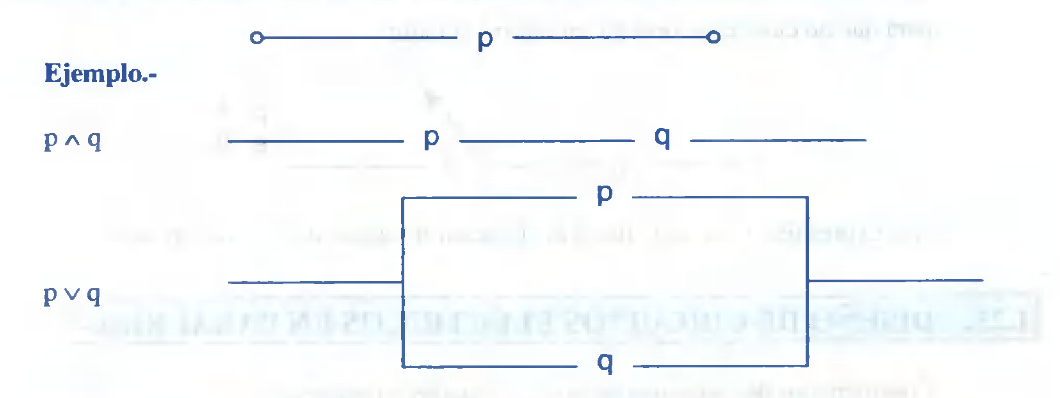
Este circuito corresponde a la tabla de verdad de la disyunción $p \vee q$, es decir:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A la expresión $p \vee q$ se denomina la función Booleana del circuito en paralelo.



NOTACIÓN.- A un interruptor p representaremos simplemente como



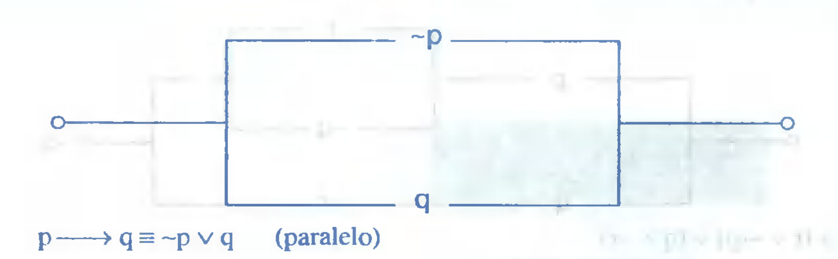
OBSERVACIÓN.- A una tautología se representa mediante un circuito siempre cerrado (donde la corriente siempre está circulando). En las computadoras no son de utilidad.

Ejemplos.-

① Construir el circuito lógico de las funciones Booleanas.

a) $p \longrightarrow q$

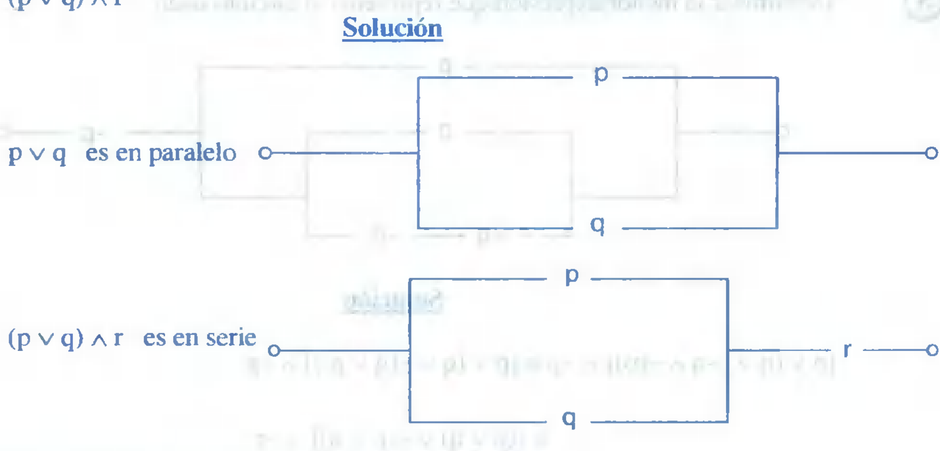
Solución



$p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (paralelo)

b) $(p \vee q) \wedge r$

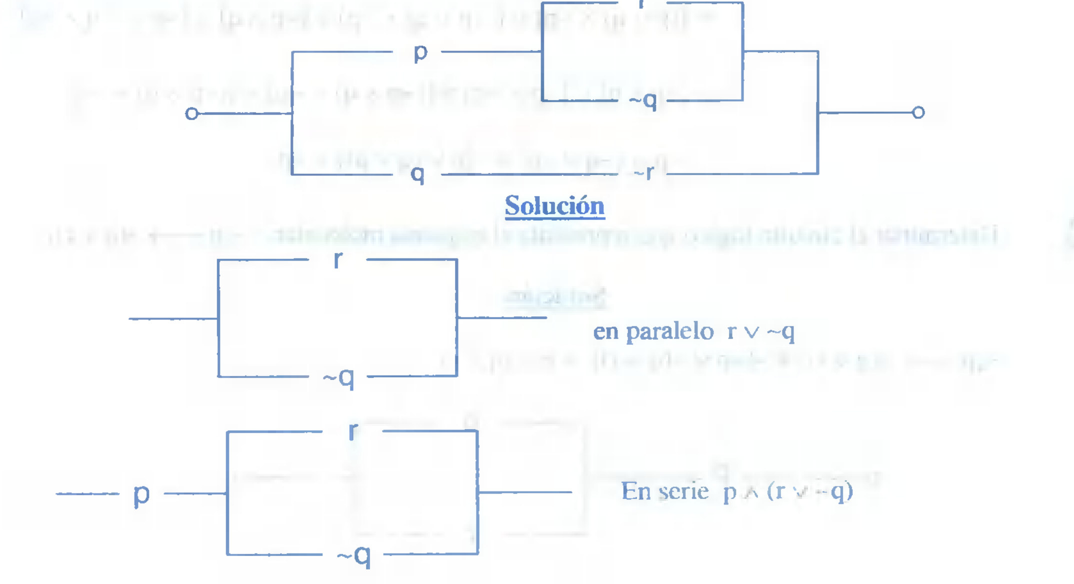
Solución



$p \vee q$ es en paralelo

$(p \vee q) \wedge r$ es en serie

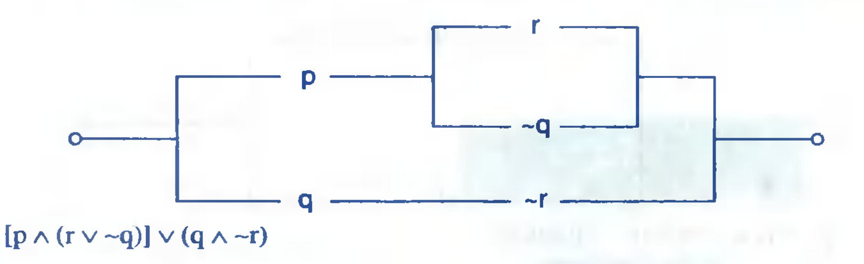
(2) Describir simbólicamente el circuito.



Solución

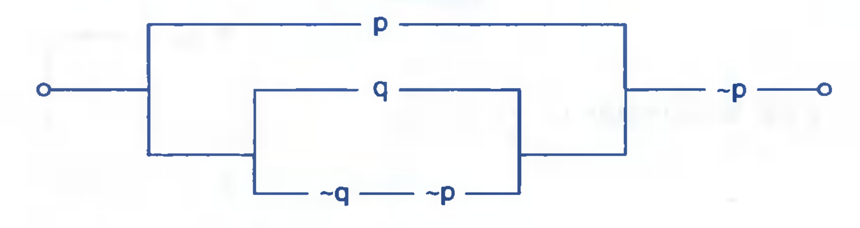
en paralelo $r \vee \sim q$

En serie $p \wedge (r \vee \sim q)$



$[p \wedge (r \vee \sim q)] \vee (q \wedge \sim r)$

3 Determinar la menor expresión que representa al circuito dado:



Solución

$[p \vee (q \vee (\sim q \wedge \sim p))] \wedge \sim p \equiv [p \vee (q \vee \sim (q \vee p))] \wedge \sim p$

$\equiv [(p \vee q) \vee \sim (p \vee q)] \wedge \sim p$

$\equiv [(p \vee q) \wedge \sim p] \vee [\sim (p \vee q) \wedge \sim p] \equiv [\sim p \wedge q] \vee [\sim p \wedge \sim q \wedge \sim p]$

$[\sim p \wedge q] \vee [\sim p \wedge \sim q] \equiv [(\sim p \wedge q) \vee \sim p] \wedge [(\sim p \wedge q) \vee \sim q]$

$\sim p \wedge (\sim q \vee \sim p) \equiv \sim [p \vee (q \vee p)] \vee \sim p$

4 Determinar el circuito lógico que representa el esquema molecular. $\sim [p \longrightarrow \sim (q \vee r)]$

Solución

$\sim [p \longrightarrow \sim (q \vee r)] \equiv \sim [\sim p \vee \sim (q \vee r)] \equiv p \wedge (q \vee r)$

1.26. LÓGICA CUANTIFICACIONAL.-

FUNCIÓN PROPOSICIONAL.-

A todo enunciado abierto de la forma P(x) se denomina función proposicional la cual tiene la propiedad de convertirse en una proposición al ser sustituido la variable x por una constante "a" especifica, al conjunto de todos los valores convenidos para la variable x se denomina dominio de la variable.

De acuerdo a la definición de enunciado abierto, la función proposicional sobre D es toda expresión P(x) donde P(a) es verdadero o falso para todo $a \in D$.

Ejemplo.- $P(x) = x + 1 < 9$, si x pertenece al conjunto de los enteros, entonces P(x) es una función proposicional cuyo dominio es los enteros.

Si $x = -2 \in Z$, $-2 + 1 < 9$ es verdadero

$x = 10 \in Z$, $10 + 1 < 9$ es falso

por lo tanto P(x) es una función proposicional.

1.27. CUANTIFICADORES EXISTENCIAL Y UNIVERSAL.-

Se ha visto un método que nos permite que a partir de una función proposicional P(x) se puede obtener proposiciones, sin embargo se tiene otro método completamente distinto que permite obtener proposiciones a partir de una función proposicional, dicho método es llamado cuantificadores.

Ejemplo.- Sea la función proposicional P(x): x es un número prímo ... (1)

Si a la función proposicional le anteponemos "para todo x" se obtiene:

"para todo x, x es un número prímo" ... (2)

La frase "para todo x" se denomina el cuantificador universal y se simboliza por: $\forall x$ que se lee para todo x.

Luego (2) se puede escribir en la forma. $\forall$ x: x es un número primo ... **(3)**

aclarando (1) es una función proposicional

(3) es una proposición.

A un cuantificador universal puede ser reemplazado por:

$\forall$x: P(x) o $\forall$ x / p(x) ó ($\forall$ x) (P(x))

y en todas estas notaciones, se lee "para todo x, tal que se verifica P(x)" es decir:

$\forall$ se lee "para todo"

El cuantificador El cuantificado

Notación:
$$\begin{cases} \forall x & : \; P(x) \\ \forall x & / \; P(x) \\ (\forall x) & (P(x)) \end{cases}$$

Ejemplo.- $\forall$ x: x + 4 = x

El cuantificador universal no es el único cuantificador que permite obtener proposiciones a partir de funciones proposicionales, existe otro llamado cuantificador existencial.

Sí en (1) P(x): x es un número prímo antes ponemos la frase "existe x tal que" es nuevo cuantificador, se obtiene:

"Existe x tal que x es un número prímo" ... **(4)**

Al cuantificador existencial x "existe x tal que" se simboliza $\exists$ x, de donde (4) se escribe

$\exists$ x: x es un número prímo ... **(5)**

un cuantificador existencial puede ser representado por $\exists$ x: P(x) o $\exists$ x/P(x) o ($\exists$x) (P(x)) y en todas éstas notaciones se lee:

"Existe por lo menos un x, tal que se verifique P(x)" es decir: $\exists$ se lee existe

El cuantificador El cuantificado

Notación $\begin{cases} \exists x : P(x) \\ \exists x \,/\, P(x) \\ (\exists x)(P(x)) \end{cases}$

Ejemplo.- Sea el conjunto A = {-2,-1,2,3,4} se tiene:

$\exists\, x \in A:\ x^2 - 2x = 8$

$\exists\, x \in A \,/\ x^2 - 2x = 8$

$(\exists x \in A)(x^2 - 2x = 8)$

1.28. NEGACIÓN DE PROPOSICIÓN CON CUANTIFICADORES.-

Proposición	La negación
$\forall\ x : P(x)$	$\sim [\forall\ x : P(x)] \equiv \exists\ x : \sim P(x)$
$\exists\ x : P(x)$	$\sim[\exists\ x : P(x)] \equiv \forall\ x : \sim P(x)$
$\forall\ x \in A : P(x)$	$\sim[\forall\ x \in A : P(x)] \equiv \exists\ x \in A : \sim P(x)$
$\exists\ x \in A : P(x)$	$\sim[\exists\ x \in A : P(x)] \equiv \forall\ x \in A : \sim P(x)$

Ejemplo.- Negar la proposición, $\forall\ x \in N \,/\, x + 3 > 5$

Solución

$\sim[\forall\ x \in N \,/\, x + 3 > 5] = \exists\ x \in N \,/\, x + 3 \le 5$

Ejemplos.- Negar cada una de las siguientes proposiciones si el conjunto de referencia es los reales R.

① $(\forall\ x)(\exists\ y)[P(x) \longrightarrow (q(y) \longrightarrow r(x))]$

② $(\forall\ x)(\exists\ y)(\exists\ z)\ [P(x,y) \longrightarrow q(x) \wedge r(z)]$

③ $(\exists\ x)(\forall\ y)(\exists\ z)[\sim(P(x) \longrightarrow q(y)) \vee r(z)]$

④ $(\forall\ x)(\exists\ y)(\forall\ z)[\sim(r(x) \vee \sim P(x)) \vee q(z)]$

Solución

① $\sim(\forall x)(\exists y)[P(x) \longrightarrow (q(y) \longrightarrow r(x))] \equiv (\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge \sim(q(y) \longrightarrow r(x)]$

$\equiv (\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge (q(y) \wedge \sim r(x))]$

② $\sim(\forall x)(\exists y)(\exists y)(P(x,y) \longrightarrow (q(x) \wedge r(z)) \equiv (\exists x)(\forall y)(\forall z)[P(x,y) \wedge \sim(q(x) \wedge r(z))]$

$\equiv (\exists x)(\forall y)(\forall z)[P(x,y) \wedge (\sim q(x) \vee \sim r(z))]$

③ $\sim(\exists x)(\forall y)(\exists z)[\sim(P(x) \longrightarrow q(y)] \vee r(z)] \equiv (\forall z)(\exists y)(\forall z)[P(x) \longrightarrow q(y)) \wedge \sim r(z)]$

④ $\sim(\forall x)(\exists y)(\forall z)[\sim(r(x) \vee \sim P(x)) \vee q(z)] \equiv (\exists x)(\forall y)(\exists z)[r(x) \vee \sim p(x)) \wedge \sim q(z)]$

1.29. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a) Sí $5 + 4 = 11$, entonces $6 + 6 = 12$

Solución

Es verdadera puesto que el antecedente es falso mientras que el consecuente es verdadero.

b) No es verdad que $3 + 3 = 7$ sí y solo sí $5 + 5 = 12$

Solución

Es falso puesto que se está negando una proposición verdadera.

c) Lima está en Chile o La Paz está en Ecuador.

Solución

Es falso puesto que ambas componentes son falsas

d) No es verdad que $2 + 2 = 5$ o que $3 + 1 = 4$

Solución

Es falso puesto que se está negando una proposición verdadera.

(2) Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a) $4 + 8 = 12$ y $9 - 4 = 5$

Solución

Es verdadera V, porque es una conjunción cuyas dos proposiciones son verdaderas.

b) $8 + 4 = 12$ y $8 - 3 = 2$

Solución

Es falso F, puesto que es una conjunción con una proposición simple falsa.

c) $8 + 4 = 12$ o $7 - 2 = 3$

Solución

Es verdadera V, puesto que es una disyunción con una proposición simple verdadera.

d) La UNMSM está en Arequipa o está en Lima.

Solución

Es verdadera V, puesto que es una disyunción exclusiva con una proposición simple verdadera.

e) La UNI está en Lima o está en Trujillo.

Solución

Es verdadera V, puesto que es una disyunción exclusiva con una proposición simple verdadera.

f) Sí $5 + 2 = 7$, entonces $3 + 6 = 9$

Solución

Es verdadera V, puesto que es una implicación con las dos proposiciones simples - verdaderas.

g) Sí $4 + 3 = 2$, entonces $5 + 5 = 10$

Solución

Es verdadera V, por ser una implicación en donde el antecedente es falso F, y el consecuente es verdadero V de dos proposiciones simples.

h) Si $4 + 5 = 9$, entonces $3 + 1 = 2$

Solución

Es falso F, puesto que de una proposición verdadera V no puede implicar una proposición falsa F.

i) Si $7 + 3 = 4$, entonces $11 - 7 = 9$

Solución

Es verdadera V, puesto que las proposiciones que intervienen en la implicación son falsas.

(3) Evaluar la tabla de verdad de la proposición compuesta. $\sim(p \wedge q) \longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Solución

p	q	$\sim$	$(p \wedge q)$	$\longleftrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V

(4) Construir la tabla de verdad de la siguiente proposición:

$\sim\{\sim[p \vee (\sim q \longrightarrow p)] \vee \sim[(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]$

Solución

Primero simplificaremos la proposición por la ley de Morgan:

$\sim\sim\{[p \vee (\sim q \longrightarrow p)] \wedge [(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]\}$ de donde se tiene:

$[p \vee (\sim q \longrightarrow p)] \wedge [(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]$

p	q	$[p$	$\vee$	$(\sim q \longrightarrow p)]$	$\wedge$	$[(p \longleftrightarrow \sim q)$	$\longrightarrow$	$(q \wedge \sim p)]$
V	V	V	V	V	V	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	F

El valor de verdad

(5) Determinar la proposición $[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \longrightarrow \sim p$ es una tautología.

Solución

p	q	[(~p ∨ q)	∧	~q]	⟶	~p
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Es una tautología

(6) Verificar que las siguientes proposiciones son contradicciones:

a) $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ b) $\sim[p \vee (\sim p \vee \sim q)]$

Solución

p	q	(p ∧ q)	∧	~	(p ∨ q)	~	[p	∨	(~p ∨ ~q)]
V	V	V	F	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F	F	V	V

Contradicción Contradicción

(7) Demostrar que las proposiciones dada es una tautología: $[(p \vee \sim q) \wedge q] \longrightarrow p$

Solución

p	q	[(p ∨ ~q)	∧	q]	⟶	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F



Es una tautología

(8) Verificar que la proposición dada es una contingencia $[\sim p \wedge (q \vee r)] \longleftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$

Solución

p	q	r	[~p	∧	(q ∨ r)]	⟷	[(p ∨ r)	∧	q]
V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	V	F	F	F

Es una contingencia

(9) Determinar si las proposiciones $[p \longrightarrow (r \vee \sim q)]$ y $[(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p)]$ son equivalentes.

Solución

p	q	r	[p	⟶	(r ∨ ~q)]	[(q ⟶ ~p)	∨	(~r ⟶ ~p)]
V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Idénticas

Por lo tanto son equivalentes es decir: $[p \longrightarrow (r \vee \sim q)] \equiv [(q \longrightarrow \sim p) \vee (\sim r \longrightarrow \sim p)]$

(10) Determinar si las proposiciones $[(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)]$ y $\sim q \longrightarrow \sim p$ son equivalentes.

Solución

p	q	r	$[(\sim p) \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)]$			$\sim q \longrightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Idénticas

Por lo tanto son equivalentes es decir: $(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p) \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$

(11) Determinar los esquemas más simples de la proposición: $\sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee p$

Solución

$\sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee p$ por la condicional

$\sim[\sim(\sim(p \wedge q) \vee \sim q)] \vee p$ por la negación

$\sim[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee p$ por conmutatividad en la conjunción

$\sim[\sim q \vee (p \wedge q)] \vee p$ por absorción

$\sim[\sim q \vee p] \vee p$ por Morgan

$(\sim p \wedge q) \vee p$ por absorción

$p \vee q$

$\therefore \sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee p \equiv p \vee q$

(12) De la falsedad de la proposición: $(p \longrightarrow \sim q) \vee (\sim r \longrightarrow s)$ determinar el valor de verdad de los esquemas moleculares

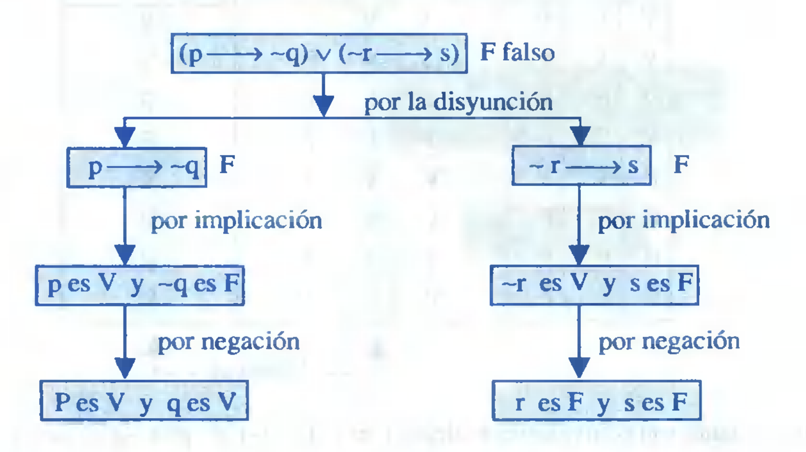
a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$

b) $(\sim r \vee q) \longleftrightarrow (\sim q \vee r) \wedge s$

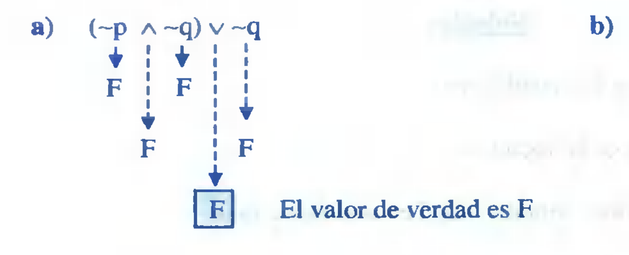
c) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \vee q) \wedge \sim q$

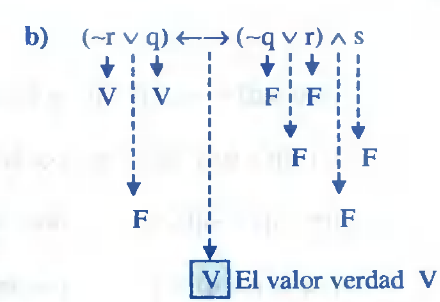
Solución

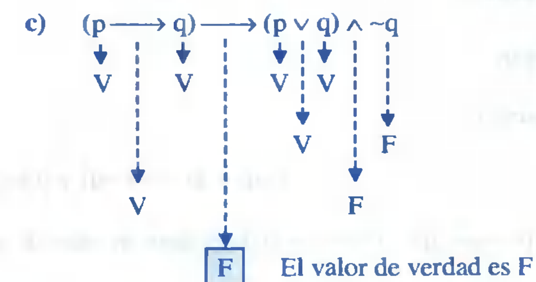
Determinaremos el valor de verdad de p, q, r y s



Por lo tanto: p es V, q es V , r es F, s es F







(13) El valor de verdad de: $\sim[(\sim p \vee q) \vee (r \longrightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]$ es verdadera. Hallar el valor de verdad de p, q, y r

Solución

$\sim[(\sim p \vee q) \vee (r \longrightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]$ es V

por conjunción

$\sim[(\sim p \vee q) \vee (r \longrightarrow q)]$ es V $[(\sim p \vee q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]$ es V

por negación   por implicación

$(\sim p \vee q) \vee (r \longrightarrow q)$ es F $(\sim p \vee q)$ es F $(q \wedge \sim p)$ es F

por disyunción   por disyunción   por conjunción

$(\sim p \vee q)$ es F $(r \longrightarrow q)$ es F   p es V y q es F   q es F y ~p es F

por disyunción   por implicación   por negación

~p es F y q es F   r es V y q es F   q es F y p es V

por negación

p es V y q es F

por lo tanto el valor de verdad de $\begin{cases} p \text{ es } V \\ q \text{ es } F \\ r \text{ es } V \end{cases}$

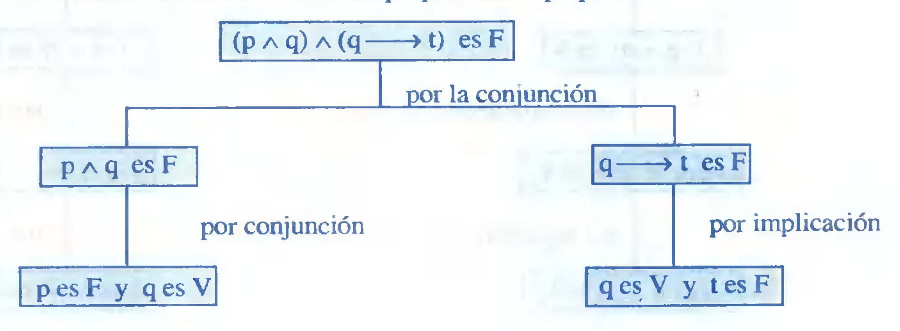
(14) Se sabe que $p \wedge q$ y $q \longrightarrow t$ son falsas, determinar el valor de verdad de los esquemas moleculares siguientes:

a) $(\sim p \vee t) \vee \sim q$ **b)** $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$

c) $[(p \longrightarrow q \wedge \sim(q \wedge t)] \longleftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge \sim t)]$

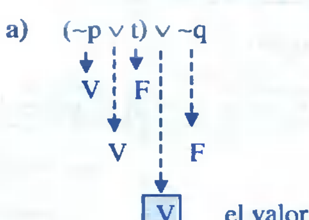
Solución

Determinaremos el valor de verdad de las proposiciones p, q, t



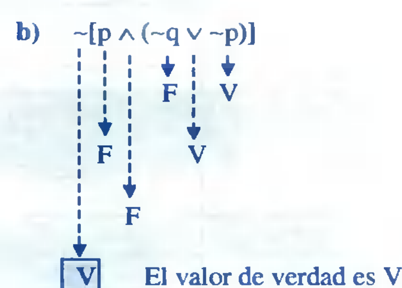
por lo tanto p es F, q es V y t es F

a) $(\sim p \vee t) \vee \sim q$



el valor de verdad es V

b) $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$



El valor de verdad es V

c) $[(p \longrightarrow q) \wedge \sim(q \wedge t)] \longleftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge \sim t)]$

F V V F F V V V V V V V V

V El valor de verdad es V

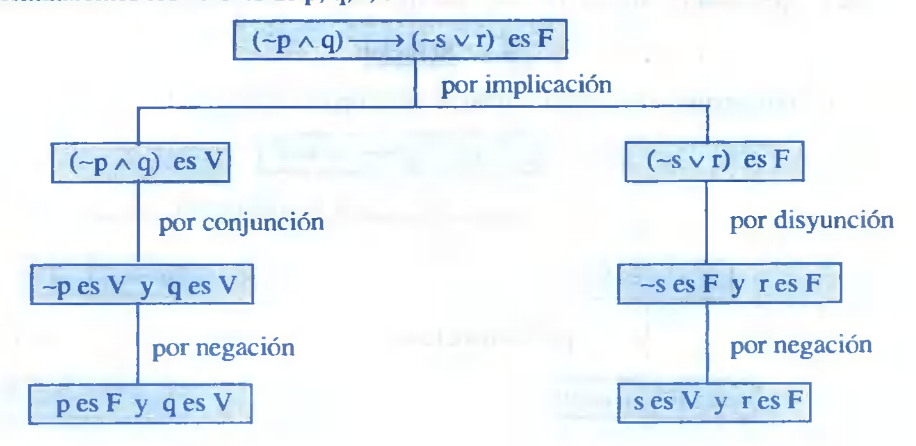
(15) Si la proposición $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim s \vee r)$ es falsa. Determinar cuál de las proposiciones son verdaderas:

a) $\sim[(p \longrightarrow q) \longrightarrow r]$ b) $\sim(\sim p \wedge q) \wedge [(\sim r \vee r) \wedge s]$

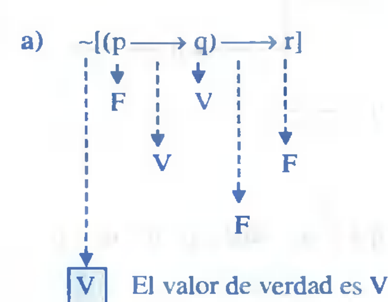
c) $[(p \vee \sim q) \wedge p] \vee \sim q$

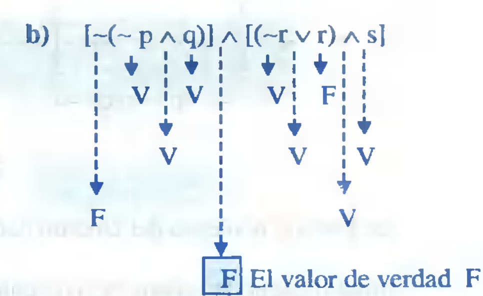
Solución

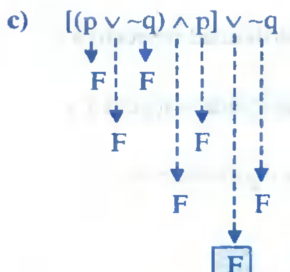
Determinaremos los valores de p, q, r, s



por lo tanto $\begin{cases} p \text{ es } F, \ q \text{ es } V \\ s \text{ es } V, \ r \text{ es } F \end{cases}$







Por lo tanto únicamente es verdadero la a)

16 Determinar el esquema más simple de la proposición $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Solución

$[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por distribución respecto a $\wedge$

$[((p \wedge q) \vee p) \wedge ((p \wedge q) \vee \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por absorción

$[p \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por conmutatividad en $\vee$

$[p \wedge (p \vee \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por absorción

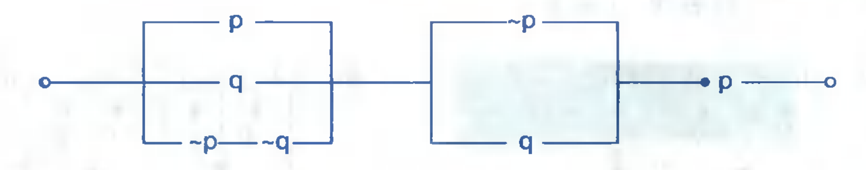
$p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ por absorción

$p \vee \sim q$

por lo tanto $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv p \vee \sim q$



Hallar la proposición equivalente más simplificada del siguiente circuito lógico.



Solución

La función booleana del circuito dado es: $[p \vee q \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge p]$

Simplificando la proposición obtenida se tiene:

$[(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge p)]$ distribuidad respecto a $\wedge$

$[(p \vee q \vee \sim p) \wedge (p \vee q \vee \sim q)] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge p]$ distribuida respecto a $\vee$

$(V \wedge V) \wedge [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)]$ por equivalencias

$V \wedge [F \vee (p \wedge q)] = V \vee (p \wedge q) = p \wedge q$

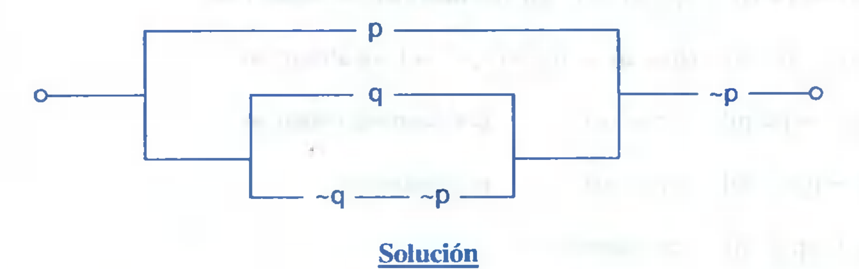
Por lo tanto la equivalencia es: $[p \vee q \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p] \equiv p \wedge q$

por lo tanto el circuito simplificado equivalente es:





Determinar la menor expresión que representa al circuito dado:



Solución

La función booleana del circuito dado es: $[p \vee (\sim q \wedge \sim p) \vee q] \wedge \sim p$

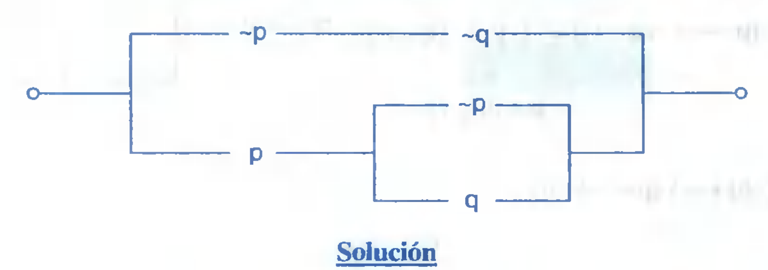
ahora simplificamos la proposición obtenida

$[p \vee (\sim q \wedge \sim p) \vee q] \wedge \sim p \equiv [p \vee q \vee \sim p] \wedge \sim p$

$\equiv [(p \vee \sim q) \vee q] \wedge \sim p$

$\equiv (V \vee q) \wedge \sim p \equiv q \wedge \sim p$

(19) Determinar la menor expresión que representa al circuito dado:



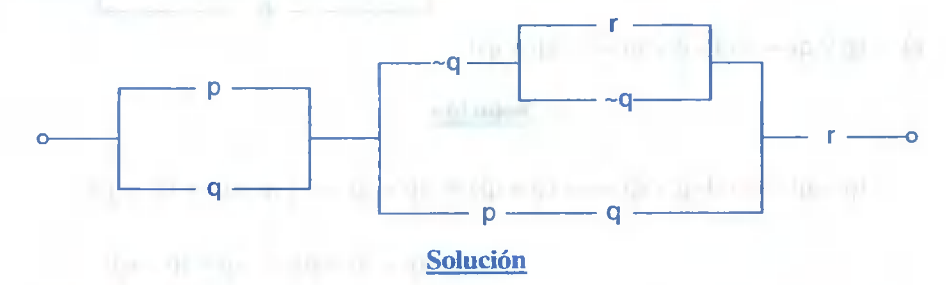
Solución

La función booleana del circuito dado es: $[(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge (\sim p \vee q))]$

ahora simplificando la proposición obtenida

$[(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge (\sim p \vee q))] \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q)] \equiv p \longleftrightarrow q$

(20) Determinar la menor expresión que representa el circuito dado:



Solución

La función booleana del circuito dado es: $(p \vee q) \wedge [(\sim q \wedge (r \vee \sim q)) \vee (p \wedge q)] \wedge r$

simplificando la proposición obtenida

$(p \vee q) \wedge [(\sim q \wedge (r \vee \sim q)) \vee (p \wedge q)] \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge [\sim q \vee (q \wedge p)] \wedge r$

$\equiv (p \vee q) \wedge [\sim q \vee p] \wedge r$

$\equiv [p \vee (q \wedge \sim q)] \wedge r$

$\equiv (p \vee F) \wedge r \equiv p \wedge r$

(21) Determinar los circuitos lógicos que representan los siguientes esquemas moleculares.

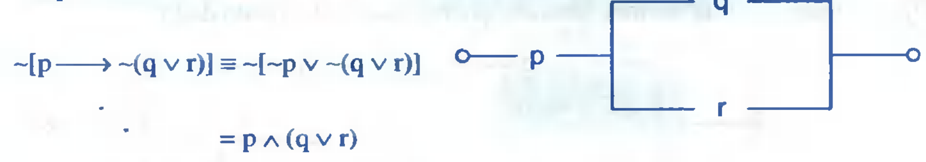
a) $\sim[p \longrightarrow \sim(q \vee r)]$

Solución

Simplificando se tiene:

$\sim[p \longrightarrow \sim(q \vee r)] \equiv \sim[\sim p \vee \sim(q \vee r)]$

$\equiv p \wedge (q \vee r)$



b) $(\sim p) \longleftrightarrow (p \longrightarrow \sim q)$

Solución

$(\sim p) \longleftrightarrow (p \longrightarrow \sim q) \equiv (\sim p) \longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

$\equiv (\sim p \wedge (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge (p \wedge q))$

$\equiv (\sim p) \vee (p)$

~p

p

c) $(p \vee q) \longrightarrow [(\sim p \vee q) \longrightarrow (p \wedge q)]$

Solución

$(p \vee q) \longrightarrow [(\sim p \vee q) \longrightarrow (p \wedge q)] \equiv \sim(p \vee q) \vee [\sim(\sim p \vee q) \vee (p \wedge q)]$

$\equiv \sim(p \vee q) \vee [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)]$

$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee p$

$\equiv (p \vee \sim q)$

p

~q

1.30. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Determinar cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones:

   a) $5 + 7 = 16 - 4$ b) $3 \times 6 = 15 + 1$ y $4 - 2 \neq 23 \times 5$

   c) ¿El silencio es fundamental para estudiar?

   d) ¡Estudia lógica simbólica!

   e) Nosotros estudiamos en la Universidad Peruana.

   f) Los hombres no pueden vivir sin oxígeno.

   g) ¡Arriba Callao!

   h) $5 + x = 7$ i) $2 + x \neq 3 + x$

2. Determine cuáles de los siguientes enunciados son enunciados abiertos:

   a) x es hermano de y b) $28 < 15$

   c) $x + y + z \neq 1$ d) $9x + 3 > 12$

   e) Tenga calma, no se impaciente

   g) x es ingeniero y Juan es matemático.

   h) La UNAC sobresalió en el deporte en el 2000.

3. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas?

   a) Sí $3 + 3 = 6$, entonces $4 = 4$

   b) Si $5(7) = 35$, entonces $10 - 3 = 13$

   c) Si $19 - 7 = 3$, entonces $4(5 + 3) = 32$

   d) Si $2 = 3$ entonces 8 es un número prímo.

   e) Si 3(7) es un número natural, entonces 17 es un número prímo.

   f) Si $x = 2$, entonces $3x = 6$

4 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(3+5=8) \vee (5-3=4)$ **b)** $(3+8=11) \vee (7-3>1)$

c) $(5-3=8) \longrightarrow (1-7=6)$ **d)** $(4+6=9) \longleftrightarrow (5-2=4)$

5 Dados las siguientes proposiciones: p: $5 > 10$

q: si $x^2+1=0$, entonces x es un número real

r: "El punto medio de un segmento, equidista de los extremos del segmento"

t: Sí $x+3=0$, entonces $x=-3$

Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) $[(p \wedge q) \longrightarrow r] \wedge \sim t$ **b)** $[(p \longleftrightarrow q) \longrightarrow \sim r \wedge t] \vee (p \vee r)$

6 Si $P(x): x^2-16=0$; q(x): $x-12=0$, $r(x): x^2>9$. Hallar el valor de verdad de:

a) $[p(2) \wedge \sim q(2)] \longleftrightarrow r(4)$

b) $[\sim p(4) \longrightarrow r(5)] \vee \sim q(4)$

c) $[(p(1) \wedge p(3)) \longleftrightarrow (r(2) \vee p(3)] \longrightarrow [\sim(p(2) \vee q(2))]$

7 Si $P(x): x^3=27$; $q(x): x^2=9$; r(x): $x<10$. Hallar el valor de verdad de:

a) $[p(1) \longrightarrow q(12)] \longleftrightarrow [r(-3) \vee \sim r(3)]$

b) $[p(0) \wedge \sim q(-1)] \vee [r(-5) \longrightarrow (r(-6) \vee r(0)]$

c) $[(p(3) \vee p(2)) \longleftrightarrow (r(2) \wedge \sim q(3))] \longleftrightarrow [\sim q(3) \vee \sim p(-3)]$

8 Construir la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(p \longleftrightarrow \sim q) \longleftrightarrow (q \longrightarrow p)$ **b)** $(p \wedge \sim q) \longrightarrow (\sim p \vee q)$

c) $[(p \vee \sim r) \wedge (p \vee r)] \wedge [(q \longrightarrow p) \wedge (q \vee p)]$ **d)** $\sim(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$

e) $\sim[p \wedge (\sim q \longrightarrow p)] \wedge [\sim(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \vee \sim p)]$

9 Construir la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(p \wedge q) \vee (\sim p) \Rightarrow (p \vee q)$

b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

d) $((\sim p) \vee q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

e) $(p \wedge r) \Rightarrow (\sim q \vee r)$

f) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim r)$

10 Hallar las tablas de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $p \longrightarrow (p \vee \sim q)$

b) $[(p \vee \sim q) \longrightarrow (q \longrightarrow p)]$

c) $[p \vee (q \longrightarrow \sim r)] \wedge [(\sim p \vee r) \longleftrightarrow \sim q]$

d) $\sim[\sim(p \wedge q) \longrightarrow \sim q] \vee p$

e) $\sim\{[(p \longrightarrow q) \vee (q \longrightarrow r)] \longrightarrow (r \longrightarrow p)\}$

11 Deducir el valor de verdad de:

a) $(p \longrightarrow r) \longrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

b) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$

c) $[(\sim r \vee q) \wedge q] \longleftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

12 Indicar cuál es la tabla de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

$\sim[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$

13 Determinar cuál de las siguientes proposiciones son tautología

a) $[(p \vee \sim q) \wedge q] \longrightarrow p$

b) $[(p \wedge q) \vee q] \longleftrightarrow q$

c) $[\sim p \wedge (q \wedge \sim r)] \longleftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee r)]$

14 Por medio de una tabla de valores, establecer, si cada una de los siguientes esquemas moleculares es tautología, contingencia o contradictoria.

a) $\sim[\sim p \longrightarrow \sim(\sim q \wedge \sim p)] \vee \sim(\sim p \vee \sim q)$

b) $[(p \vee \sim q) \wedge \sim p] \wedge (\sim q \longrightarrow p)$

c) $\sim(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow \sim(\sim q \longrightarrow \sim p)$

d) $[p \longrightarrow (q \longrightarrow r)] \longleftrightarrow [(p \wedge \sim r) \longrightarrow \sim q]$

e) $[p \wedge (\sim q \longrightarrow p)] \wedge \sim[(p \longrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \vee \sim p)]$

f) $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \longleftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee r)]$


15 Determinar mediante la tabla de verdad, cuáles de las siguientes proposiciones son: tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

b) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$

c) $\sim[(p \vee p) \rightarrow p]$

d) $\sim(p \vee q) \wedge p$

e) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge [(q \vee p) \rightarrow r]$

16 Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son tautología, contradicciones y contingencias.

a) $\sim(\sim p) \leftrightarrow \sim[\sim(\sim p)]$

b) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \rightarrow p)$

c) $(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow \sim(p \wedge r) \wedge \sim(q \wedge r)$

d) $[(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow s)]$

17 Dadas las proposiciones siguientes:

a) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$

b) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$

c) $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

indicar cuál o cuáles es una contradicción

18 ¿Algunos de las siguientes proposiciones es una tautología?

a) $\sim[\sim(p \vee q) \rightarrow \sim q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

b) $\sim[(\sim p) \leftrightarrow q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

c) $\sim[(p \wedge q) \vee (p \wedge (\sim p \vee q))] \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$

19 Determinar cuál de las siguientes proposiciones son tautologías, contingencias o contradictorias.

a) $[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \rightarrow r)] \rightarrow (p \vee \sim q)$

b) $\{p \vee (q \rightarrow \sim r)] \wedge [(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q]$

c) $[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow [r \wedge \sim(p \vee \sim q)]$

d) $\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$

(20) ¿Cuál de las siguientes esquemas no señalan una tautología?

a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

c) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ d) $(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

(21) Determinar la validez del esquema: $\sim[\sim(\sim p \wedge \sim q) \longrightarrow \sim(p \vee q)] \longleftrightarrow [\sim(\sim p \vee q)]$

(22) ¿Cuál de las siguientes proposiciones es una tautología.

a) $(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)] \longleftrightarrow (p \longrightarrow \sim q)$

b) $\sim[\sim(p \vee q) \longrightarrow \sim q] \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)$ c) $\sim(\sim p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)$

(23) Construir la tabla de verdad y determinar cuáles son tautología, contradicción o contingencia.

a) $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow [(r \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)]$

b) $(p \longrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \sim[p \longleftrightarrow r]$

(24) ¿Cuáles de las siguientes proposiciones es una tautología?

a) $\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \longleftrightarrow (p \longrightarrow \sim q)$

b) $\sim(\sim p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)$ c) $[(p \vee \sim q) \wedge q] \longrightarrow p$

d) $\sim[(\sim p \vee q) \longrightarrow q] \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)$

e) $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \longleftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee r)]$

(25) Simplificar las siguientes proposiciones:

a) $\{[(\sim q) \longrightarrow (\sim q)] \longrightarrow [(\sim p) \longrightarrow (\sim q)]\} \longrightarrow \sim(p \wedge q)$

b) $[(p \longrightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \longrightarrow p)$ c) $\sim\{[\sim(\sim p \wedge q) \vee \sim q] \longrightarrow [\sim(p \vee \sim q)]\}$

d) $(\sim p \vee \sim q) \wedge [\sim p \wedge (q \rightarrow p)]$ e) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)] \vee (p \wedge r)$

f) $\sim[\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee p$ g) $[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \wedge p$

(26) Simplificar las siguientes proposiciones:

a) $[(\sim p \wedge q) \longrightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

b) $[(\sim q \longrightarrow \sim p) \longrightarrow (\sim p \longrightarrow \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$

c) $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$

d) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee p$

e) $t \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \wedge [\sim p \wedge (q \Rightarrow p)]$

f) $[\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow p)] \wedge (p \vee q)$

g) $[(p \wedge \sim q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge r] \vee p$

(27) Si $\sim[(\sim p \vee q) \vee (r \longrightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]$ es verdadera, hallar los valores de verdad de p, q y r.

(28) Si la proposición $(p \longrightarrow \sim q) \longrightarrow (r \longrightarrow \sim s)$ es falsa. Hallar el valor de verdad de las proposiciones p,q,r,s.

(29) Si la proposición $\sim(p \wedge q) \wedge (q \longleftrightarrow p)$ es verdadera; entonces hallar los valores de verdad de p y q respectivamente.

(30) Si la proposición $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \longrightarrow s)$ es falsa. Hallar el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares.

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

b) $(\sim r \vee q) \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

c) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$

(31) Determinar el valor de verdad de las proposiciones p y q si se conoce la información siguiente:

a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ es verdadero

b) $\sim(p \wedge q)$ es verdadero

(32) Determinar el valor de verdad de las proposiciones p y q si se conoce que el valor de verdad del siguiente esquema $[\sim(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim(p \longrightarrow \sim q)] \Rightarrow (p \longrightarrow q)$ es falso.

(33) Si p y q son verdaderos ¿para qué valores de r, el esquema siguiente es verdadero? $(r \longrightarrow p) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow r)$

(34) Si se tiene los siguientes datos: p es verdadero; $r \Rightarrow \sim p$ es verdadero y $w \Rightarrow t$ es verdadero, hallar el valor de verdad de $\sim r$ y de t.

(35) Si el esquema $(p \wedge q) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$ tiene valor de verdad, falso, halla el valor de verdad de los esquemas.

a) $[(p \wedge q) \vee (q \vee \sim r)] \Leftrightarrow (p \vee \sim r)$ b) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim r \wedge q)$

c) $\sim(q \vee r) \vee (p \vee q)$

(36) Si la proposición $(\sim p \wedge q) \Rightarrow [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa, hallar el valor veritativo de:

a) $\sim[(\sim p \vee \sim q) \longrightarrow (r \vee \sim t)]$ b) $(\sim q \vee \sim r) \vee [\sim t \vee (p \vee q)]$

c) $(\sim p \Rightarrow t) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$

(37) Si la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ es falsa y se tiene los esquemas moleculares.

a) $\sim(q \vee r) \vee (p \vee q)$ b) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim r \wedge q)$

c) $[(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow (p \vee \sim r)$

Cuáles son falsas

(38) Si la proposición $(\sim p \wedge q) \Rightarrow [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa. Hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

a) $(\sim p \Rightarrow t) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ b) $(\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$

c) $\sim[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim t)]$

(39) Sean p,q,r,s,t proposiciones. Si $[(\sim p) \wedge q] \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \vee t]$ es una proposición falsa, hallar el valor de verdad de: $\sim(q \vee \sim r) \vee \sim[t \Rightarrow (\sim q \wedge p)]$

(40) Si la proposición $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim s \vee r)$ es falsa, de las proposiciones siguientes, cuales son verdaderas?

a) $\sim[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$ b) $\sim[(\sim p \wedge q) \wedge (\sim r \vee r)] \wedge s$

c) $[(p \vee \sim q) \wedge p] \vee (\sim q)$

(41) Admitiendo la falsedad de: $\sim\{p \vee q \vee r] \Rightarrow \sim(M \wedge N \wedge t)$. Hallar el valor de verdad de:

a) $[(p \wedge M) \Rightarrow (q \vee N)] \wedge t$ b) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow M)] \Leftrightarrow (r \Rightarrow t)$

c) $\{[(p \vee q) \longrightarrow (r \wedge s)] \wedge (\sim q \longrightarrow \sim t)\} \Rightarrow [(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow M)]$



42 Admitiendo la falsedad de la proposición: $(p \wedge q) \Rightarrow [(r \vee s) \Rightarrow (t \Rightarrow w)]$ hallar el valor de verdad de:

a) $(p \Rightarrow w) \wedge (r \Rightarrow q)$

b) $\sim(p \wedge t) \Rightarrow (\sim s \Rightarrow p)$

c) $\{[q \Rightarrow \sim(t \vee r)] \wedge [p \Rightarrow \sim(r \wedge w)]\} \Leftrightarrow [(p \Rightarrow \sim q) \vee \sim t]$

43 Si la proposición $(\sim p \wedge q) \longrightarrow [(p \wedge q) \vee t]$ es falsa. Hallar el valor de verdad de:

a) $\sim[(\sim p \vee \sim q) \longrightarrow (r \vee \sim t)]$

b) $(\sim p \longrightarrow t) \longrightarrow (\sim q \longrightarrow r)$

c) $(\sim q \vee \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$

44 Si $q \longrightarrow t$ y $p \wedge q$ son falsas. Determinar el valor de verdad de:

a) $(\sim p \vee t) \vee \sim q$

b) $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$

c) $[(p \longrightarrow q) \wedge \sim(q \wedge t)] \longleftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge \sim t)]$

45 Si la proposición $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim s \vee r)$ es falsa, Determinar el valor de verdad de:

a) $\sim[(p \longrightarrow q) \longrightarrow r]$

b) $\sim(\sim p \wedge q) \wedge [(\sim r \vee r) \wedge s]$

c) $[(p \vee \sim q) \wedge p] \vee \sim q$

46 Si la proposición $(\sim p \longrightarrow q) \vee (s \longrightarrow \sim r)$ es falsa. Determinar el valor de verdad de las proposiciones.

a) $\sim(p \vee q) \vee \sim q$

b) $\sim[(p \vee q) \wedge \sim q] \longrightarrow \sim(p \longrightarrow q)$

c) $[(r \longrightarrow q) \wedge q] \longleftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

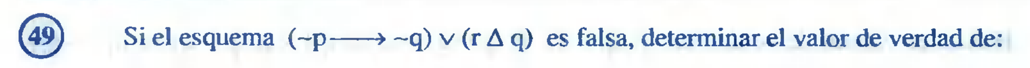
47 Si la proposición $(q \wedge \sim p) \longrightarrow [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa, calcular el valor de verdad de la proposición: $(\sim p \longrightarrow t) \longrightarrow (\sim q \longrightarrow r)$

48 Sabiendo que $(q \longrightarrow t)$ y $(p \wedge q)$ son falsas, determinar el valor de verdad de:

a) $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$

b) $(\sim p \vee t) \vee s$

c) $[\sim p \vee (q \wedge \sim t)] \longleftrightarrow [(p \longrightarrow q) \wedge \sim(q \wedge t)]$



49 Si el esquema $(\sim p \longrightarrow \sim q) \vee (r \,\Delta\, q)$ es falsa, determinar el valor de verdad de:

a) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (r \,\Delta \sim q)$ b) $\sim q \longrightarrow [(p \longleftrightarrow q) \wedge r]$

50 Si $[(r \longrightarrow s) \wedge t] \longrightarrow (p \vee q)$ es falsa determinar el valor de verdad de:

a) $\sim r \vee (\sim s \longrightarrow \sim t)$ b) $(p \longleftrightarrow t) \vee [q \wedge (\sim r \vee s)]$

c) $[(r \,\Delta\, s) \vee (t \longrightarrow s)] \wedge (p \wedge r)$

51 Dado los esquemas proposicionales denotados por A, B y C respectivamente:

A: $p \longleftrightarrow \sim(q \wedge r)$; B: $\sim p \,\Delta \sim r$; C: $\sim(p \wedge q) \vee \sim r$

Determinar si $A \longrightarrow C$ y $B \longrightarrow C$ son implicaciones (tautología)

52 Si la proposición $(\sim p \wedge q) \Rightarrow [(p \wedge q) \vee t]$ es falsa. Hallar el valor de verdad de:

a) $\sim[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim t)]$ b) $(\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$

53 Si el esquema indicado: $[(\sim p \vee q) \vee [(p \rightarrow q) \wedge t]] \wedge q$ es verdadero, indicar el valor de verdad de:

a) $p \Rightarrow q$ b) $t \vee q$ c) $\sim q \vee (t \vee p)$

54 Si la proposición $[(p \vee t) \rightarrow (p \wedge q)]$ es falsa, dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) $[(\sim p \wedge \sim t) \wedge (q \rightarrow r)]$ b) $[(p \vee t) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)]$ c) $[(p \vee t) \,\Delta\, (p \wedge q)]$

55 Si la siguiente proposición lógica $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow (r \vee s))]$ es verdadera, hallar los valores de verdad de p, r, q, s.

56 De la falsedad de la proposición: $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ determinar el valor de verdad de los esquemas moleculares.

a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$ b) $(\sim r \vee q) \leftrightarrow (\sim q \vee r) \wedge s$ c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q) \wedge \sim q$

57 De la falsedad de $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow \sim s)$, hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) $\sim(\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p$ b) $\sim(\sim r \wedge s) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ c) $p \Rightarrow \sim(q \Rightarrow \sim(s \Rightarrow r))$

58) Hallar los valores de verdad de: p, q, r si: $[(\sim p \vee q) \vee (r \Rightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \Rightarrow (q \wedge \sim p)]$ es falso.

59) Si la proposición: $[\sim(p \Rightarrow q) \wedge (\sim r \vee s)] \Rightarrow r$ es falso, halle los valores de verdad de: p, q y r.

60) Si: $\sim p \vee [(p \wedge r) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q)]$ es falso, halle el valor de verdad de: $[(p \Rightarrow q) \vee r] \Leftrightarrow (p \wedge r)$

61) Si $[\sim(p \Rightarrow q) \wedge \sim r] \Rightarrow [p \wedge (q \vee r)]$ es falsa, halle los valores de verdad de: p, q y r.

62) De la proposición compuesta: $\sim[(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s] \Rightarrow (\sim p \vee s)$ se conoce que es falso, señale el valor de: p, q, r y s.

63) Si la proposición "s" es falsa, y el siguiente esquema: $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow [(q \Rightarrow r) \vee (p \wedge \sim s)]$ es una tautología, hallar los valores de verdad de p, q y r.

64) Demostrar si las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes:

a) $\sim p \wedge q \equiv \sim(p \vee q)$

b) $p \wedge \sim p \equiv \sim[(p \vee p) \Leftrightarrow p]$

c) $\sim q \vee p \equiv \sim(\sim p \wedge q) \equiv \sim p \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$

d) $\sim[(p \wedge q) \wedge \sim r] \equiv \sim[(\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \vee r)]$

e) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q \equiv \sim(\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

65) Probar que son equivalentes $p \Rightarrow q$ y $(\sim p) \vee q$

66) Probar la equivalencia de las siguientes proposiciones:

a) $\sim(p \Rightarrow q)$ y $p \wedge (\sim q)$

b) $\sim(p \wedge q)$ y $(\sim p) \vee (\sim q)$

c) $\sim(p \vee q)$ y $(\sim p) \wedge \sim q$

d) $p \Rightarrow q$ y $\sim q \Rightarrow \sim p$

e) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ y $p \Rightarrow r$

67) Demostrar que las bicondicionales siguientes son equivalencias lógicas.

a) $(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$

b) $(p \longleftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

c) $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$

d) $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$

e) $\sim(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$



68 Determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados considerando como universo a los números reales.

a) $\{\forall x \in R / x^3 = x\}$

b) $\{\exists\, x \in R / 2x = x\}$

c) $\{\exists x \in R / x^2 + 3x - 2 = 0\}$

d) $\{\exists x \in R / x^2 - 2x + 5 = 0\}$

e) $\{\forall\, x \in R / 2x + 3x = 5x\}$

f) $\{\exists x \in R / 2x^2 + x = 15\}$

g) $\{\forall\, x \in R / x - 3 < x\}$

h) $\{\forall\, x \in R / x + 3 < 6\}$

i) $\{\exists\, x \in R / x + 3 < 6\}$

j) $\{\forall x \in R / x^2 - 10 \leq 8\}$



69 Evaluar $\sim\{\sim(p \vee \sim q)\} \Leftrightarrow \{\sim[(r \wedge p) \longrightarrow (p \wedge \sim p)]\}$ sí: $p: \{\forall x \in R / x^0 = 1\}$; $q: \{\exists x \in Q / 3x^2 = x - 5\}$; $r: \{\exists\ x \in Z / x^2 - 2x - 1 = -1,\ \sqrt{4} = x\}$

70 Sean las proposiciones $p: \{\forall x \in Q / \frac{1}{2} + x > 0\}$, q: $\{\exists\ x \in I / x + 0 = \pi\}$, $r: \{\forall x \in R / x^2 + 1 = 0\}$. Hallar el valor de $[(p \longrightarrow q) \wedge r] \Leftrightarrow \sim q$

71 De las siguientes proposiciones, hallar el valor de verdad.

a) $(\forall\, x \in R / |x| = x) \wedge (\exists\, x \in R / x + 1 \nleq x)$

b) $(\sim\exists\, x \in R /\ x^2 \neq x) \vee (\sim \forall\, x \in z / x + 1 \neq x - 1)$

c) $(\sim \forall\, x \in N / |x| \neq 0) \longrightarrow (\sim\exists\, x \in Q / |x| \neq 0)$

72 ¿Cuáles son equivalencias lógicas?

a) $\sim(q \longrightarrow \sim p) \Leftrightarrow (q \vee p)$

b) $[(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge q]$

c) $\sim(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

73 Sea U el conjunto universal y p, q, r las proposiciones:

$U = \{-10, -9, \ldots, 80\}$, $U \subset Z$ (números enteros) ; $p: \{\forall x \in U,\ \exists\, y \in U / x - x^2 < -2y\}$

q: $\{\exists\, y \in U, \forall\, x \in U / x - 5y < 3x - y\}$; $r: \{\forall z \in U, \exists y \in U, \exists x \in U / x^2 + y^2 < z^2\}$

Evaluar $(\sim p \vee r) \longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$

(74) Determinar el valor de cada uno de las siguientes proposiciones:

a) $\{\exists x \in Z / x^2 = x\}$ b) $\{\forall\, x \in Z / x - 7 < x\}$

c) $\{\exists\, x \in Z / x + 5 = 5\}$ d) $\{\forall\, x \in Z / x + 8 > x\}$

e) $\{\forall x \in Z / x^2 \geq x\}$ f) $\{\forall\, x \in Z / x + 1 = x\}$

(75) Si $U = \{x \in R / 2 < x < 10\}$ y $p: (\forall x \in U)(\exists y \in U)(\forall z \in U) / - x - y > - < z^2$, $q: (\forall x \in U)(\exists z \in U)(\exists z \in U)(x + y < z^2)$, hallar el valor de verdad de $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge q)$

(76) Si $U = \{1,2,3,...,99\}$, determinar cuáles de los siguientes proposiciones son verdaderos.

a) $\{\exists\, x \in U / x + 5 = 2x\}$ b) $\{\forall\, x \in U / x + 1 \in U\}$

c) $\{\exists\, x \in U / |x - 8| > 5\}$ d) $\{\forall\, x \in U / 20 - 3x \not< 0\}$

(77) Hallar el valor de verdad de la fórmula. $[(p \vee q) \longrightarrow (\sim r \vee \sim w)] \Leftrightarrow (q \longrightarrow r)$ sí

$p: \exists\; x \in Q / x + 3 = \sqrt{2} + 3$, q: $\exists\, x \in I / x + 0 = \pi$

r: $\forall\, x \in N / x + 2.5 = 5$, $w: \exists\; x \in Q / x + 0 = \sqrt{2}$

(78) Hallar el valor de verdad de: $[(\sim p \wedge \sim q) \longrightarrow (r \vee q)] \wedge [\sim(p \wedge q) \longleftrightarrow r]$

Sí $U = \{x \in Z / -100 \leq x \leq 100\}$; p: $(\forall\, x \in U)(\exists\, y \in U)(\forall\, z \in U)(x + y - z > 30)$

q: $(\forall\, x \in U)(\forall\, y \in U)(\forall\, z \in U)(2x + z - 4y < 800)$

r: $(\exists\, x \in U)(\forall\, y \in U)(\exists\, z \in U)(5x \leq z - y + 50)$

(79) Si x puede tomar cualquier valor 1,2,3, demostrar mediante contraejemplos la falsedad de las siguientes proposiciones.

a) $\{(\forall x) / x^2 = x\}$ b) $\{\exists\, x / x = 2x\}$

c) $\{\forall x / x + 2 = 5\}$ d) $\{\forall x / x + 1 > 3\}$

e) $\sim\{\exists x / x^2 = 4\}$ f) $\{\exists x / x > 4\}$

80 Si x, y pueden ser cualquiera de los números 1 y 2, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(\exists x)(\forall y)(x \leq y + 2)$ b) $(\forall x)(\exists y)(x + y < 5)$

c) $((\forall x)(\forall y)(x^2 + y^2 < 1)$ d) $(\forall x)(\exists y)(x^2 \geq y)$

e) $(\exists x)(\exists y)(x + y = 2)$

81 Cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si $U = \{1,2,3\}$ es el universo y sí $x, y \in U$

a) $\exists x, \exists y / x^2 < y + 1$ b) $\forall x, \exists y / x^2 + y^2 < 12$

c) $\forall x, \forall y / x^2 + y^2 < 12$ d) $\exists x, \exists y, \forall z / x^2 + y^2 \leq 2z^2$

e) $\exists x, \forall y, \exists z / x^2 + y^2 \leq 2z^2, z \in U$

82 Determinar el valor lógico de las siguientes proposiciones.

a) $\exists x \in R / x^2 + 1 = 0$ b) $\exists x \in R / x^2 = 1$

c) $(\forall x \in R)(\forall y \in R) / x + y = 7$ d) $(\forall x \in z)(\exists y \in z / x - y > 0)$

83 Sean $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,4,5,8\}$ ¿cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

a) $\exists x, y \in A / x + y > z, \ \forall z \in B$ b) $\sim[\forall x \in A, \exists y \in B / x > y]$

c) $\forall x \in B, \exists y \in A / x - y \in A$ d) $\forall r \in A, \forall y \in B / x + y < 10$

84 Si $A = \{0,1,2,3,4\}$ hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $P: \exists x \in A / 2x + 1 = 5$ b) $q: \forall n \in Z^+ / 3n$ es divisible por 3

c) $r: \exists x \in R / x^2 + 7 < 0$ d) $S: \forall x \in Q / x^2 \geq x$


85 Si $M = \{-1,1,2,7\}$ cual es el valor de verdad, de las siguientes proposiciones:

a) $\forall\, x \in M,\ \exists\, y \in M \,/\, x^2 \geq y$

b) $\exists\, x \in M, \forall\, y \in M \,/\, x \geq y^2 \geq 0$

c) $\exists\, x \in M, \exists\, y \in M \,/\, (x \leq 3) \vee (y^2 > 2)$


86 Dadas las proposiciones P: $\exists\, x \in Z/(4x+2)(3x-7)=0$; q: $\forall\, x \in Z \,/\, (x^2 > 0) \vee (x-1) < 0$, r: $\exists\, x \in N \,/\, (4x+2)(3x-7) = 0$, señale el valor de verdad de p, q, r y además $[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)] \Rightarrow r$

87 Sea $M = \{0,1,2,3\}$ el dominio de x e y, señale el valor de verdad de:

a) $\forall\, x, \exists\, y \,/\, (x^2 - y^2 < 10) \vee (x^2 < y+1)$

b) $\forall\, x, \forall\, y \,/\, (x^2 - y^2 > -10) \wedge (x^2 > y+1)$

88 Negar las siguientes proposiciones para el conjunto z.

a) $\forall\, x \in z \,/\, x + 1 > x$

b) $\exists\, x \in z \,/\, x^2 + 1 = 0$

c) $\exists\, x \in z \,/\, x^2 = x$

d) $\forall\, x \in z \,/\, x^2 - 1 > 0$


89 Negar las siguientes proposiciones.

a) $\exists\, x \,/\, x + 7 < y$

b) $(\forall\, x \,/\, p(x)) \wedge (\exists\, y \,/\, q(y))$

c) $(\exists\, x \,/\, p(x)) \longrightarrow (\forall y \,/\, \sim p(y))$

d) $(p \vee \sim q) \longrightarrow (p \wedge \sim r)$

e) $\exists\, x \,/\, q(x)$_ $5x + 7 < 10$

f) $\exists\, x \,/\, 5x + 8 < 4$


90 Negar los enunciados del ejercicio 56)

91 Negar los siguientes enunciados.

a) $\{\exists\, x \,/\, p(x) \vee \sim q(x)\}$

b) $\{\forall\, x \,/\, p(x) \longrightarrow q(x)\}$

c) $\{\forall\, x, \exists\, y \,/\, x.y = 0\}$

d) $\{(\forall\, x)(p(x)) \wedge (\exists\, x)(q(x))\}$

e) $\{(\exists\, y)(p(x)) \longrightarrow (\forall\, x)(\sim q(x))\}$

f) $\{(\exists\, x)(\sim p(x)) \vee (\forall\, x)(q(x))\}$

g) $\{\exists x, \exists y / p(x) \vee \sim q(y)\}$

h) $\{\forall x, \exists y / p(x,y) \longrightarrow q(y)\}$

i) $\{\exists x, \exists y / p(x) \wedge q(y)\}$

j) $\{\forall x, \exists u, \forall z / p(x,y,z)\}$

92 Negar cada una de las proposiciones siguientes:

a) $\{\exists x / x + 7 > 2\}$

b) $\{\forall x / x + 0 = x\}$

c) $\{\forall x / x^2 + 7 > x^2 + 3\}$

d) $\{\exists x / \sim(x \neq x)\}$

e) $\sim\{\forall x / x^2 = x\}$

f) $\sim\{\exists x / x + 3 = x\}$

93 Negar las proposiciones del ejercicio 52) y verificar que estas negaciones resultan ser proposiciones verdaderas.

94 Si x puede ser cualquier número natural, determine el valor de verdad de las proposiciones:

$p: (\forall x)(x^2 > x) \Rightarrow (\forall x)(x < 3x)$; $q: (\forall x)(x^2 > x) \Rightarrow (\exists x)(x = x)$

r: $(\exists x)(x + 3 = 5) \Leftrightarrow (\forall x)(x + 1 \geq x)$

95 Verifique la validez de los siguientes argumentos:

a)
$p \wedge q$
$\sim p \longrightarrow q$
$\therefore \sim q$

b)
$(p \wedge q) \longrightarrow (r \wedge s)$
$(\sim q) \vee (\sim s)$
$\therefore (\sim p) \vee (\sim q)$

c)
$p \wedge (p \vee q)$
$p \vee q \longrightarrow r$
$r \longrightarrow s$
$\therefore s$

d)
$r \longrightarrow \sim q$
$p \longrightarrow q$
$\sim r \longrightarrow s$
$\therefore p \longrightarrow s$

96 Demostrar, por la tabla de valores o por el método abreviado si los esquemas representan o no reglas de inferencia válidas.

a)
$p \longrightarrow q$
$\sim q \longrightarrow \sim r$
$\therefore p \longleftrightarrow r$

b)
$p \longrightarrow \sim q$
$p \vee (\sim q)$
$\therefore \sim q$

c) $p \longrightarrow q$
$q \longrightarrow p)$
$\therefore\ p \longleftrightarrow q$

d) $(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s)$
$p \vee r$
$\therefore\ q \vee s$

e) $p \longleftrightarrow q$
$r \vee q$
$\sim r$
$\therefore\ q$

f) $q \longrightarrow p$
$q \longrightarrow (r \vee s)$
$\sim(\sim q \vee \sim s)$
$\therefore\ r \longrightarrow (s \longrightarrow p)$

g) $p \longrightarrow q$
$q \longrightarrow r$
$r \longrightarrow s$
$\therefore\ p \longrightarrow s$

h) $(p \vee \sim q)$
$r \longrightarrow \sim p$
$s \longleftrightarrow p$
$\therefore\ p \vee (q \longrightarrow \sim r)$

i) $q \longrightarrow (\sim p \vee r)$
$r \vee s$
$\sim p \longleftrightarrow r$
$\therefore\ q \vee r$

j) p
$(\sim p \vee \sim s) \longrightarrow (\sim p \wedge \sim r)$
$\therefore\ s$

(97) Determinar los circuitos lógicos que representan a los siguientes esquemas moleculares.

a) $(\sim p) \longleftrightarrow (p \longrightarrow \sim q)$

b) $p \wedge (q \vee \sim p)$

c) $\sim[p \vee \longrightarrow \sim(q \vee r)]$

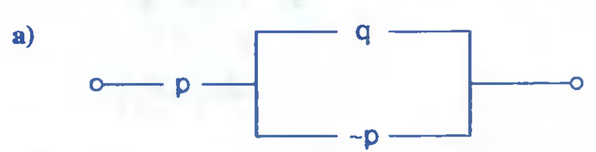
d) $\{[(r \vee q) \wedge p] \vee \sim r\} \wedge q$

e) $(p \vee q) \longrightarrow [(\sim p \vee q) \longrightarrow (p \wedge q)]$

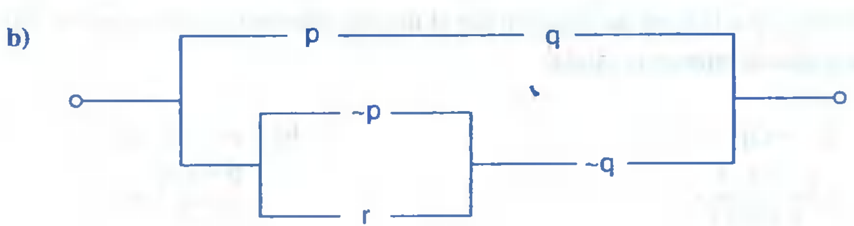
f) $[(p \longrightarrow q) \vee p] \wedge [(p \longrightarrow q) \vee \sim p]$

(98) Representar mediante funciones boolianas los siguientes argumentos:

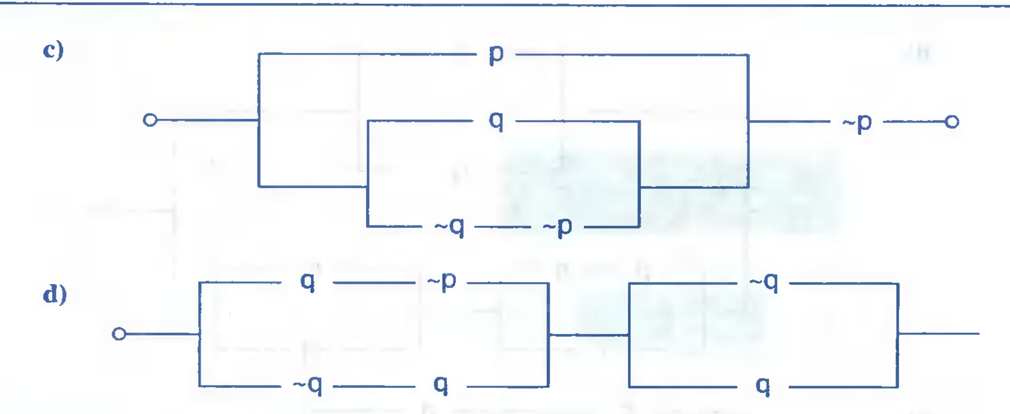
a)



b)



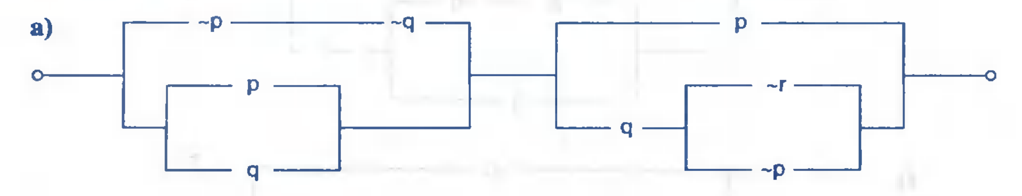
c)



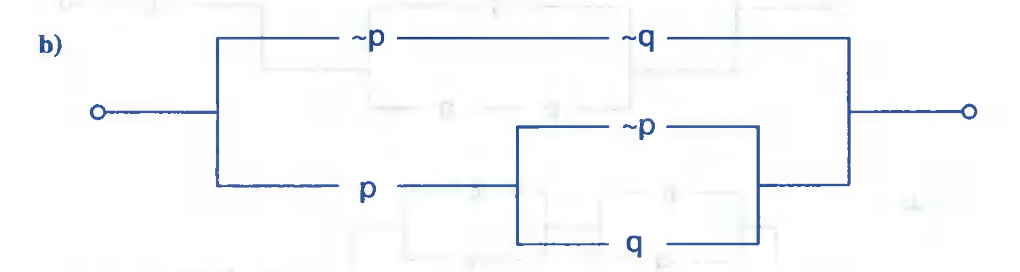
d)

99 Determinar la menor expresión que representa al circuito dado:

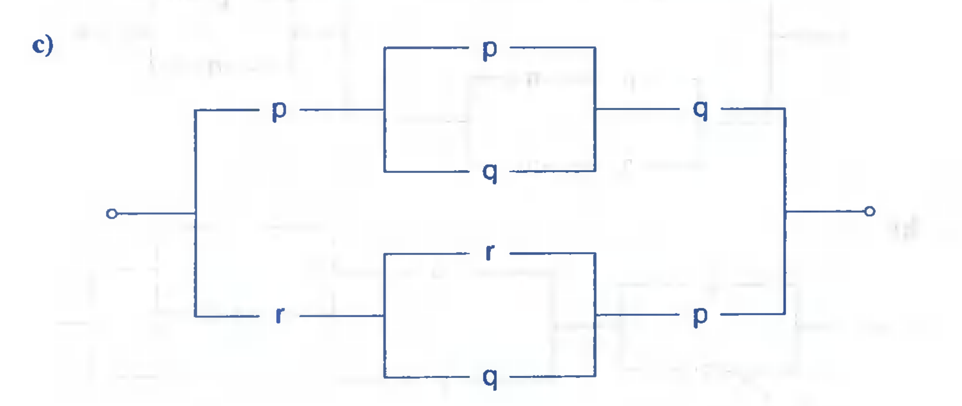
a)

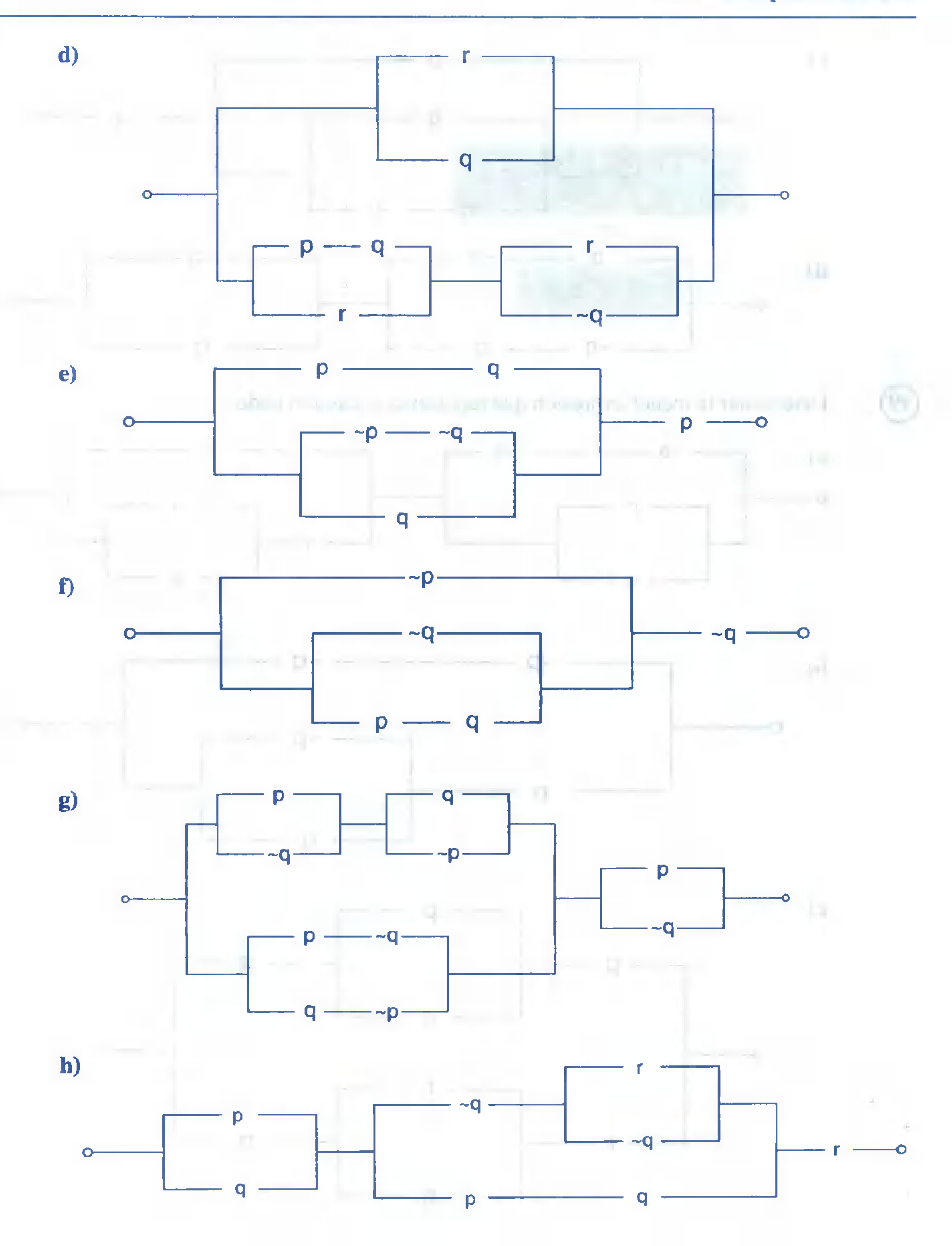


b)

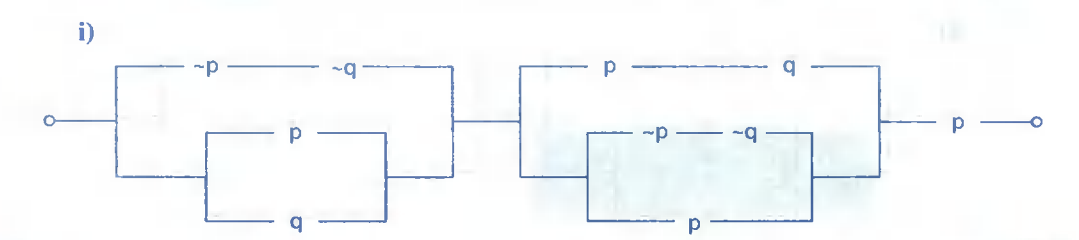


c)




d)
r
q
p q
r
r
~q
e)
p q
~p ~q
q
p
f)
~p
~q
p q
~q
g)
p
~q
q
~p
p ~q
q ~p
p
~q
h)
p
q
~q
r
~q
p q
r

i)

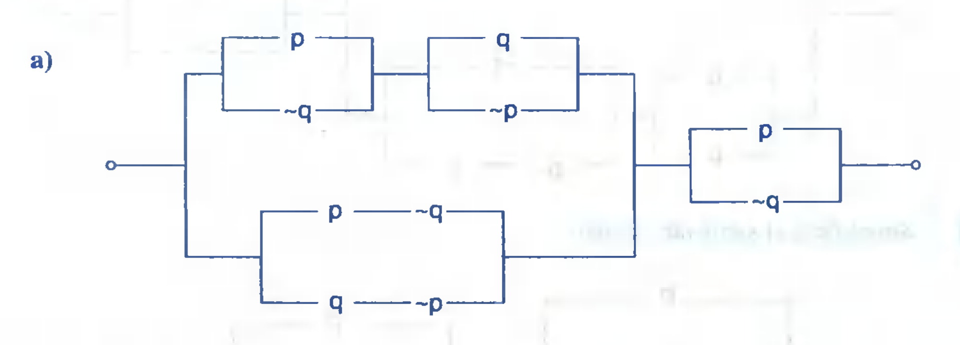


100 Determinarlos circuitos lógicos que representan a los siguientes esquemas moleculares.

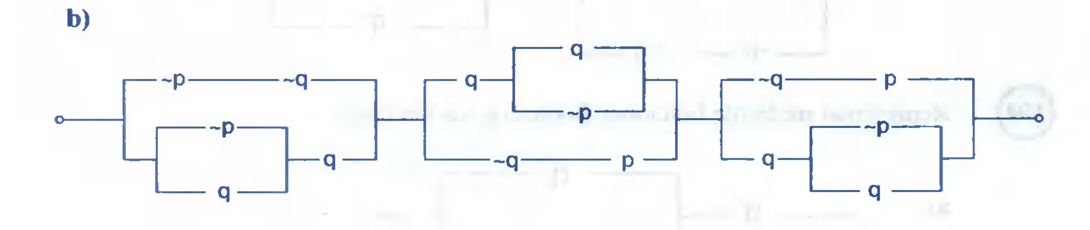
a) $\{[(r \vee q) \wedge p] \vee \sim r\} \wedge q$ **b)** $\sim[(p \vee \sim q) \vee (p \wedge \sim r) \vee \sim(r \vee q \vee \sim p)]$

101 Simplificar los siguientes circuitos lógicos:

a)



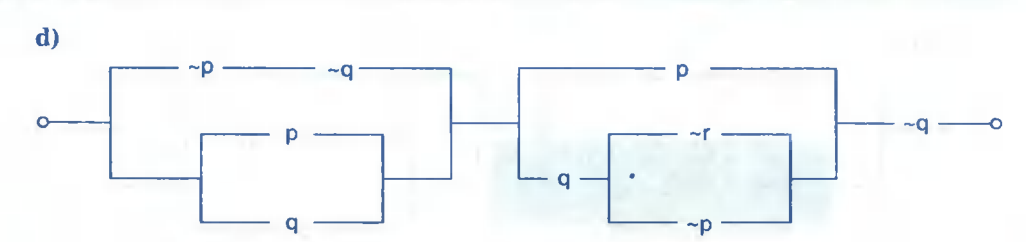
b)



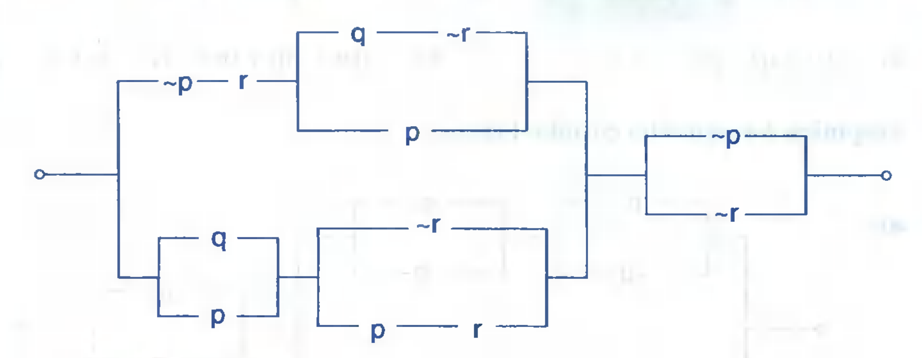
c)

~p ~q p q p q ~p ~q p ~p

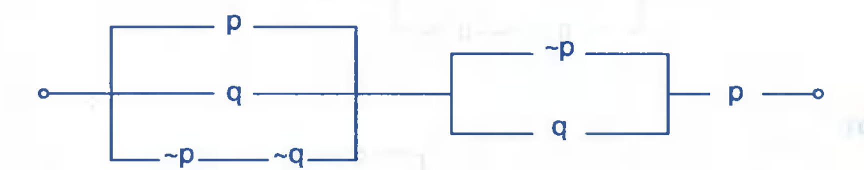
d)



102 Dado el circuito lógico, hallar el circuito lógico más simple posible.

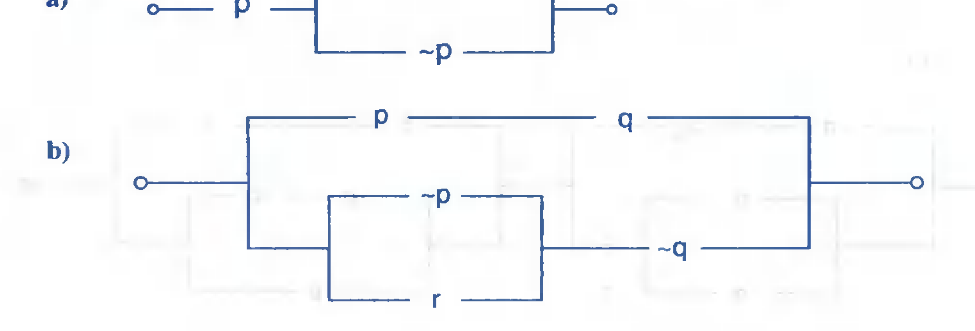


103 Simplificar el siguiente circuito



104 Representar mediante funciones Booleanas los circuitos.

a)



b)

CAPITULO II

TEORÍA DE CONJUNTOS

2.1. DEFINICIÓN.-

Un concepto se dice que es primitivo, cuando dicho concepto se acepta sin definición, en la matemática son conceptos primitivos, el de conjunto, de elemento y la relación de pertenencia, sin embargo debido a su gran importancia en todas las ramas de la matemática aceptaremos las siguientes definiciones.

2.2. DEFINICIÓN.-

Entenderemos por conjunto a toda agrupación, colección o reunión de objetos de cualquier especie siempre que exista un criterio preciso que nos permita que un objeto pertenece o no a dicha agrupación. Los objetos que "pertenecen a un conjunto" se llama elementos del conjunto.

NOTACIÓN.- A los conjuntos representaremos con las letras mayúsculas A.B.C,...., y a sus elementos representaremos con letras minúsculas a,b,x,....

2.3. RELACIÓN DE PERTENENCIA ($\in$).-

La relación de pertenencia es el símbolo que relaciona a los elementos de un conjunto con el mismo conjunto:

$$(\text{elemento}) \in (\text{conjunto})$$

Si un objeto x es un elemento o pertenece al conjunto A, escribiremos

$$x \in A$$

y leeremos "x pertenece al conjunto A".

Si x no es un elemento del conjunto A. escribiremos

$$x \notin A$$

y leeremos "x no pertenece al conjunto A"

OBSERVACIÓN.-

① Sea A el conjunto formado por los nombres de los siguientes países, Perú, Chile, Ecuador, Colombia, podemos escribir entonces

Perú ∈ A

Colombia ∈ A

Argentina ∉ A

Brasil ∉ A

Al conjunto A expresaremos en cerrando entre llaves a sus elementos:

A = {Perú, Chile, Ecuador, Colombia}

② Sea A el conjunto formado por las letras n, m, p, q, t del mismo modo podemos escribir:

p ∈ A

q∈ A

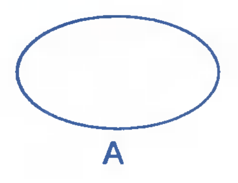
w ∉ A

z ∉ A

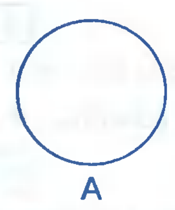
Al conjunto A expresaremos encerrando entre llaves a sus elementos: A={n,m,p,q,t}

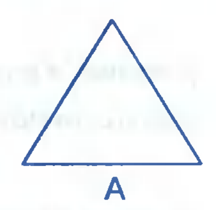
2.4. DIAGRAMAS DE VENN – EULER.-

Para facilitar nuestra compresión intuitiva de los conjuntos, los representaremos gráficamente mediante los llamados "Diagramas de VENN", estos diagramas son curvas cerradas de la forma.





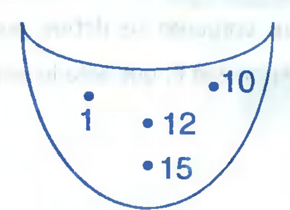




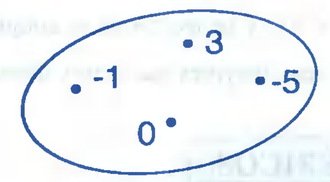
En el interior de estás curvas cerradas, representaremos mediante puntos a los elementos del conjunto.

Ejemplo.-

① Sea A={1,10,12,15}. El conjunto A será representado mediante el diagrama de Venn



② Sea A = {-1,3,-5,0}, su diagrama de VENN es



2.5. DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS.-

Un conjunto está bien determinado, cuando se conoce con exactitud que elementos pertenecen o no al conjunto. Cuando se conoce qué elementos pertenece o no al conjunto se dice que el conjunto está bien definido, un conjunto se puede definir por extensión y por comprensión.



POR EXTENSIÓN.- Cuando se nombra cada uno de los elementos del conjunto, se dice que el conjunto ha sido definido por extensión.

Ejemplo.-

① El conjunto A de los números naturales que son mayores o iguales a cero y menor o igual a 10 queda definido por extensión si escribimos.

A= {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

(2) El conjunto A de los números naturales que dividen simultáneamente a los números 8 y 12, queda definido por extensión si escribimos $A = \{1,2,4\}$

Observe que $3 \notin A$, pues 3 no divide a 8 a pesar que 3 divide a 12.

POR COMPRENSIÓN.-Un conjunto se define por comprensión, cuando se da una propiedad P, que sólo lo satisfacen los elementos del conjunto.

Ejemplos.-

(1) $A = \{x/x \text{ es una vocal}\}$ y se lee: "A es el conjunto de las x tal que x es una vocal"

(2) $A = \{x \in N / 0 < x < 9\}$ y se lee "A es el conjunto de las x perteneciente a los naturales tal que los x sean mayores que cero y menores que 9.

2.6. CONJUNTOS NUMÉRICOS.-

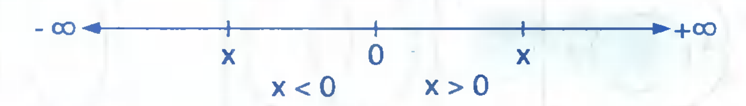
En matemática los conjuntos numéricos característicos que se estudian son: Los números naturales, los números enteros, los números racionales, los números irracionales, los números reales y los números complejos.

- El conjunto de los números naturales $N = \{1,2,3,...\}$
- El conjunto de los números enteros $Z = \{..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
- El conjunto de los números racionales $Q = \{\frac{m}{n} / m \in Z \quad \wedge \quad n \in Z, \quad n \neq 0\}$
- El conjunto de los números irracionales $I = \{x/x$ tiene representación decimal infinita no periódica$\}$
- El conjunto de los números reales $R = \{x/x$ es racional o x es irracional$\}$
- El conjunto de los números complejos $C = \{a + bi / a \in R \quad \wedge \quad b \in R, \quad i = \sqrt{-1}\}$

OBSERVACIÓN.- El conjunto de los números reales, es la reunión de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, es decir:

$$R = N \cup Z \cup Q \cup I$$

A los números reales se representa mediante una recta que se denomina recta real.



2.7. CONJUNTO FINITO.-

Es el conjunto que está formado por un número limitado de elementos.

Ejemplos.- (1) $A = \{x/x \text{ es una vocal}\}$

(2) $B = \{x \in N / 5 \leq x < 12\}$

(3) $C = \{x/x \text{ es un día de la semana}\}$

2.8. CONJUNTO INFINITO.-

Es el conjunto que está formado por un número infinito de elementos.

Ejemplo.- (1) $A = \{x \in Z / x \text{ es impar}\}$

(2) $B = \{x/x \text{ es número natural}\}$

2.9. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS.-

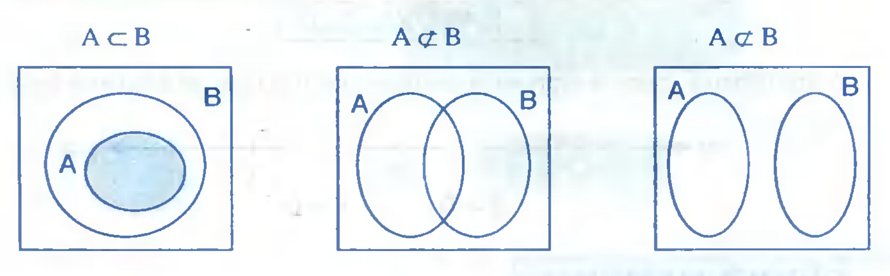
a) INCLUSIÓN DE CONJUNTOS.- (Sub – conjuntos)

Se dice que el conjunto A es un subconjunto B, o que A está contenido en B, o que A es parte de B, si todo elementos de A pertenece al conjunto B se escribe $A \subset B$ y se lee "A está incluido en B, o A está contenido en B o A es parte de B".

Está definición en forma sinbólica se expresa.

$$A \subset B \Leftrightarrow \{\forall x \in A, x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

De la misma definición se sigue que es suficiente que exista al menos un elemento del conjunto A que no sea elemento de B para que A no sea subconjunto de B, en este caso se denota: $A \not\subset B$



Ejemplo.- Si $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ entonces $A \subset B$. En efecto se observa por simple inspección que todo elemento de A es también elemento de B.

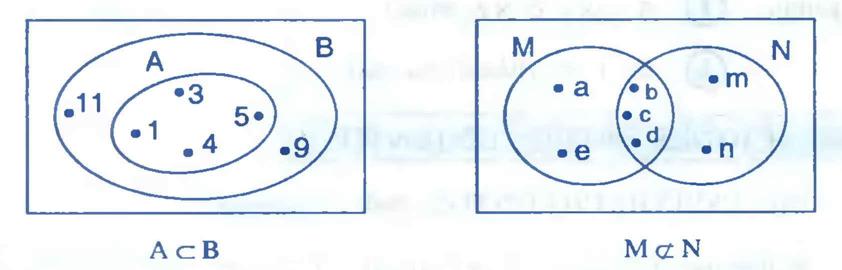
Ejemplo.- Consideremos los siguientes conjuntos: $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,3,5,7,9,11\}$

$M = \{a,b,c,d,e\}$, $N = \{b,c,d,m,n\}$. Podemos afirmar que:

i) $A \subset B$, por que todos los elementos de A están en B.

ii) $M \not\subset N$, por que algunos elementos de M no están en N.

Estos representaremos usando diagrama de VENN – EULER.



$A \subset B$ $\qquad$ $M \not\subset N$

b) SUBCONJUNTO PROPIO.- Diremos que A es un subconjunto propio de B, o parte de B, si se verifica $A \subset B$ y además existe algún $x \in B$ tal que $x \notin A$.

Ejemplo.- El conjunto $A = \{2,4,6\}$ es un subconjunto propio de $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ puesto que $A \subset B$ además $1 \in B$, $3 \in B$, $5 \in B$ tal que $1 \notin A$, $3 \notin A$, $5 \notin A$.

c) PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN.-

(1) $\phi \subset A$, $\forall$ conjunto A, donde ϕ es el conjunto vacío.

(2) $A \subset A$, (propiedad reflexiva)

(3) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (propiedad transitiva)

(4) Sí $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$ (propiedad antisimétrica)

Demostración

(1) 1° $\forall x,\ x \in \phi \Rightarrow x \in A$, def. C

2° $p \longrightarrow q$ (es una tautología)

F F o V

3° $\phi \subset A$, por definición de C

(2) 1° Suponiendo que $\forall x,\ x \in A$ hipótesis

2° Como $p \longrightarrow p$ es una tautología

3° Sí $x \in A \Rightarrow x \in A$ es verdadero por la parte 2°

4° $A \subset A$ de 3° y def. C

(3) 1° $A \subset B$ hipótesis

2° $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° def. C

3° $B \subset C$,hipótesis

4° $\forall x,\ x \in B \Rightarrow x \in C$, 3° def. C

5° Por la Ley Transitiva $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Rightarrow p \longrightarrow r$ (ley del silogismo hipotético)

6° $\forall x \in A \Rightarrow x \in C$, de 2°, 4° y 5°

7° $A \subset C$, 6° def. C

2.10. IGUALDAD DE CONJUNTOS.-

DEFINICIÓN.- Dos conjuntos A y B se dice que son iguales sí y sólo sí $A \subset B$ y $B \subset A$. En forma simbólica se tiene:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Se lee "El conjunto A es igual al conjunto B, si y sólo si A está contenido en B y B está contenido en A"

2.11. PROPIEDADES DE LA IGUALDAD DE CONJUNTOS.-

① $A = A, \ \forall A$ (reflexiva) ② $A = B \Rightarrow B = A$ (simétrica)

③ $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$ (Transitiva)

Demostración

① 1° $A \subset A$ por reflexividad de inclusión.

2° $A = A$ 1° y definición de igualdad.

② 1° $A = B$ por hipótesis

2° $A \subset B \wedge B \subset A$ 1° def. de =

3° $B \subset A \wedge A \subset B$ 2° y la ley conmutativa

4° $B = A$ 3° y definición de =

③ 1° $A = B$ por hipótesis

2° $A \subset B \wedge B \subset A$, 1° definición de =

3° $B = C$ por hipótesis

4° $B \subset C \wedge C \subset B$ 3° definición de =

5° $A \subset B \wedge B \subset C$ 2° y 4° y transitiva de inclusión.

6° $A \subset C$ 5° transitiva inclusión.

7° $C \subset B \wedge B \subset A$, 4° y 3° y transitiva.

8° $C \subset A$, 7° transitiva inclusión.

9° $A = C$, 6° y 8° definición de =.

2.12. CONJUNTOS ESPECIALES.-

① **CONJUNTO VACÍO (Nulo).-** Es el conjunto que no tiene elementos y se representa simbólicamente por la letra griega ϕ (phi) y se define como:

$$\phi = \{x / x \neq x\}$$

y se lee: para cualquier x tal que, x es diferente de x, no se satisface para algún elemento

Ejemplo.-

① $A = \{x \in R / x^2 + 1 = 0\}$ es un conjunto vacío, pues la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíz real, luego $A = \phi$.

② $A = \{x \in N / 2 < x < 3\}$ es un conjunto vacío, porque no existe un número natural que sea mayor que 2 y menor que 3, luego $A = \phi$.

③ $A = \{x \in Z / 15x^2 - 11x + 2 = 0\}$ es un conjunto vacío, pues al resolver la ecuación $15x^2 - 11x + 2 = 0$ se obtiene $x = \frac{2}{5}, x = \frac{1}{3}$ que son números enteros por lo tanto $A = \phi$.

OBSERVACIÓN.- El conjunto vacío ϕ está incluido en todo conjunto es decir $\phi \subset A$, $\forall A$

② **CONJUNTO UNIVERSAL.-** Es el conjunto tomado como base o conjunto fijo, para la determinación de otros conjuntos y se denota por U. También al conjunto universal se le llama el universo.

Los conjuntos más importantes en matemática son los conjuntos numéricos: R, N, Z, Q, I, C en ese orden.

Ejemplos.-

① El conjunto universal $U = \{x \in Z / -3 \leq x < 9\}$ es universo de los conjuntos $A = \{-3,0,2,5\}$, $B = \{-2,1,3,7\}$, $C = \{-1,0,2,5,8\}$ porque todos los elementos de los conjuntos A, B y C pertenecen al conjunto U.

② Dado el conjunto universal $U = \{x \in Z^+ / x \leq 40\}$. Determinar los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x / x^2 \leq 28\}$

Solución

Tabulando el conjunto universal U = {1,2,3,4,5,...,39,40}

$1 \in A$ puesto que $1 \leq 28$

$2 \in A$ puesto que $2^2 \leq 28$

$3 \in A$ puesto que $3^2 = 9 \leq 28$

$4 \in A$ puesto que $4^2 = 16 \leq 28$

$5 \in A$ puesto que $5^2 = 25 \leq 28$

$6 \notin A$ puesto que $6^2 = 36 \not\leq 28$

por lo tanto el conjunto A está dado por: A = {1,2,3,4,5}

b) $B = \{x + 2 / x < 9\}$

Solución

Para $x = 1 \Rightarrow x + 2 = 3 \in B$

$x = 2 \Rightarrow x + 2 = 4 \in B$

$x = 3 \Rightarrow x + 2 = 5 \in B$

$x = 4 \Rightarrow x + 2 = 6 \in B$

$x = 5 \Rightarrow x + 2 = 7 \in B$

$x = 6 \Rightarrow x + 2 = 8 \in B$

$x = 7 \Rightarrow x + 2 = 9 \notin B$

Luego se tiene: B = {3,4,5,6,7,8}

③ **CONJUNTO UNITARIO.-** Se llama conjunto unitario, al conjunto que consiste de un sólo elemento.

Ejemplos.- **a)** $A = \{x \in R \,/\, x + 2 = 0\} = \{-2\}$

b) $A = \{x \in N \,/\, 1 < x < 3\} = \{2\}$

c) $A = \{x \in Z^+ \,/\, x^2 - 1 = 0\} = \{1\}$

④ CONJUNTOS COMPARABLES.- Dos conjuntos A y B son comparables sí: $A \subset B \vee B \subset A$.

Los conjuntos A y B no serán comparables sí: $A \not\subset B \wedge B \not\subset A$.

Ejemplos.-

a) Si $A = \{a,e,i\}$ y $B = \{a,e,i,o,u\}$ de donde A es comparable con B para que $A \subset B$.

b) Si $M = \{1,5,7,8\}$ y $N = \{2,5,6,8,9\}$ los conjuntos M y N no son comparables pues $M \not\subset N \wedge N \not\subset M$.

⑤ CONJUNTOS DISJUNTOS.- Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, se dice que A y B son disjuntos.

En forma simbólica se expresa: A es disjunto con B si y solo si, $\nexists\, x/x \in A \wedge x \in B$

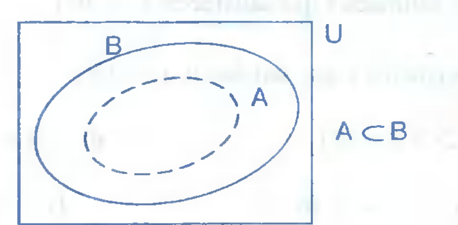
Ejemplos.- **a)** Los conjuntos $A = \{1,3,5,7\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$ son disjuntos.

b) Los conjuntos $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{r,s,t,u\}$ son disjuntos.

2.13. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS CONJUNTOS.-

Para mostrar a los elementos de los conjuntos o visualizar relaciones entre estos, existen los llamados diagrama de VENN – EULER que son regiones del plano limitados por líneas geométricas.

Al conjunto universal se acostumbra representar por medio de un rectángulo.



2.14. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

① Determinar por extensión los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x \in N / x \leq 3 \vee 5 < x < 7\}$ **b)** $B = \{x^2 - 1 / x \in Z \wedge -1 \leq x \leq 3\}$

c) $C = \{3 - 5x / x \in Z, -2 \leq x < 5 \wedge 3 < x \leq 8\}$

d) $D = \{x \in Z / x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0\}$ **e)** $E = \{x \in N / 6x^3 - 31x^2 + 3x + 10 = 0\}$

f) $F = \{x \in Z / x^2 > 0 \wedge x^2 < 20\}$ **g)** $E = \{x / x^3 - 19x^2 - 36x + 1440 = 0\}$

h) $H = \{x \in R / (x^2 + 16x)^2 = 17^2\}$

② Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x / x^3 - 7x + 6 = 0\}$ **b)** $B = \{x / 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$

c) $C = \{x / 2x^3 - 3x^2 - 7x + 3 = 0\}$ **d)** $D = \{x / 2x^3 + x^2 + x - 1 = 0\}$

e) $E = \{x / x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 5 = 0\}$

f) $F = \{x / x^4 + 2x^3 - 31x^2 - 32x + 60 = 0\}$

③ Hallar el conjunto solución del siguiente conjunto: $A = \{x / 64x^3 + 24x^2 - 6x - 1 = 0\}$

Rpta. $A = \{-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$

④ Determinar los elementos de cada conjunto.

a) A = {números naturales x que satisfacen $x^2 = 16$ }

b) B = {números enteros x que satisfacen $x^2 = 16$ }

c) $C = \{x \in N / 2x + 3 = 15\}$ **d)** $D = \{x \in Q / (2x - 1)(x - 2) = 0\}$

e) $E = \{x \in Z / x^2 - 2x - 3 = 0\}$ **f)** $G = \{x \in N / 5 < x < 12\}$

5 Determinar por comprensión el siguiente conjunto T = {-1,1,2}

Rpta. $T=\{x\in Z / x^3-2x^2-x+2=0\}$

6 Determinar por comprensión los siguientes conjuntos:

a) A= {-7,-3,1,5,9,...} **b)** $B=\{-1,\frac{1}{2},2,\frac{7}{2},5,...\}$

c) C = {2,3,6,11,18,...}

7 Si A = {2,3,5,7}, diga cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas ó falsas.

a) $5\in A$ **b)** $3\subset A$ **c)** $\{7\}\subset A$ **d)** $\{3,5\}\in A$

8 Si $A=\{x\in N / x\le 2 \lor x=7\}$, hallar todos los subconjuntos propios de A.

9 Dados los siguientes conjuntos $A=\{7x+2 / x\in Z\}$, $B=\{7x-26 / x\in Z\}$, $C=\{4x+1 / x\in Z\}$ y $D=\{2x+1 / x\in Z\}$, analizar y justificar debidamente su conclusión en los siguientes casos.

a) A = B **b)** C = D

Rpta. **a)** A = B **b)** $C\neq D$

10 Sean U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A = {2,4,6,8}, B = {1,3,5,7,9} y C = {3,4,5}. Al hallar un subconjunto x de U tal que $x\subset C$, $x\not\subset A$, $x\not\subset B$, cuántas soluciones existe.

Rpta. tres

11 Cuántos de los siguientes conjuntos son vacíos:

a) $A=\{x\in U / x\neq U\}$ **b)** $B=\{x\in Z / x^3=3\}$

c) $C=\{x\in R / \frac{1}{x}\in R\}$ **d)** $D=\{x\in Q / x^2-x=2\}$

e) $E=\{x\in N / x^2+1=0\}$ **f)** $F=\{x\in Z / 12x^3+4x^2-3x-1=0\}$

(12) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es el conjunto vacío?

a) {x / x es un entero par y $x^2 = 9$ } **b)** $\{x \in Z^+ / x < 0\}$

c) $\{x \in Z / x + 18 = 18\}$ **d)** $\{x \in Z / 6x^2 + 5x - 4 = 0\}$

e) $\{x \in Z^+ / x^2 - 3x - 4 = 0\}$ **f)** $\{x \in N / x \neq x\}$

(13) Dado A y B determinar si A = B en los siguientes ejercicios.

a) $A = \{-2,0,2\}$ y $B = \{x \in Z / x^3 - 4x = 0\}$

b) $A = \{1,-2\}$ y $B = \{x \in Z / (x-1)(x+2)(2x-3) = 0\}$

c) $A = \{x \in Z^+ / 1 \leq x \leq 6\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

(14) Si A, B y C son conjuntos tal que $A \subset B \subset C$. ¿Cuál es la relación entre $C - B$ y $C - A$?

Rpta. $C - B \subset C - A$

(15) Si $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{2,4,5\}$, $D = \{2,4\}$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) $A \subset B$ **b)** $A \subset D$ **c)** $C \subset A$

d) $B \subset A$ **e)** $B \subset C$ **f)** $D \subset B$

g) $A \subset A$ **h)** $B \neq C$ **i)** $D \subset A$

(16) Sean $A = \{x / x^3 - 17x^2 + 71x - 55 = 0\}$; $B = \{x / x^4 - 15x^3 + 37x^2 - 16x + 110 = 0\}$ es $A \subset B$

(17) Sea U={1,2,3,4,5,9} el conjunto universal, si $A = \{x^2 / x \in U\}$ hallar A y A' por extensión

(18) Sea $A = \{\frac{x+1}{2} / x \in Z / 0 < x < 4\}$ y $B = \{\frac{x^2-1}{2} / x \in Z,\ -2 \leq x \leq 3\}$ determinar cual de las relaciones se cumplen $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$.

(19) Sí $A = \{x \in N / x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0\}$ y $B = \{\frac{x+1}{2} / x \in Z,\ -4 < x \leq 3\}$. Determinar cual de las relaciones se cumplen $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$.



Sea $U = \{x \in N / 1 \leq x \leq 5\}$, $A = \{x \in U / x \text{ es par}\}$, $B = \{x \in U / x \text{ es impar}\}$ y $C = \{x \in A / x = 2^n, n \in U\} \cup \{12\}$. Si $D = \{x \in U / x \in U \Rightarrow x \in B\} \cap \{x \in A / x \text{ es múltiplo de } 4\}$ ¿cuántos subconjuntos de C contienen a D?

2.15. OPERACIONES CON CONJUNTOS.-

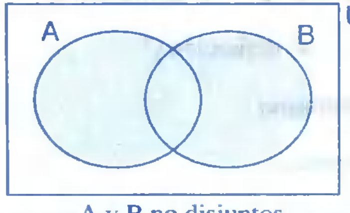
(1) UNIÓN DE CONJUNTOS.- La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todas los elementos de A y todos los elementos B.

A la unión de los conjuntos A y B denotaremos por: $A \cup B$ y se lee "A unión B".

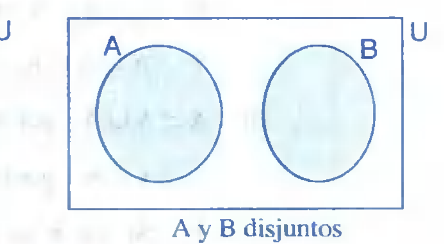
En forma simbólica:

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

La parte sombreada de los siguientes diagramas es una representación gráfica de la unión.



A y B no disjuntos



A y B disjuntos

Donde U representa al conjunto universal y la parte sombreada representa la unión $A \cup B$

Ejemplo.-

(1) Sí $A = \{x \in N / 1 < x < 6\}$ y $B = \{x \in N / 3 < x < 8\}$. Calcular $A \cup B$.

Solución

Calculando los elementos de cada conjunto A y B: $A = \{2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$

$A \cup B = \{2,4,5\} \cup \{4,5,6,7\} = \{2,4,5,6,7\}$

(2) Sí $A = \{x \in N / x \text{ es par}\}$ y $B = \{x \in N / x \text{ es impar}\}$ entonces $A \cup B = \{x \in N / x \text{ es par} \vee x \text{ es impar}\} = N$

a) PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS.-

(1) $A \cup A = A$

(2) $A \cup \phi = A$

(3) $A \cup U = U$

(4) $A \cup B = B \cup A$

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(6) $A \subset A \cup B$

(7) $B \subset A \cup B$

(8) $A \subset C \wedge B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$

Demostración

(1) **i)** $A \cup A \subset A$ por demostrar

1° $x \in A \cup A$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in A$, 1° definición de U

3° por la tautología de $P \vee P \Leftrightarrow P$ podemos afirmar que: $x \in A \vee x \in A \Rightarrow x \in A$

4° $x \in A \cup A \Rightarrow x \in A$, 3° definición U

5° $A \cup A \subset A$, 4° definición C

ii) $A \subset A \cup A$ por demostrar

1° $x \in A$, por hipótesis

2° Sí $x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in A)$, por tautología $p \Leftrightarrow p \vee p$

3° $x \in A \Rightarrow x \in A \cup A$, 2° definición U

4° $A \subset A \cup A$, 3° definición C

5° de i), ii) se tiene $A \cup A = A$ definición de =

(2) **i)** $A \cup \phi \subset A$ por demostrar.

1° $x \in A \cup \phi$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in \phi$, 1° definición U

3° $x \in A$, 2° definición de ϕ

4° $x \in A \cup \phi \Rightarrow x \in A$, 1° y 3°

5° $A \cup \phi \subset A$, 4° definición C

ii) $A \subset A \cup \phi$ por demostrar

1° $x \in A$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in \phi$, 1° definición ϕ

3° $x \in A \cup \phi$, 2° definición U

4° $x \in A \Rightarrow x \in A \cup \phi$, 1° y 4°

5° $A \subset A \cup \phi$ 4° definición U

$\therefore$ de i) y ii) se concluye que $A \cup \phi = A$ definición de =

(3) i) $A \cup U \subset U$ por demostrar

1° $x \in A \cup U$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in U$, 1° definición U

3° $x \in U$, 2° y definición de U

4° $x \in A \cup U \Rightarrow x \in U$, 1° y 3°

5° $A \cup U \subset A$, 4° definición C

ii) $U \subset A \cup U$ por demostrar

1° $x \in U$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in U$, 1° definición U

3° $x \in A \cup U$, 2° definición U

4° $x \in U \Rightarrow x \in A \cup U$, 1° y 3°

5° $U \subset A \cup U$, 4° definición C

6° $\therefore A \cup U = U$, por i), ii) definición =

(4) i) $A \cup B \subset B \cup A$ por demostrar

1° $x \in A \cup B$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in B$, 1° definición U

3° $x \in B \vee x \in A$, 2° y tautología $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

4° $x \in B \cup A$, 3° definición U

5° $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B \cup A$, 1° y 4°

6° $A \cup B \subset B \cup A$, 5° definición C

ii) $B \cup A \subset A \cup B$ por demostrar

1° $x \in B \cup A$, por hipótesis

2° $x \in B \vee x \in A$, 1° definición U

3° $x \in A \vee x \in B$, 2° y tautología $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

4° $x \in A \cup B$, 3° definición U

5° $x \in B \cup A \Rightarrow x \in A \cup B$, 1° y 4°

6° $B \cup A \subset A \cup B$, 5° definición C

$\therefore$ $A \cup B = BU$ de i), ii) y definición =

(5) **i)** $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ por demostrar

1° $x \in (A \cup B) \cup C$, por hipótesis

2° $x \in A \cup B \vee x \in C$ 1° definición U

3° $x \in A \vee x \in B \vee x \in C$, 2° definición U

4° $x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$, 3° propiedad asociativa

5° $x \in A \vee x \in B \cup C$, 4° definición U

6° $x \in A \cup (B \cup C)$, 5° definición U

7° $x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$, 1° y 6°

8° $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$, 7° definición C

ii) $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$, por demostrar

1° $x \in A \cup (B \cup C)$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in B \cup C$, 1° definición U

3° $x \in A \vee x \in B \vee x \in C$, 2° definición U

4° $(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$, 3° definición propiedad asociativa

5° $x \in A \cup B \vee x \in C$, 4° definición U

6° $x \in (A \cup B) \cup C$, 5° definición U

7° $x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$, 1° y 6°

8° $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$, 7° definición C

$\therefore$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, de i), ii) definición =

(6) 1° Sea $x \in A$ por hipótesis

2° Pero $p \longrightarrow (p \vee q)$, $\forall q$ es una tautología

3° $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$, 1° y 2°

4° $A \subset A \cup B$, 3° definición C

(7) 1° $x \in B$ por hipótesis

2° Pero $p \longrightarrow (p \vee q)$, $\forall q$ es una tautología

3° $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$, 1° y 2°

4° $B \subset A \cup B$, 3° definición C

(8) 1° $A \subset C$, por Hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in C$, 1° y definición C

3° $B \subset C$, por hipótesis

4° $x \in B \Rightarrow x \in C$, 3° definición C

5° $(x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in C$, 2° y 4°

6° $x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$, 5° definición U

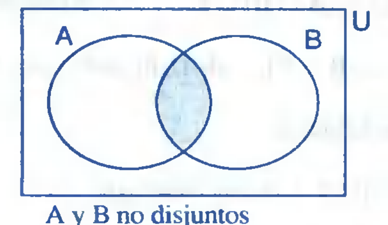
7° $A \cup B \subset C$, 6° definición C

(2) INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS.- La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos comunes al conjunto A y al conjunto B, y que denotado por "$A \cap B$" y se lee "A intersección B".

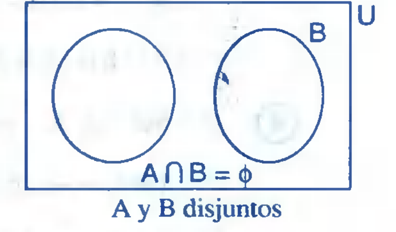
En forma simbólica:

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$$

La parte sombreada de las siguientes diagramas es una representación gráfica de la intersección.



A y B no disjuntos



A y B disjuntos

Ejemplo.- Sí $A = \{x \in Z / -2 < x < 6\}$ y $B = \{x \in Z / 0 < x < 10\}$. Hallar $A \cap B$

Solución

Calculando los elementos de los conjuntos A y B.

$A = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $\therefore$ $A \cap B = \{1,2,3,4,5\}$

a) PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS.-

(1) $A \cap A = A$

(2) $A \cap \phi = \phi$

(3) $A \cap B = B \cap A$

(4) $A \cap U = A$

(5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(6) $A \cap B \subset A$

(7) $A \cap B \subset B$

(8) $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C, \forall C$

(9) Sí $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow A \cap B \subset C \cap D$

(10) Si $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

(11) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(12) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración

(1) i) $A \cap A \subset A$ por demostrar

1° $x \in A \cap A$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in A$, 1° definición $\cap$

3° Por tautología $p \wedge p \Leftrightarrow p$ se tiene

4° $x \in A$, de 2° y 3°

5° $x \in A \cap A \Rightarrow x \in A$, 1° y 4°

6° $A \cap A \subset A$, 5° y definición $\subset$

ii) $A \subset A \cap A$ por demostrar

1° $x \in A$, por hipótesis

2° por tautología $p \Leftrightarrow p \wedge p$

3° $x \in A \wedge x \in A$, 1° y 2°

4° $x \in A \cap A$, 3° definición $\cap$

5° $x \in A \Rightarrow x \in A \cap A$, 1° y 4°

6° $A \subset A \cap A$, 5° definición $\subset$

$\therefore$ $A \cap A = A$, i), ii) definición =

(2) i) $A \cap \phi \subset \phi$ por demostrar

1° $x \in A \cap \phi$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in \phi$, 1° definición $\cap$

3° $x \in \phi$, 2° y $p \wedge q \Leftrightarrow q$

4° $x \in A \cap \phi \Rightarrow x \in \phi$, 1° y 3°

5° $A \cap \phi \subset \phi$, 4° definición $\subset$

ii) $\phi \subset A \cap \phi$

como ϕ es subconjunto de cualquier conjunto entonces $\phi \subset A \cap \phi$.

Luego por lo tanto: $A \cap \phi = \phi$ de i), ii) y definición =

(3) **i)** $A \cap B \subset B \cap A$, por demostrar

1° $x \in A \cap B$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in B$, 1° definición $\cap$

3° $x \in B \wedge x \in A$, 2° y $p \wedge q \equiv q \wedge p$

4° $x \in B \cap A$, 3° definición $\cap$

5° $x \in A \cap B \Rightarrow x \in B \cap A$, 1° y 4°

6° $A \cap B \subset B \cap A$, 5° definición $\subset$

ii) $B \cap A \subset A \cap B$, por demostrar

1° $x \in B \cap A$, por hipótesis

2° $x \in B \wedge x \in A$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \in B$, 2° y $p \wedge q \equiv q \wedge p$

4° $x \in A \cap B$, 3° definición $\cap$

5° $x \in B \cap A \Rightarrow x \in A \cap B$, 1° y 4°

6° $B \cap A \subset A \cap B$, 5° definición $\subset$

$\therefore$ $A \cap B = B \cap A$, i), ii) definición =

(4) **i)** $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ por demostrar

1° $x \in (A \cap B) \cap C$, por hipótesis

2° $x \in A \cap B \wedge x \in C$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$, 2° y definición $\cap$

4° $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$, 3° propiedad asociativa.

5° $x \in A \wedge x \in (B \cap C)$, 4° definición $\cap$

6° $x \in A \cap (B \cap C)$, 5° definición $\cap$

7° $x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$, 1° y 6°

8° $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$, 7° definición $\subset$

ii) $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$, por demostrar

1° $x \in A \cap (B \cap C)$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in B \cap C$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$, 2° definición $\cap$

4° $(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$, 3° propiedad asociativa

5° $x \in A \cap B \wedge x \in C$, 4° definición $\cap$

6° $x \in (A \cap B) \cap C$, 5° definición $\cap$

7° $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$, 1° y 6°

8° $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$, 7° definición $\subset$

$\therefore (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, i), ii) definición =

(5) 1° $x \in A \cap B$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in B$, 1° definición $\cap$

3° por tautología $p \wedge q \Leftrightarrow p$ se tiene.

4° $x \in A$, 2° y 3°

5° $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$. 1° y 4°

6° $A \cap B \subset A$, 5° definición $\subset$

(6) 1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° definición $\subset$

3° $x \in A \cap C$, por hipótesis

4° $x \in A \wedge x \in C$, 3° definición $\cap$

5° $x \in B \wedge x \in C$, 2° y 4°

6° $x \in B \cap C$, 5° definición $\cap$

7° $x \in A \cap C \Rightarrow x \in B \cap C$, 3° y 6°

8° $A \cap C \subset B \cap C$, 7° definición $\subset$

7 1° $A \subset C$, por hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in C$, 1° definición $\subset$

3° $B \subset D$, por hipótesis

4° $x \in B \Rightarrow x \in D$, 3° definición $\subset$

5° $x \in A \wedge x \in B$, 2° y 4°

6° $x \in A \cap B$, 5° definición $\cap$

7° $x \in C \wedge x \in D$, 2° y 4°

8° $x \in C \cap D$, 7° definición $\cap$

9° $x \in A \cap B \Rightarrow x \in C \cap D$, 6° y 8°

10° $A \cap B \subset C \cap D$, 9° definición $\subset$

8 i) $A \cap B \subset A$ por demostrar

1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° definición $\subset$

3° $x \in A \cap B$, por hipótesis

4° $x \in A \wedge x \in B$, 4° definición $\cap$

5° $x \in A$, 2° y 4° y $p \wedge q \Rightarrow p$ es tautología

6° $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, 3° y 5°

7° $A \cap B \subset A$, 6° definición $\subset$

ii) $A \subset A \cap B$ por demostrar

1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in A$, por hipótesis

3° $x \in A \wedge x \in B$, 2° y 1° definición $\subset$

4° $x \in A \cap B$, 3° definición $\cap$

5° $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$, 1° y 4°

6° $A \subset A \cap B$, 5° definición $\subset$

$\therefore$ $A \cap B = A$ por i), ii) y definición =

9 i) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, por demostrar

1° $x \in A \cup (B \cap C)$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in (B \cap C)$, 1° definición $\cup$

3° $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$, 2° definición $\cap$

4° $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$, 3° y $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5° $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$, 4° definición $\cup$

6° $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 5° definición $\cap$

7° $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 1° y 6°

8° $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 7° definición $\subset$

ii) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, por demostrar

1° $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, por hipótesis

2° $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$, 1° definición $\cap$

3° $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$, 2° definición $\cup$

4° $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$, 3° $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5° $x \in A \vee x \in (B \cap C)$, 4° definición $\cap$

6° $x \in A \cup (B \cap C)$, 5° definición $\cup$

7° $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$, 1° y 6°

8° $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, 7° definición $\subset$

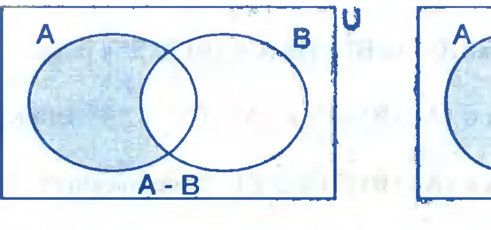
$\therefore$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, i), ii) definición =

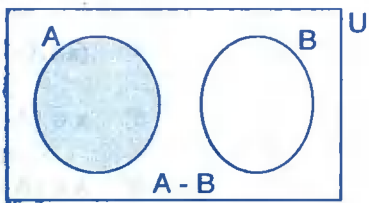
③ LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS.-

La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero que no pertenecen a B, a la diferencia de los conjuntos A y B denotaremos por "A – B" y se lee "A menos B". En forma Simbólica:

$$A - B = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}$$

La parte sombreada de los diagramas siguientes es una representación gráfica de la diferencia.





A y B no disjuntos A y B disjuntos

Ejemplo.- Sí $A = \{2,3,4,5,9\}$ y $B = \{1,2,5,7,8\}$. La diferencia es $A - B = \{3,4,9\}$

a) PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS.-

① $A - A = \phi$

② $A - \phi = A$

③ $\phi - A = \phi$

④ $A - B \neq B - A$

⑤ $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

⑥ $(A - B) \subset A$

⑦ Si $A \subset B \Rightarrow A - C \subset B - C, \ \forall C$

⑧ $A \subset B \Rightarrow A - B = \phi$

⑨ $B \cap (A - B) = \phi$

⑩ Si A y B disjuntos $\Rightarrow A \cap B = \phi$

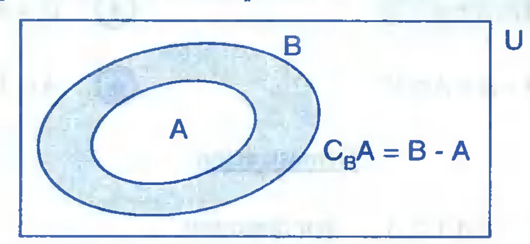
<u>**Demostración**</u>

Dejamos como ejercicio para el lector.

④ COMPLEMENTACIÓN DE UN CONJUNTO.-

a) **DEFINICIÓN.-** Si A es un subconjunto de B, al complemento del conjunto A con respecto al conjunto B se define como la diferencia B – A y que denotaremos por $\boxed{C_B A = B - A}$.

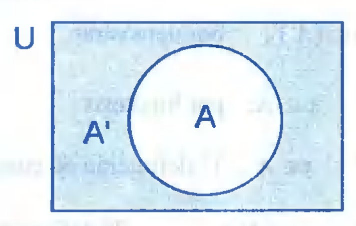
La parte sombreada del siguiente diagrama es la representación gráfica del complemento de A con respecto a B.



b) **DEFINICIÓN.-** El complemento de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen al conjunto A, es decir: la diferencia del conjunto universal U y el conjunto A, al complemento del conjunto A denotaremos por: A' o C_A y se lee "complemento de A"

En forma simbólica $\boxed{A' = C_A = U - A = \{x / x \in U \ \wedge \ x \notin A\}}$

La parte sombreada del siguiente diagrama es una representación gráfica del complemento de A.



Ejemplo.- Sí $U = \{x \in N / x \leq 10\}$ y $A = \{x \in N / 5 \leq x \leq 8\}$. Hallar A'

Solución

Calculando los elementos se tiene: $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{5,6,7\}$

$A' = U - A = \{1,2,3,4,8,910\}$

Ejemplo.- Sí U = N, A = {x ∈ N / x es par}, entonces:

$$A' = U - A = \{x \in N \,/\, x \text{ es impar}\}$$

c) PROPIEDADES DEL COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO.-

① $(A')' = A$ ② $A \cup A' = U$

③ $A \cap A' = \phi$ ④ $U' = \phi$

⑤ $A - B = A \cap B'$ ⑥ $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

Demostración

① i) $(A')' \subset A$, por demostrar

1° $x \in (A')'$, por hipótesis

2° $x \notin A'$, 1° definición de complemento

3° $x \in A$, 2° definición de complemento

4° $x \in (A')' \Rightarrow x \in A$, 1° y 3°

5° $(A')' \subset A$, 4° definición ⊂

ii) $A \subset (A')'$, por demostrar

1° $x \in A$, por hipótesis

2° $x \notin A'$, 1° definición de complemento

3° $x \in (A')'$, 2° definición de complemento

4° $x \in A \Rightarrow x \in (A')'$, 1° y 3°

5° $A \subset (A')'$, 4° definición ⊂

$\therefore \ (A')' = A$ de i), ii) y definición =

(2) i) $A \cup A' \subset U$, por demostrar

1° $x \in A \cup A'$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \in A'$, 1° definición $\cup$

3° $x \in A \vee x \notin A$, 2° definición de complemento.

4° $x \in U$, 3° definición de conjunto universal U

5° $x \in A \cup A' \Rightarrow x \in U$, 1° y 4°

6° $A \cup A' \subset U$, 5° definición $\subset$

ii) $U \subset A \cup A'$, por demostrar

1° $x \in U$, por hipótesis

2° $x \in A \vee x \notin A$, 1° definición U

3° $x \in A \vee x \in A'$, 2° definición del complemento

4° $x \in A \cup A'$, 3° definición U

5° $x \in U \Rightarrow x \in A \cup A'$, 1° y 4°

6° $U \subset A \cup A'$, 5° definición $\subset$

$\therefore$ $A \cup A' = U$ por i), ii) definición =

(3) i) $A \cap A' \subset \phi$ por demostrar

1° $x \in A \cap A'$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in A'$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \notin A$, 2° definición del complemento

4° $x \in \phi$, 3° definición ϕ

5° $x \in A \cap A' \Rightarrow x \in \phi$, 1° y 4°

6° $A \cap A' \subset \phi$, 5° definición $\subset$

ii) $\phi \subset A \cap A'$ por demostrar, pero como el conjunto vacío ϕ es subconjunto de todo conjunto entonces $\phi \subset A \cap A'$

$\therefore$ $A \cap A' = \phi$, de i), ii) y definición =

(4) **i)** $U' \subset \phi$ por demostrar

1° $x \in U'$, por hipótesis

2° $x \notin U$, 1° definición de complemento

3° $x \in \phi$, 2° definición ϕ

4° $x \in U' \Rightarrow x \in \phi$, 1° y 3°

5° $U' \subset \phi$, 4° definición $\subset$

ii) $\phi \subset U'$ por demostrar, como el conjunto vacío ϕ es subconjunto de cualquier conjunto entonces $\phi \subset U'$ por lo tanto $U' = \phi$ de i), ii) y definición =

(5) **i)** $A - B \subset A \cap B'$, por demostrar

1° $x \in A - B$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \notin B$, 1° definición –

3° $x \in A \wedge x \in B'$, 2° definición de complemento

4° $x \in A \cap B'$, 3° definición $\cap$

5° $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$, 1° y 4°

6° $A - B \subset A \cap B'$, 5° definición $\subset$

ii) $A \cap B' \subset A - B$, por demostrar

1° $x \in A \cap B'$, por hipótesis

2° $x \in A \wedge x \in B'$, 1° definición $\cap$

3° $x \in A \wedge x \notin B$, 2° definición de complemento

4° $x \in A - B$, 3° definición –

5° $x \in A \cap B' \Rightarrow x \in A - B$, 1° y 4°

6° $A \cap B' \subset A - B$, 5° definición $\subset$

$\therefore\ A - B = A \cap B'$ de i), ii) definición =

(6) 1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° definición $\subset$

3° $x \in B'$, por hipótesis

4° $x \notin B$, 3° definición de un complemento

5° $x \notin A$, 4° y 2° definición $\subset$

6° $x \in A'$, 5° definición de un complemento

7° $x \in B' \Rightarrow x \in A'$, 3° y 6°

8° $B' \subset A'$, 7° definición $\subset$

d) TEOREMA (Leyes de Morgen).-

Sean A y B dos subconjuntos del conjunto universal U y designaremos a los respectivos complementos por $A' = C_U A$, $B' = C_U B$, se verifican

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **b)** $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración

a) i) $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$, por demostrar

1° $x \in (A \cup B)'$, por hipótesis

2° $x \notin A \cup B$, 1° definición de complemento

3° $x \notin A \wedge x \notin B$. 2° definición $\cup$

4° $x \in A' \wedge x \in B'$, 3° definición de complemento

5° $x \in A' \cap B'$, 4° definición de $\cap$

6° $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in A' \cap B'$, 1° y 5°

7° $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$, 6° definición $\subset$

ii) $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$, por demostrar

1° $x \in A' \cap B'$, por hipótesis

2° $x \in A' \wedge x \in B'$, 1° definición $\cap$

3° $x \notin A \wedge x \notin B$, 2° definición de complemento

4° $x \notin A \cup B$, 3° definición $\cup$

5° $x \in (A \cup B)'$, 4° definición de complemento

6° $x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in (A \cup B)'$, 1° y 5°

7° $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$, 6° definición $\subset$

$\therefore$ $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$, de i), ii) y definición =

b) **i)** $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$, por demostrar

1° $x \in (A \cap B)'$, por hipótesis

2° $x \notin A \cap B$, 1° definición de complemento

3° $x \notin A \vee x \notin B$, 2° definición de $\cap$

4° $x \in A' \vee x \in B'$, 3° definición de complemento

5° $x \in A' \cup B'$, 4° definición $\cup$

6° $x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in A' \cup B'$, 1° y 5°

7° $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$, 6° definición $\subset$

ii) $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$, por demostrar

1° $x \in A' \cup B'$, por hipótesis

2° $x \in A' \vee x \in B'$, 1° definición de $\cup$

3° $x \notin A \vee x \notin B$, 2° definición de complemento

4° $x \notin A \cap B$, 3° definición de $\cap$

5° $x \in (A \cap B)'$, 4° definición de complemento

6° $x \in A' \cup B' \Rightarrow x \in (A \cap B)'$, 1° y 5°

7° $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$, 6° definición $\subset$

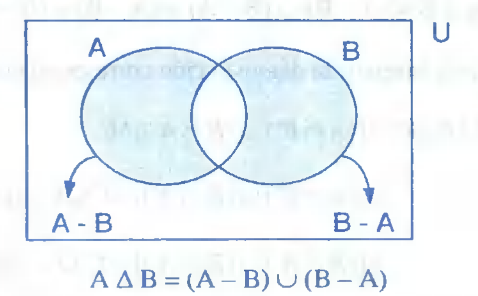
$\therefore\ (A \cap B)' = A' \cup B'$, por i), ii) definición =

(5) **DIFERENCIA SIMÉTRICA.-** Sean A y B dos subconjuntos de U, a la diferencia simétrica A y B denotado por A Δ B se define por:

$$A \,\Delta\, B = \{x \in U \,/\, x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$
$$= (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

La notación A Δ B se lee "La diferencia simétrica de A y B".

En el diagrama de VENN – EULER, mostraremos la diferencia simétrica de A y B que es la parte sombreada de la figura.



$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

Ejemplo.- Sean $A = \{1,2,3,4,6\}$ y $B = \{2,3,5,7\}$. Hallar $A \,\Delta\, B$

Solución

Calculando $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$; $A \cap B = \{2,3\}$

$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1,2,3,4,5,6,7\} - \{2,3\} = \{1,4,5,6,7\}$

a) PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA SIMÉTRICA.-

① $A \,\Delta\, A = \phi$

② $A \,\Delta\, \phi = A$

③ $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$

④ $(A \,\Delta\, B)\, \Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

⑤ $(A \,\Delta\, B) \cap C = (A \cap C)\, \Delta\, (B \cap C)$

⑥ $(A \,\Delta\, B) \cup (B \,\Delta\, C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

Demostración

① $A \,\Delta\, A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \phi$ $\quad\therefore\; A \,\Delta\, A = \phi$

② $A \,\Delta\, \phi = (A \cup \phi) - (A \cap \phi) = A - \phi = A$ $\quad\therefore\; A \,\Delta\, \phi = A$

③ $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = B \,\Delta\, A$

$\therefore\; A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$

④ Para demostrar $(A \,\Delta\, B)\, \Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$, aplicamos:

$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$ como $A - B$ y $B - A$ son conjunto disjuntos, entonces la unión de $A - B$ y $B - A$ es reemplazando por la suma (+)

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) = (A - B) + (B - A) = A \cap B' + B \cap A'$$

Ahora haremos la demostración correspondiente.

$$(A\Delta B)\Delta C = [(A \cap B') \cup (B \cap A')]\Delta C$$

$$= [(A \cap B') \cup (B \cap A')] - C \cup C - [(A \cap B') \cup (B \cap A')]$$

$$= [(A \cap B') \cup (B \cap A')] \cap C' \cup C \cap [(A \cap B') \cup (B \cap A')]'$$

$$= [(A \cap B') \cap C'] \cup [(B \cap A') \cap C'] \cup C \cap [(A \cap B')' \cap (B \cap A')']$$

$$= A \cap B' \cap C' \cup B \cap A' \cap C' \cup C \cap [(A' \cup B) \cap (B' \cup A)]$$

$$= A \cap B' \cap C' \cup B \cap A' \cap C' \cup C \cap [(A' \cup B) \cap B' \cup (A' \cup B) \cap A]$$

$$= A \cap B' \cap C' \cup B \cap A' \cap C' \cup C \cap [(A' \cap B') \cup (B \cap B') \cup (A' \cap A) \cup (A \cap B)]$$

$$= A \cap B' \cap C' \cup B \cap A' \cap C' \cup C \cap [(A' \cap B') \cup (A \cap B)]$$

$$= [A \cap B' \cap C' \cup B \cap A' \cap C'] \cup [A' \cap B' \cap C \cup (A \cap B \cap C)]$$

$$= A \cap B' \cap C' + B \cap A' \cap C' + A' \cap B' \cap C + A \cap B \cap C$$

$$= [A \cap B \cap C + A \cap B' \cap C'] + [B \cap (A' \cap C') + C \cap B' \cap A']$$

$$= A \cap [B \cap C + B' \cap C'] + [(B \cap C') + C \cap B'] \cap A'$$

$$= A \cap [B \cap C + (B \cup C)'] + [B \Delta C] \cap A'$$

$$= A \cap [B \cup C \cap (B \cap C)']' + (B \Delta C) \cap A'$$

$$= A \cap (B \Delta C)' + (B \Delta C) \cap A' = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$$

$$\therefore \quad (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$$

2.16. CONJUNTO POTENCIA (O CONJUNTO DE PARTES DE UN CONJUNTO).-

Dado el conjunto A, llamaremos conjunto potencia de A al conjunto formado por todos los subconjuntos de A incluyendo al conjunto vacío ϕ.

Al conjunto potencia de A denotaremos por P(A) y de acuerdo a la definición P(A) se expresa:

$$\boxed{P(A) = \{x \,/\, x \subset A\}}$$

OBSERVACIÓN.- Para todo conjunto A valen $\phi \subset A$ y $A \subset A$, luego ϕ y A son subconjuntos de A, o sea que son elementos de P(A) por lo tanto, para cualquiera conjunto A se verifica $\phi \in P(A)$, $A \in P(A)$

OBSERVACIÓN.- Un elemento de P(A) es un subconjunto de A, es decir:

$$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subset A$$

2.17. PROPIEDADES DEL CONJUNTO POTENCIA.-

Para cualquier conjunto A, se cumple:

(1) Sí $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$

(2) Sí $B \subset A \Leftrightarrow B \in P(A)$

(3) Sí $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

(4) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

(5) $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

Demostración

(1) **i)** $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$

1° $A \subset B$, por hipótesis

2° $x \in P(A)$, por hipótesis

3° $x \subset A$, 3° definición P(A)

4° $x \subset B$, 3° y 1° propiedad transitiva

5° $x \in P(B)$, 4° definición P(A)

6° $x \in P(A) \Rightarrow x \in P(B)$, 2° y 5°

7° $P(A) \subset P(B)$, 6° definición $\subset$

ii) $P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \subset B$

1° $x \in A$, por hipótesis

2° $\{x\} \subset A$, 1°

3° $\{x\} \in P(A)$, 2° definición P(A)

4° $P(A) \subset P(B)$, por hipótesis

5° $\{x\} \in P(B)$, 3° y 4° definición $\subset$

6° $\{x\} \subset B$, 5° definición $P(B)$

7° $x \in B$, 6° definición B

8° $x \in A \Rightarrow x \in B$, 1° y 7°

9° $A \subset B$, 8° definición $\subset$

(2) 1° $B \subset A$, por hipótesis

2° $B \in P(A)$, 1° definición $P(A)$

(3) i) $P(A) \subset P(B)$, por demostrar

1° $A = B$ por hipótesis

2° $x \in P(A)$ por hipótesis

3° $x \subset A$, 2° definición de $P(A)$

4° $x \subset B$, de 3° y 1°

5° $x \in P(B)$, 4° definición $P(A)$

6° $x \in P(A) \Rightarrow x \in P(B)$, 5° y 1°

7° $P(A) \subset P(B)$, 6° definición $\subset$

ii) $P(B) \subset P(A)$ por demostrar

1° $A = B$, por hipótesis

2° $x \in P(B)$, por hipótesis

3° $x \subset B$, 2° definición de $P(B)$

4° $x \subset A$, 1° y 3°

5° $x \in P(A)$, 4° del $P(A)$

6° $x \in P(B) \Rightarrow x \in P(A)$, 1° y 5°

7° $P(B) \subset P(A)$, 6° definición $\subset$

$\therefore$ $P(A) = P(B)$, de i), ii) y definición $=$

(4) i) $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$ por demostrar

1° $x \in P(A \cap B)$, por hipótesis

2° $x \subset (A \cap B)$, 1° definición $P(A \cap B)$

3° $x \subset A \wedge x \subset B$, 2° propiedad

4° $x \in P(A) \wedge x \in P(B)$, 3° del P

5° $x \in P(A) \cap P(B)$, 4° definición $\cap$

6° $x \in P(A \cap B) \Rightarrow x \in P(A) \cap P(B)$, 1° y 5°

7° $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$, 6° definición $\subset$

ii) $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$, por demostrar

1° $x \in P(A) \cap P(B)$, por hipótesis

2° $x \in P(A) \wedge x \in P(B)$, 1° definición $\cap$

3° $x \subset A \wedge x \subset B$, 2° y definición P

4° $x \subset A \cap B$, 3° definición $\cap$

5° $x \in P(A \cap B)$, 4° definición P

6° $x \in P(A) \cap P(B) \Rightarrow x \in P(A \cap B)$, 1° y 5°

7° $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$, 6° definición $\subset$

$\therefore$ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ de i), ii) definición =

(5) 1° $x \in P(A) \cup P(B)$, por hipótesis

2° $x \in P(A) \vee x \in P(B)$, 1° definición $\cup$

3° $x \subset A \vee x \subset B$, 2° definición P

4° $x \subset A \cup B$, 3° definición $\cup$

5° $x \in P(A \cup B)$, 4° definición P

6° $x \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow x \in P(A \cup B)$, 1° y 5°

7° $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$, 6° definición $\subset$

Ejemplos.-

① Dados los conjuntos $A=\{3\}$ y $B=\{2,3,5\}$. Determinar $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$

Solución

$P(A) = \{\{3\},\phi\}$, $P(B) = \{\{2\},\{3\},\{5\},\{2,3\},\{3,5\},\{2,5\},\{2,3,5\},\phi\}$

$A \cup B = \{2,3,5\}$, $A \cap B = \{3\}$

$P(A \cup B) = \{\{2\},\{3\},\{5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{2,3,5\},\phi\}$

$P(A \cap B) = \{\{3\},\phi\}$

2.18. INTERVALOS.-

Los intervalos son conjuntos de números definidos mediante la relación de orden en el campo de los números reales.

Los intervalos son de varios tipos:

a) INTERVALOS CERRADOS: [a,b], $a \leq b$.-

Es el conjunto de los números reales "x" para los que se satisfacen $a \leq x \leq b$ y se denota por: [a,b]. En forma simbólica.

$$[a,b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$$

Su representación gráfica es:



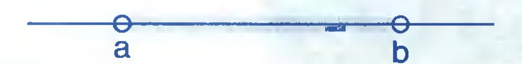
OBSERVACIÓN.- Se dice $x \in [a,b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$

b) INTERVALOS ABIERTOS: <a,b>, $a < b$.-

Es el conjunto de los números reales "x" para los que se satisfacen $a < x < b$ y se denota por <a,b>. En forma simbólica.

$$<a,b> = \{x \in R / a < x < b\}$$

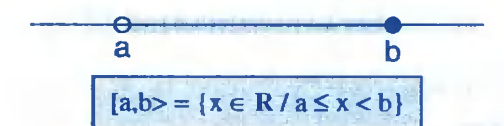
Su representación gráfica es:



También se tiene los siguientes conjuntos de números reales, los cuales se denominan, intervalos abiertos por la izquierda, e intervalos abiertos por la derecha respectivamente.

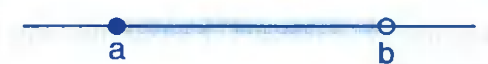
$$<a,b] = \{x \in R / a < x \leq b\}$$

Su representación gráfica es:

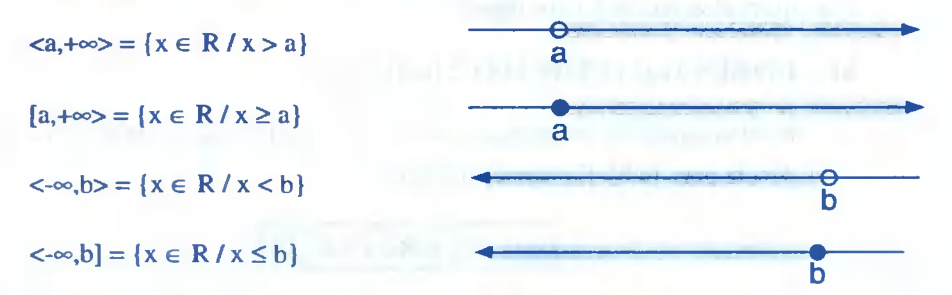


$$[a,b> = \{x \in R / a \leq x < b\}$$

Su representación gráfica es:



También se tiene los intervalos infinitos que son:



$<a,+\infty> = \{x \in R / x > a\}$

$[a,+\infty> = \{x \in R / x \geq a\}$

$<-\infty,b> = \{x \in R / x < b\}$

$<-\infty,b] = \{x \in R / x \leq b\}$

2.19. OPERACIONES DE CONJUNTOS APLICADOS A LOS INTERVALOS.-

Es este caso el conjunto de los números reales R será considerado como el conjunto universal.

Ejemplos.-

(1) Si $A = <-\infty,2]$, hallar $\complement A = A'$

Solución

$\complement A = \{x \in R \,/\, x \notin \langle -\infty, 2]\} = \{x \in R \,/\, \sim(x \in \langle -\infty, 2])\}$

$= \{x \in R \,/\, \sim(x \leq 2)\} = \{x \in R \,/\, x > 2\} = \langle 2, +\infty \rangle$

A = <-∞,2]
+∞
-∞
2
R
CA = A' = <2,+∞>

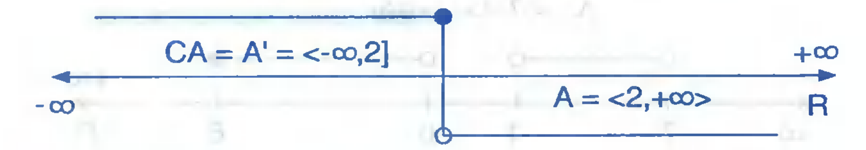
El complemento de A está formado por todo lo que no está en A dentro del conjunto universal R.

(2) Si A = <2,+∞>, Hallar $\complement A = A'$

Solución

$\complement A = A' = \{x \in R \,/\, x \notin \langle 2, +\infty \rangle\} = \{x \in R \,/\, \sim(x \in \langle 2, +\infty \rangle)\}$

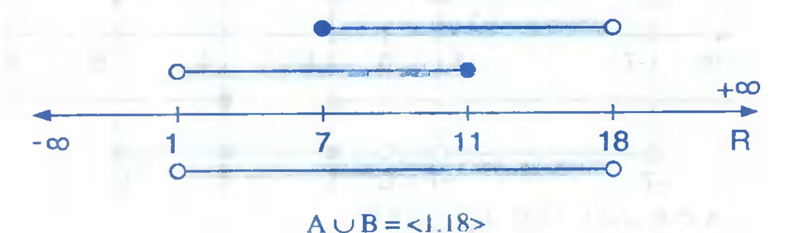
$= \{x \in R \,/\, \sim(x > 2)\} = \{x \in R \,/\, x \leq 2\} = \langle -\infty, 2]$



(3) Sí A = <1,11] y B = [7,18>. Hallar $A \cup B$ y $A \cap B$

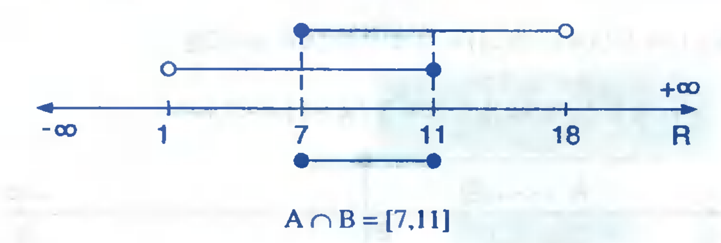
Solución

$A \cup B = \{x \in R \,/\, x \in \langle 1, 11] \lor x \in [7, 18\rangle\} = \langle 1, 11] \cup [7, 18\rangle = \langle 1, 18\rangle$



A ∪ B = <1,18>

$A \cap B = \{x \in R \,/\, x \in \langle 1,11] \wedge x \in [7,18\rangle\} = \langle 1,11] \cap [7,18\rangle = [7,11]$



$A \cap B = [7,11]$

(4) Si $A = \langle -7,-1\rangle \cup \langle 0,6]$, $B = \langle -\infty,1] \cup [4,8\rangle$. Hallar

a) $\complement A = A'$ b) $A \cap B$ c) $\complement(A \cup B)$

Solución

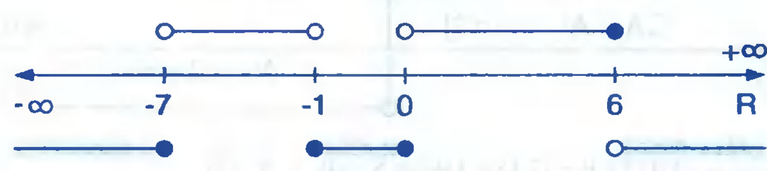
a) $\complement A = A' = \{x \in R \,/\, x \notin \langle -7,-1\rangle \cup \langle 0,6]\} = \{x \in R \,/\, \sim(x \in \langle -7,-1\rangle \cup \langle 0,6])\}$

$= \{x \in R \,/\, \sim(x \in \langle -7,-1\rangle) \wedge \sim(x \in \langle 0,6])\}$

$= \{x \in R \,/\, \sim(-7 < x < -1) \wedge \sim(0 < x \leq 6)\}$

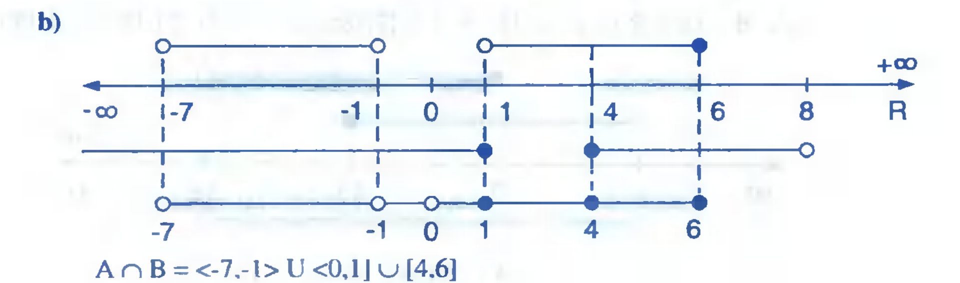
$= \{x \in R \,/\, (x \leq -7 \vee x \geq -1) \wedge (x \leq 0 \wedge x > 6)\}$

$A = \langle -7,-1\rangle \cup \langle 0,6]$



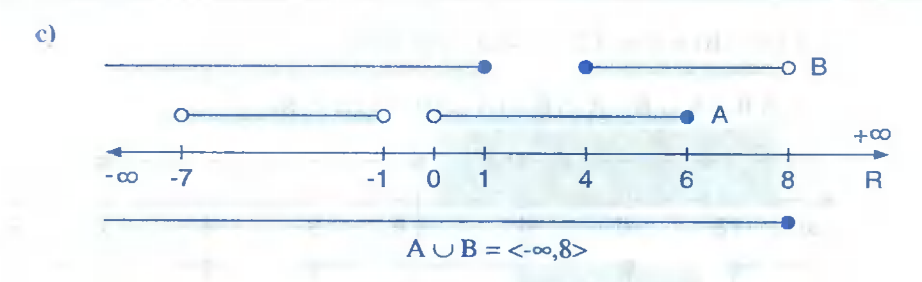
$\complement A = A' = \langle -\infty,-7] \cup [-1,0] \cup \langle 6,+\infty\rangle$

b)



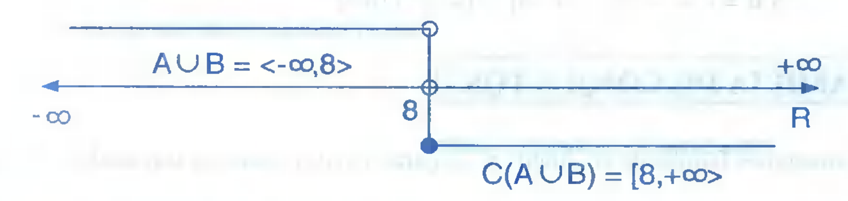
$A \cap B = \langle -7,-1\rangle \cup \langle 0,1] \cup [4,6]$

c)



$\complement(A\cup B)=(A\cup B)'=\{x\in R\,/\,x\notin\,<-\infty,8>\}=\{x\in R\,/\sim(x\in\,<-\infty,8>)\}$

$=\{x\in R\,/\sim(x<8)\}=\{x\in R\,/\,x\geq 8\}=[8,+\infty>$



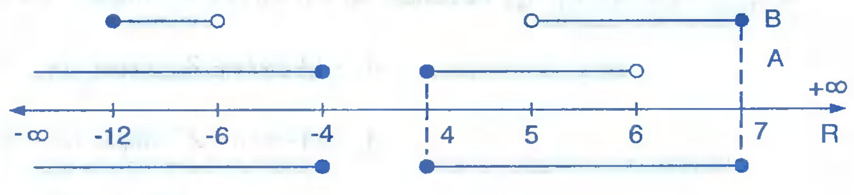
(5) Si A=<-∞,-4]∪[4,6> y B = [-12,-6>∪<5,7], encontrar la diferencia simétrica A Δ B

Solución

A Δ B = (A ∪ B) – (A ∩ B) por definición de diferencia simétrica, ahora calculamos A ∪ B y A ∩ B



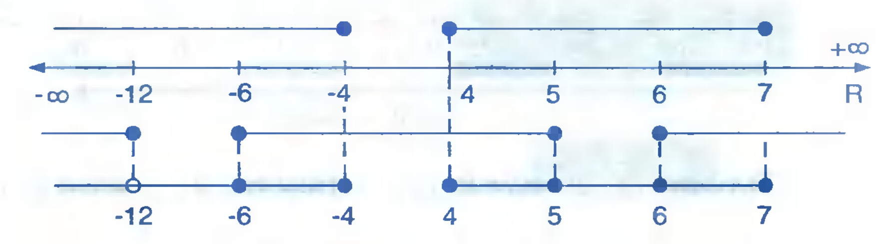
A ∪ B = <-∞,-4] ∪ [4,7]



A ∩ B = [-12,-6> ∪ <5,6>

$C(A \cap B) = \langle -\infty,-12\rangle \cup [-6,5] \cup [6,+\infty\rangle$

$A \Delta B = A \cup B - A \cap B = (A \cup B) \cap C(A \cap B)$



$A \Delta B = \langle -\infty,-12\rangle \cup [-6,-4] \cup [4,5] \cup [6,7]$

2.20. FAMILIA DE CONJUNTOS.-

Llamaremos familia de conjuntos al conjunto cuyos elementos son también conjuntos.

A una familia de conjuntos denotaremos por $\{A_i\}_{i\geq 1}$, donde cada A_i es un conjunto.

Ejemplo.- ① $\{A_i\}_{1\leq i\leq 3} = \{A_1, A_2, A_3\}$

② $\{A_i\}_{i\leq 8} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

③ $\{A_i\}_{impar} = \{A_1, A_3, A_5,...\}$

Ejemplo.- Determinar los componentes de las siguientes familia de conjuntos.

① $\{A_i\}_{1\leq i\leq 4}$ donde $A_i = \{i+n \,/\, n\in Z^+ \text{ impar } \wedge n<5\}$

Solución

$\{A_i\}_{1\leq i\leq 4} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de donde $A_1 = \{1+n \,/\, n\in Z^+ \text{ impar } \wedge n<5\} = \{2,4\}$

$A_2 = \{2+n \,/\, n\in Z^+ \text{ impar } \wedge n<5\} = \{3,5\}$

$A_3 = \{3+n \,/\, n\in Z^+ \text{ impar } \wedge n<5\} = \{4,6\}$

$A_4 = \{4+n \,/\, n\in Z^+ \text{ impar } \wedge n<5\} = \{5,7\}$

a) UNIÓN DE FAMILIA DE CONJUNTOS.-

NOTACIÓN.-

① $A_1 \cup A_2 = \bigcup_{i=1}^{2} A_i$ ② $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

DEFINICIÓN.- La unión de familia de conjuntos es dado por:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x / x \in A_i, \text{ para algún } i\}$$

OBSERVACIÓN.-

① Sí $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists\, i / x \in A_i$ ② $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall\, i / x \notin A_i$

Ejemplos.- Sea $\{A_i\}_{1 \le i \le 5}$ donde $A_i = \{x+1 \in N / x \le i \text{ y } x \in N\}$.

Hallar **a)** $A_1 \cup A_3 \cup A_5$ **b)** $\bigcup_{i=1}^{5} A_i$

<u>**Solución**</u>

a) $A_1 = \{x+1 \in N / x \le 1 \wedge x \in N\} = \{2\}$

$A_3 = \{x+1 \in N / x \le 3 \wedge x \in N\} = \{2,3,4\}$

$A_5 = \{x+1 \in N / x \le 5 \wedge x \in N\} = \{2,3,4,5,6\}$

$A_1 \cup A_3 \cup A_5 = \{2,3,4,5,6\}$

b) $\bigcup_{i=1}^{5} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \{2,3,4,5,6\}$

b) INTERSECCIÓN DE FAMILIA DE CONJUNTOS.-

NOTACIÓN:

① $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \bigcap_{i=1}^{3} A_i$ ② $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

DEFINICIÓN.- La intersección de familia de conjuntos es dado por:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x / x \in A_i, \text{ para todo } i\}$$

OBSERVACIÓN:

① $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall\, i / x \in A_i$ ② $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists\, i / x \notin A_i$

Ejemplo.- Sea la familia $\{A_i\}_{1 \le i \le 5}$ donde $A_i = \{x+1 / x \le i,\ x \in N\}$

Hallar **a)** $A_1 \cap A_3 \cap A_5$ **b)** $(A_1 \cup A_5) \cap A_3$ **c)** $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

d) $(A_1 - A_3) \cap (A_1 \cup A_2)$ **e)** $(A_5 - A_3) \cap (A_4 - A_1)$

Solución

$A_1 = \{x+1 / x \le 1,\ x \in N\} = \{2\}$ $A_2 = \{x+1 / x \le 2,\ x \in N\} = \{2,3\}$

$A_3 = \{x+1 / x \le 3,\ x \in N\} = \{2,3,4\}$ $A_4 = \{x+1 / x \le 4,\ x \in N\} = \{2,3,4,5\}$

$A_5 = \{x+1 / x \le 5,\ x \in N\} = \{2,3,4,5,6\}$

a) $A_1 \cap A_3 \cap A_5 = \{2\}$

b) $A_1 \cup A_5 = \{2,3,4,5,6\}$, $(A_1 \cup A_5) \cap A_3 = \{2,3,4\}$

c) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \{2,3,4,5,6\}$

d) $A_1 - A_3 = \phi$, $(A_1 - A_3) \cap (A_1 \cup A_2) = \phi \cap (A_1 \cup A_2) = \phi$

e) $A_5 - A_3 = \{5,6\}$, $A_4 - A_1 = \{3,4,5\}$ $\therefore (A_5 - A_3) \cap (A_4 - A_1) = \{5\}$

c) COMPLEMENTO DE FAMILIA DE CONJUNTOS.-

NOTACIÓN.- ① $\complement(A_1 \cup A_2) = \complement A_1 \cap \complement A_2$

② $\complement(\bigcup_{i=1}^{12} A_i) = \bigcap_{i=1}^{12} \complement A_i$

③ $\complement(\bigcup_{i=1}^{12} A_i) = \bigcap_{i=1}^{12} \complement A_i$

OBSERVACIÓN.- $x \in \complement(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall i / x \notin A_i$

$x \in \complement(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists i / x \notin A_i$

d) PROPIEDADES GENERALES DE FAMILIA DE CONJUNTOS.-

Sea E cualquier conjunto, entonces:

① $E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$

② $E \cup (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cup A_i)$

③ $E \cap (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$

④ $E \cup (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (E \cup A_i)$

⑤ $\complement(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (\complement A_i)$

⑥ $\complement(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (\complement A_i)$

<u>Demostración</u>

(1) 1° $x \in E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ por hipótesis

2° $x \in E \wedge x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, 1° definición $\cap$

3° $x \in E \wedge x \in A_i$, para algún i, 2° del $\cup$

4° $x \in E \cap A_i$, 3° definición $\cap$

5° $x \in \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$, 4° definición $\cup$

6° $x \in E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$, 1° y 5°

7° $E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$, 6° definición $\subset$

8° $x \in \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)$ por hipótesis

9° $x \in E \cap A_i$, para algún i, 8° definición $\cup$

10° $x \in E \wedge x \in A_i$. 9° definición $\cap$

11° $x \in E \wedge x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, 10° definición $\cup$

12° $x \in E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, 11° definición $\cap$

13° $x \in \bigcup_{i=1}^{n}(E \cap A_i) \Rightarrow x \in E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, 8° y 12°

14° $\bigcup_{i=1}^{n}(E \cap A_i) \subset E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, 13° definición $\subset$

15° $E \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n}(E \cap A_i)$, 7° y 14° definición =

2.21. NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO.-

DEFINICIÓN.- Sea A un conjunto cualquier, al número de elementos distintos que forman dicho conjunto denotamos por n(A) llamado cardinalidad del conjunto.

NOTA: n(A) se lee "el número de elementos del conjunto A".

Ejemplos.- Sí A = {1,3,5,6}, B = {a,b,c,d,e}, C = {2,4,2,4,2}, D = ϕ

Solución

n(A) = 4, n(B) = 5, n(C) = 2, n(D) = 0

2.22. PROPIEDADES DEL NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO.-

① Si A y B son conjuntos cualquiera, entonces: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, sí $A \cap B = \phi$

Demostración

Supongamos que: A tiene x elementos $\Rightarrow$ n(A) = x

B tiene y elementos $\Rightarrow$ n(B) = y

Por hipótesis no hay elementos comunes a ambos conjuntos.

$A \cup B$ tienen x + y elementos, esto es: $n(A \cup B) = x + y = n(A) + n(B)$

$\therefore$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

② Si A y B son conjuntos cualquiera, entonces $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

Demostración

Sea $M=A-B=A\cap B'$, $N=A\cap B$, se tiene: $M\cup N=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A$

$M\cap N=(A\cap B')\cap(A\cap B)$ por asociatividad y conmutatividad de $\cap$

$=A\cap(B'\cap B)\cap A$ pero como $B'\cap B=\phi$, se tiene

$M\cap N=\phi$, luego por la propiedad (1) se tiene:

$n(A)=n(M\cup N)=n(M)+n(N)=n(A-B)+n(A\cap B)$

de donde $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

③ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

Demostración

Como $A\cup B=(A-B)\cup B$ y $(A-B)\cap B=\phi$, entonces

$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B)$ por la propiedad (1)

$=n(A)-n(A\cap B)+n(B)$ por la propiedad (2)

$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

④ $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

Demostración

Sea $E=B\cup C$, entonces por la propiedad (3) se tiene:

$n(A\cup E)=n(A)+n(E)-n(A\cap E)$ entonces:

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B\cup C)-n(A\cap(B\cup C))$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n((A\cap B)\cup(A\cap C))$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-[n(A\cap B)+n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)]$

$\therefore\ n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

Ejemplo.-

1) Una persona come plátano o naranja cada mañana durante el mes de marzo, si come naranja 25 mañanas y plátano 18 mañanas ¿Cuántas mañanas come plátano y naranjas?

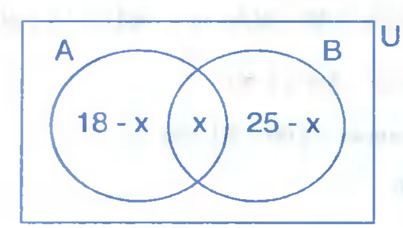
Solución

Sea U = {mes de marzo} conjunto universal $\Rightarrow n(U) = 31$

A = {mañanas que come plátano} $\Rightarrow n(A) = 18$

B = {mañanas que come naranja} $\Rightarrow n(B) = 25$

Ubiquemos la información en un diagrama de Venn – Euler.



Mañanas que comen plátano y naranjas = x

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$31 = 18 - x + 25 - x - x$

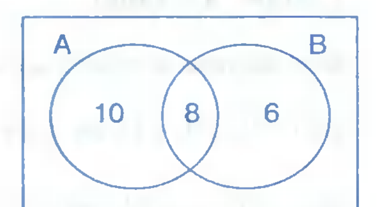
$3x = 43 - 31 = 12$ de donde $x = 4$

Rpta. 4 mañanas come plátano y naranja

2) Sean A y B dos conjuntos tales que $n(A \cup B) = 24$ y $n(A - B) = 10$, $n(B - A) = 6$. Hallar $5[n(A)] - 4[n(B)]$

Solución

Ubiquemos los datos un diagrama de Venn – Euler.



Calculando se tiene:

$5[n(A)]-4[n(B)]=5(18)-4(14) = 90 - 56 = 34$

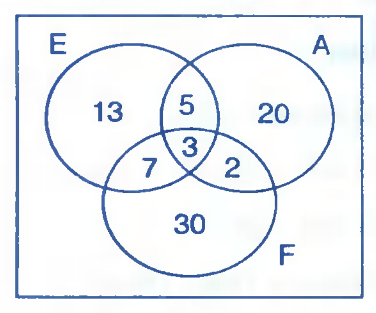
3) En una investigación realizada a un grupo de 100 personas, que estudiaban varios idiomas fueron los siguientes: Español 28, Alemán 30, Francés 42, Español y Alemán 8, Español y Francés 10, Alemán y Francés 5 y los tres idiomas 3.

a) ¿Cuántos alumnos no estudiaban idiomas?

b) ¿Cuántos alumnos tenían como francés el único idioma de estudio?

Solución

Ilustraremos el problema en un diagrama de Venn – Euler, para facilitar la solución.



En el diagrama se observa que:

$n(E \cap A \cap F) = 3$; $n(A \cap F) = 5$

$n(E \cap F) = 10$; $n(E \cap A) = 8$

$n(F) = 42$; $n(A) = 30$

$n(E) = 28$

$$n(A \cup E \cup F) = n(A) + n(E) + n(F) - n(A \cap E) - n(A \cap F) - n(E \cap F) + n(A \cap E \cap F)$$

$$= 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$$

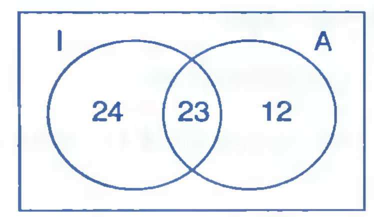
por lo tanto **a)** No estudian idiomas = 100 – 80 =20

b) Sólo francés 30

4 En un instituto de investigación trabajan 67 personas. De estas 47 conocen el ingles, 35 el alemán y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas en el instituto no conocen el ingles ni el Alemán?

Solución

Para facilitar la solución utilizamos el diagrama de Venn – Euler.



I = ingles, A = Alemán

En el diagrama se observa que $n(I \cap A) = 23$,

$n(A) = 35$, $n(I) = 47$ por conocer $N(I \cup A)$

Hallaremos $n(I' \cap A') = n((I \cup A)') = n(U) - n(I \cup A) = 67 - n(I \cup A)$ **... (1)**

edemas $n(I \cup A) = n(I) + n(A) - n(I \cap A) = 47 + 35 - 23 = 59$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: $n(U) - n(I \cup A) = 67 - n(I \cup A) = 67 - 59 = 8$

por lo tanto 8 personas no conocen el Ingles y Alemán.

(5) Sea A un conjunto tal que $n(A) = 3p + q$, B es un conjunto tal que $n(B) = 2q + 3$, y los dos tienen elementos comunes $n(A \cap B) = p + q - 4$ ¿cuántos elementos tiene $A \Delta B$?

Solución

Debemos de calcular $n(A \Delta B) = ?$

$$n(A \Delta B) = n[(A \cup B) - (A \cap B)] = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = (2p + q + 2q + 3) - 2(p + q - 4)$$

$$= 3p + 2q + 12 - 2p - 2q + 8 = p + 20$$



(6) De 120 alumnos de una universidad se obtuvo la información siguiente:

72 alumnos estudian Análisis Matemático.

64 alumnos estudian Biología.

36 alumnos estudian Ciencias Sociales.

12 alumnos estudian las tres asignaturas.

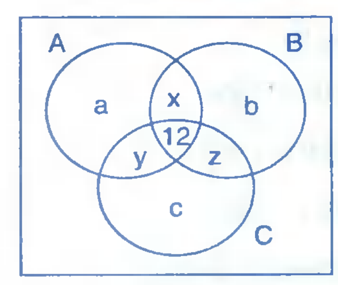
¿Cuántos alumnos estudian exclusivamente dos asignaturas?

Solución

Sean $A = \{$estudiantes de Análisis Matemático$\}$

$B = \{$estudiantes de Biología$\}$

$C = \{$estudiantes de Ciencias Sociales$\}$



Ilustraremos mediante el diagrama de Venn-Euler. Las variables x,y,z representan a los estudiantes que estudian exclusivamente dos asignaturas.

Las variables a, b, c representan los estudiantes de una sola asignatura, de acuerdo a los datos del problema se tiene:

$a + x + y + 12 = 72$

$b + x + z + 12 = 64$

$c + y + z + 12 = 36$

$(a + b + c) + 2(x + y + z) = 136$ ... (1)

como son 120 alumnos, del diagrama se tiene: $a + b + c + x+y+z+12 = 120$ de donde

$(a + b + c) + (x + y + z) = 108$ ... (2)

ahora al restar (2) de (1) se tiene: $x + y + z = 136 - 108 = 28$

por lo tanto, los estudiantes que estudian exclusivamente dos asignaturas son 28

(7) En una ciudad de 10,000 habitantes adultos el 70% de los adultos escuchan radio, el 40% leen los periódicos y el 10% ven televisión, entre los que escuchan radio el 30% lee los periódicos y el 4% ven televisión, el 90% de los que ven televisión, lee los periódicos, y solo el 2% de la población total adultos lee los periódicos, ven televisión y escuchan radio se pide:

a) Cuántos habitantes no escuchan radio, no lee periódicos ni ven televisión.

b) Cuántos habitantes leen periódicos solamente.

Solución

Consideremos los siguientes conjuntos:

A = {conjunto de personas que escuchan radio}

B = {conjunto de personas que leen periódicos}

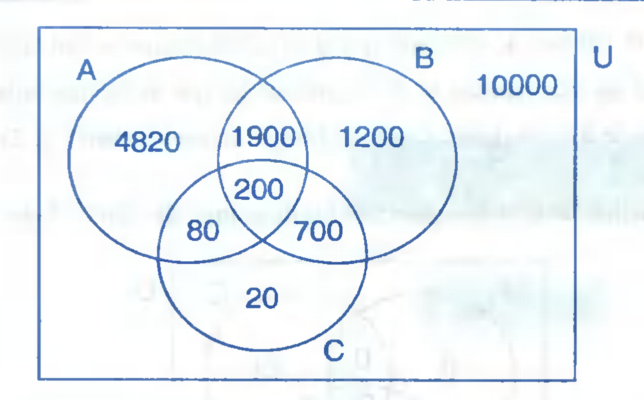
C = {conjunto de personas que ven televisión}

Personas que escuchan radio 70% de 10,000 es 7,000

Personas que leen periódicos 40% de 10,000 es 4,000

Personas que ven televisión 10% de 10,000 es 1,000

Para facilitar la solución utilizaremos diagramas de Venn.



a) Observando el diagrama se tiene:

$n(A \cup B \cup C) = 4820 + 1900 + 1200 + 700 + 200 + 80 + 20$

$= 4820 + 3100 + 1000 = 8920$, además se conoce que $n(U) = 10,000$

Los que no leen periódicos, no escuchan radio, ni ven T.V. estará dado por:
$n(U) - n(A \cup B \cup C) = 10,000 - 8920 = 1080$ es decir 1,080 personas adultas, no leen periódicos, no escuchan radio, ni ven T.V.

b) Según el diagrama de Venn –Euler las personas que leen periódicos solamente son 1,200.

(8) En una encuesta realizada a 154 personas, se obtuvieron las siguientes informaciones: 6 personas cenan y desayunan pero no almuerzan

5 personas desayunan y almuerzan solamente

8 personas almuerzan solamente

Él número de personas que realizan las tres comidas es el séxtuplo de las que sólo desayunan y el triple de las que solo cenan, nadie declara almorzar y cenar solamente. ¿Cuántas personas cenan por lo menos?

Solución

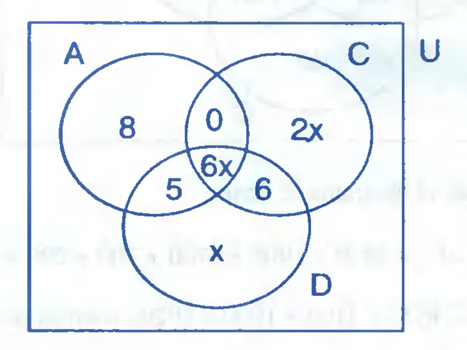
Sean A = {conjunto de personas que almuerzan}

C = {conjunto de personas que cenan}

D = {conjunto de personas que desayunan}

Sea x el número de personas que desayunan solamente entonces las personas que realizan las tres comidas es el séxtuplo de los que desayunan solamente 6x y esto es el triple de los que quiere decir que los que cenan solamente es 2x.

Para facilitar la solución usaremos los diagramas de Venn – Euler.



Además se tiene que: $n(U) = 154$

Donde $U = A \cup C \cup D$, donde $n(c) = 6x + 6 + 0 + 2x = 8x + 6$

$n(A \cup C \cup D) = n(U) = 154$, de donde al observar el diagrama de Venn – Euler se tiene:

$6x+6+2x+0+8+5+x=154$, simplificando $9x + 19 = 154 \Rightarrow 9x = 135 \Rightarrow x = 15$

las personas que cenan por lo menos es: $n(c) = 8(15) + 6 = 120 + 6 = 126$

(9) En una encuesta realizada en una población sobre su preferencia de tres diarios A, B y C se encontró el 42% leen el diario A, el 34% leen B, el 28% leen C, el 17% lee A y B, el 15% lee A y C, el 8% lee B y C y el 66% leen al menos uno de los tres diarios. Determinar:

a) Que tanto por ciento leen un solo diario.

b) Que tanto por ciento leen exactamente dos de los diarios.

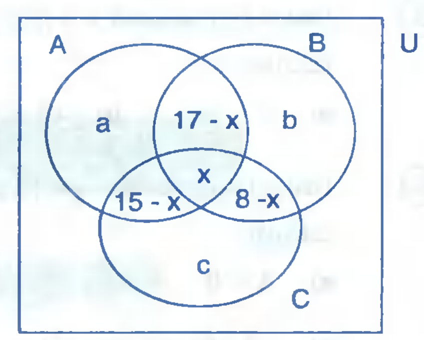
c) Que tanto por ciento ninguno de los tres diarios.

Solución

$n(A) = 42,\ n(B) = 34,\ n(C) = 28$

$n(A \cap B) = 17,\ n(A \cap C) = 15,\ n(B \cap C) = 8$

y $n(A \cup B \cup C) = 66$



Sea x el porcentaje de personas que leen los tres diarios.

Sí $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$66 = 42 + 34 + 28 - 17 - 15 - 8 + x$ de donde $66 = 62 + x \Rightarrow x = 2$

En el diagrama: $n(A) = a + (17 - x) + (15 - x) + x = 42 \Rightarrow a = 12$

$n(B) = b + (17 - x) + (8 - x) + x = 34 \Rightarrow b = 11$

$n(C) = c + (15 - x) + (8 - x) + x = 28 \Rightarrow c = 7$

Luego: **a)** Leen un solo diario $a + b + c = 30\%$

b) Leen exactamente dos de los tres diarios $15 + 17 + 8 - 3x = 34\%$

c) No leen ninguno de los tres diarios $100 - 66 = 34\%$

2.23. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

① Dados los conjuntos $A = \{a,e,d\}$, $B = \{e,f,g\}$ y $C = \{l,e,j,k\}$. Hallar $A \cup (B \cap C)$

② Sí $U = \{a,b,c,d,e\}$, $A \cup B = \{a,b,c,d\}$, $A \cap B = \{a,c\}$ y $A - B = \{b\}$. Hallar A y B

③ Sean los conjuntos $A = \{x \in N / x = \frac{1}{2}(k^2 - 1),\ k \in N\}$, $B = \{x \in N / x^2 = 8x\}$, $C = \{x \in N / x^2 - 32x + 192 = 0\}$. Hallar el resultado de $(B - A) \cap C$

④ Consideremos los conjuntos siguientes: $A = \{x \in N / x \text{ es divisor de } 12\}$, $B = \{x \in N / x \text{ es divisor de } 18\}$ y $C = \{x \in N / x \text{ es divisor de } 16\}$.

Hallar **a)** $(A - B) \cap (B - C)$ **b)** $(A - B) \cup (B - C)$

(5) Dados los conjuntos $A = \{5,6,7,8\}$, $B = \{6,7,1,2\}$, $C = \{4,5,7,9\}$ y $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ calcular:

a) $A \cup B$ **b)** $(A \cap B) \cup C$ **c)** $A \cap (B - C)$ **d)** $C - (A \cap B)'$

(6) Dados los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,5,7\}$, $C = \{1,4,6,8\}$ y $U = \{x \in N / x \leq 8\}$ calcular

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $(A \cup B) \cap C$

d) $(A - B)'$ respecto a U **e)** $[C - (A \cup B)]'$ respecto a U

(7) Sí $A = \{x \in N / x \leq 5 \vee x = 7\}$, $B = \{2x + 1 / x \in N \wedge x \leq 3\}$

Hallar **a)** $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$ **d)** $B - A$

(8) Sean $A = \{\{1,2,3\},3,1\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{2,3,4\}$ y $D = \{\{2,3\},1,2,5\}$. Hallar:

a) $A \cup B$ **b)** $A \cup C$ **c)** $A \cup D$

d) $A \cap B$ **e)** $A \cap C$ **f)** $A \cap D$

g) $A - B$ **h)** $A - C$ **i)** $A - D$

(9) Sí $A \cup B = \{1,2,3,4\}$, $A \cap B = \{1,3\}$ y $A - B = \{2\}$. Hallar A y B

Rpta. $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,4\}$

(10) Si $U = \{a,b,c,d,e\}$, $A \cup B = \{a,b,c,d\}$, $A \cap B = \{a,c\}$ y $A - B = \{b\}$. Hallar A y B

Rpta. $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,c,d\}$

(11) Si $A = \{x \in Z / x \text{ es divisor de } 60\}$; $B = \{x \in Z / x \text{ es divisor de } 42\}$ y $C = \{x \in Z^+ / x \text{ es múltiple de 2, menor que } 20\}$. Verificar las siguientes igualdades

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **b)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(12) Si $A = \{x \in R / -3 < x \leq 5\}$, $B = \{x \in R / 2 \leq x \leq 7\}$ y $C = \{x \in R / 4 \leq x \leq 5\}$. Hallar:

a) $A \cup B \cup C$ **b)** $(A - B) \cap (A \cup C)$

(13) Si $P = \{x \in N / x \text{ es divisor de } 12\}$, $Q = \{x \in N / x \text{ es divisor de } 24\}$

$R = \{x \in N / x \text{ es divisor de } 36\}$ ¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) $P \cap Q = P \cap R$ **b)** $P \cap Q = R$ **c)** $Q - R = P$

d) $P \cup R = Q$ **e)** $P - Q = R$

(14) Simplificar los siguientes conjuntos:

a) $(<-2,3] \cup <0,4>) - [2,6]$ **b)** $<0,4> \cup <-2,3] - [2,6]$

c) $(<-2,3] \cup \complement[2,6]) \cup (<0,4> \cap [<-\infty,2> \cup <6,+\infty>])$

(15) Si $U = \{-3,-2,-1,0,2,3\}$ el conjunto universal y sean $A = \{-1,0,1\}$, $B = \{-2,-1,0,1,2\}$, $C = \{-3,1,2\}$. Determinar cada uno de los siguientes conjuntos.

a) B' **b)** A' **c)** $(A \cap B)'$ **d)** $A' \cup B'$

e) $B \cap C'$ **f)** $(B \cap C)'$

(16) Sea $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ el universo, $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{2,4,6,8,10\}$. Determinar los siguientes conjuntos.

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$ **d)** $B - A$

e) $\complement A$ **f)** $\complement B$ **g)** $\complement(A \cup B)$ **h)** $\complement A \cap \complement B$

(17) Si $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,4,5,6\}$, $B = \{2,4,6\}$. Determinar los siguientes conjuntos:

a) A' **b)** B' **c)** $A \cap B'$ **d)** $A' \cap B$

e) $A' \cap B'$ **f)** $(A' \cap B')'$ **g)** $A \cap B$ **h)** $A' \cup B'$

(18) Sea $U = \{x \in N / x < 7\}$ el conjunto universal, siendo los subconjuntos de U, $A = \{x \in U / x^3 \leq 8\}$, $B = \{x \in U / x \text{ es múltiplo de } 3\}$, $C = \{x \in U / x^2 > 25\}$, $D = \{x \in U / x \text{ es par}\}$. Hallar $B' - [(C' \cup D') - A]'$

(19) Sean $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,4,13,14\}$, $C = \{2,8\}$, $D = \{10,11,12\}$. Hallar:

a) $A \cup B$ **b)** $A \cup C$ **c)** $B \cup D$ **d)** $D \cup C$

e) CA **f)** $(CA) \cup B$ **g)** $CA \cup CB$ **h)** $C(A \cup B)$

i) $CA \cap CB$ **j)** $C(A \cap D)$ **k)** $C(A \cup C)$ **l)** $(A \cup B) - D$

ll) $(A \cap B) - D$ **m)** $(A - B) \cup (B - A)$ **n)** $(A \cup B) - (A \cap B)$

o) $(A - B) \cap (B - A)$

(20) Siendo Z el conjunto universal y sean los conjuntos $A = \{x \in Z / x \text{ es número par}\}$, $B = \{x \in Z / x \text{ es número primo}\}$, $C = \{x \in Z / x \text{ es un cuadrado perfecto}\}$. Hallar

a) $A \cap B'$ **b)** $C - (B \cup A)$ **c)** $(A \cup B)' \cap C$

(21) Sean $U = \{x \in N / 2 \leq x \leq 12\}$, $A = \{x \in U / x \text{ es impar}, x \neq 3\}$, $B = \{x \in U / 5 < x < 11\}$, $C = \{x \in U / x \text{ es múltiplo de } 3\}$. Calcular $(A' - B)' \Delta (B' \cup C)'$

(22) Dados los conjuntos $A = \{1,2,5,7,8\}$, $B = \{2,3,4,7,9\}$, $C = \{1,3,5,6,8\}$ y $U = \{x \in N / x \leq 9\}$. Hallar

a) $[(A \cup B) - (A \cap C)]'$ **b)** $[(A \cap B) - (A \cup C)]'$

c) $[(A - B) \cup (A - C)]'$ **d)** $[(A' - B) \cap (A - C)]'$

e) $[(C - B') - (A' \cup C)]'$ **f)** $(A' - B') \Delta (B' \cup C)'$

(23) Si $M = \{x \in N / x^3 \leq 30\}$, $N = \{x^2 \in N / x \leq 3\}$ y el universo es $U = \{1,2,3,4,6,7,9\}$. Hallar

a) $(M \cap N)' - (M \cup N)'$ **b)** Hacer un diagrama de Venn – Euler.

(24) Dados los conjuntos $A = \{2,3,5,6,8\}$ y $B = \{0,1,2,4,5,7,9\}$ Si m es el número de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos con B y n él número de subconjuntos no vacíos de B que son disjuntos con A. Hallar m + n. **Rpta.** 38

(25) Sea $U = \{x \in N / 0 < x \leq 10\}$ y los subconjuntos $A = \{x \in U / x \text{ es primo}\}$, $B = \{x \in U / x \text{ es cuadrado perfecto}\}$, $C = \{x \in U / x \text{ es impar}\}$. Hallar:

a) $(A \cup B)' - C$ b) $(A - C)' \cap B$

c) $(A \Delta B) - (A \Delta C)$ d) $(A \cap C)' - (B \cup C)'$

(26) Dado los conjuntos $A = \{x \in Z / \sim[x \leq -2 \vee x > 3]\}$, $B = \{x \in N / \sim(-1 < x \leq 3 \Rightarrow x = 5)\}$ y $C = \{x \in Z / (x < -2 \vee x \geq 2) \rightarrow x > 1\}$. Hallar el resultado de $(B \cap C) \Delta (A \cap B)$

(27) Sean los conjuntos $A = \{x \in N / 7 - x = 3 \vee x < 3\}$, $B = \{x \in N / 5 - x > 2 \wedge \frac{1}{5}(6x - 2) \geq 2\}$, $C = \{x \in N / x \text{ cuadrado perfecto}, x \leq 10\}$. Hallar

a) $(A \cup B) \cap (C - A)$ b) $(A - B) \cup (B \cap C)$

c) $(A \cap B) - (A - C)$ e) $(A \Delta B) \cap (B \cap C)$

(28) Dado el conjunto universal $U = \{x \in N / x \leq 50\}$ y los subconjuntos:

$A = \{\frac{x^2 - 1}{3} / x \in U \wedge x \text{ es N° primo}\}$; $B = \{\frac{x^2 + 1}{3} / x \in U \wedge x \text{ es N° impar}\}$

$C = \{\frac{\sqrt{x - 1}}{2} / x \in U \wedge x \text{ es N° par}\}$. Hallar

a) $A \cap B$ b) $A \Delta B$ c) $A \Delta C$

d) $(A \Delta B) \Delta C'$ e) $(A \cup B) \Delta (A \cup C)$

(29) Determinar los conjuntos X e Y si se tiene que $X \Delta Y = \{1,2,3,4,5\}$, $X' = \{2,3,5,7\}$, $Y' = \{1,4,7\}$ siendo el universo $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(30) Sea $U = \{x \in N / 0 < x \leq 10\}$ y los subconjuntos $A = \{x \in U / x \text{ es primo}\}$, $B = \{x \in U / x \text{ es cuadrado perfecto}\}$, $C = \{x \in U / x \text{ es impar}\}$. Hallar

a) $\complement(A \cup B) - C$ b) $\complement(A - C) \cap B$

c) $(A \cup B) - (A \cup C)$ d) $\complement(A \cap C) - \complement(B \cup C)$

31 Sí $A=\{x\in Z / x^5+4x=5x^3\}$ y $B=\{x\in Z / \exists y,\ y^2=x\}$. Hallar el complemento de B con respecto a A es decir: A – B. **Rpta.** A – B = {-1,-2,2}

32 Simplificar y expresar en términos de reuniones de intervalos:

a) [2,7> Δ <0,1>

b) <1,4> Δ (<2,6> ∪ <0,1>)

c) [2,9] ∩ (∁ <-∞,-3] ∪ [3,6]) - <2,8])

d) (<-∞,5> ∪ <6.12>) Δ {1,7}

33 Determinar los elementos de A y B sabiendo que A Δ B = {1,2,3,4,5}, $C_E B=\{1,7,4\}$, $C_E A=\{2,3,5,7\}$, E = {1,2,3,4,5,6,7,8}

34 En las siguientes proposiciones dadas indicar cuáles son verdaderas o falsas y justificar su respuestas.

a) {x,y,z} = {z,x,y}

b) {x,x,x} = {x}

c) {ϕ} = ϕ

d) {{x,y}} ⊂ {z,{x,y},w}

e) {x,y} ∈ {x,{x,y}}

f) {x,y} ⊂ {x,{x,y}}

g) {x,y} ⊂ {z,{x,y},y}

h) {x,y} ⊂ {z,{x,y},w}

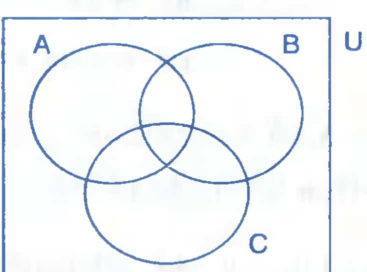
i) {x,y,z} = {y,x,w,x,z}

j) a ⊂ {a}

k) {a} ⊂ {{a}}

e) {a} ∈ {{a}}

35 Dibujar el diagrama que aparece a continuación, tantas veces como sea necesario, para representar, por sombreado, cada uno de los conjuntos que a continuación se indican.



a) A ∩ B

b) A ∩ C

c) A ∩ B ∩ C

d) A ∪ B

e) ∁ A ∩ ∁ B

f) A – B

g) ∁ (A ∩ B)

h) ∁ (A ∪ B)

i) A ∩ ∁ A

j) A ∪ ∁ A

l) A ∩ (B ∪ C)

ll) A ∪ (B ∩ C)

(36) Verificar mediante diagrama de Venn – Euler que se cumple:

a) $A \cup B = B \cup A$ b) $A \cap B = B \cap A$ c) $(A \cap B) \cap C) = A \cap (B \cap C)$

d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

f) $\complement A \cap \complement B = \complement (A \cup B)$ g) $A - B = A \cap \complement B$ h) $\complement A \cup \complement B = \complement (A \cap B)$

(37) Mostrar, utilizando diagrama de Venn –Euler que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

c) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ d) $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$

e) $A \subset (A \cup B)$ f) $B \subset (A \cup B)$ g) $A \cap B \subset A$ h) $A \cap B \subset B$

(38) Simplificar las siguientes proposiciones:

a) $A \cap \phi$ b) $A \cap U$ c) $A \cup \complement A$ d) $A - \phi$

e) $A \cup \phi$ f) $A \cup U$ g) $A \cap \complement A$ h) $\complement (\complement A)$

i) $\complement (A \cap U)$ j) $\complement (A \cap \phi)$ k) $\complement (A \cup \phi)$ l) $\complement (A \cup U)$

(39) Sea $A = \{\phi, 1, \{1\}\}$. Hallar P(A)

(40) Si $A = \{\phi, 1, \{1\}\}$ Hallar P(A), P(P(A))

(41) Sean los conjuntos siguientes A={1,2,3}, $B = \{x \in Z / x^2 - x - 6 = 0\}$, C={x∈N / 2<x<6}, $D = C - (A \cap B)$. Determinar el conjunto potencia de P(P(A)).

(42) Sea $A = \{1, \{\phi\}, \phi\}$ y $B = \{2, \{1\}, \{2\}, \phi\}$, calcular los elementos de:

a) $A \Delta B$ b) $P(A \cap B)$

(43) Sí $A = \{2, \phi\}$. Determinar los elementos de P(P(A))

(44) Dados los conjuntos $A = \{x \in N / x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x \in N / 2x^2 - 7x + 3 = 0\}$, $C = \{2,3\}$ sí $D = (A - B) \cup C$. Hallar el número de elementos de P(D).

(45) Demostrar que: **a)** $A \subset B \Rightarrow A \cap M \subset B \cap M, \forall M$

b) $A \subset B \Rightarrow M \cup A \subset M \cup B, \forall M$

(46) Probar que: **a)** $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \complement B = \phi$ **b)** $\complement A \supset \complement B \Leftrightarrow \complement B \cap A = \phi$

(47) Muestre que: $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

(48) Sean $A, B \subset S$ entonces $B \subset A \Leftrightarrow S - A \subset S - B$.

(49) Sean $A, B \subset S$, entonces $A = B \Leftrightarrow S - A = S - B$.

(50) Muestre que:

a) $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$ **b)** $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$

c) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap (C - B)$ **d)** $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(51) Demostrar las siguientes propiedades:

a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \complement B)$ **b)** $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

c) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$ **d)** $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

e) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ **f)** $A - (B \cup C) = (A - B) - C$

g) $(A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A) = (A \cup B) \cap \complement (A \cap B)$

h) $(A \cup \complement B) \cap (B \cap \complement A) = (A \cap B) \cup \complement (A \cup B)$

(52) Dados los conjuntos A y B, demostrar que:

a) Sí $A - B = \phi$ y $B - A = \phi \Rightarrow A = B$ **b)** Sí $A \Delta B = \phi \Rightarrow A = B$

(53) Demostrar que: $[A \cap B \cap C] \cup [(A - B) - C] = [A - (B - C)] \cap [A - (C - B)]$

(54) Demostrar que: $A' \Delta B' = A \Delta B$

(55) Si A,B,C son conjuntos y $C \subset A'$, entonces demostrar que: $\{[(C \cup B) \cap A] \cup C'\} \cap B = B \cap C$

(56) Probar que: $A - (B \cap A') = A$

(57) Demostrar que:

a) $A'\Delta B = A \Rightarrow A \subset B$

b) $M \subset A$ y $M \subset B \Rightarrow M \subset A \cap B$

c) $A \cap B = \phi \Leftrightarrow B \cap A' = B$

d) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \phi$

e) $A' \cap B \subset (B - A)' \Rightarrow B \subset A$

f) $A = C_x B \Rightarrow A \Delta B = X$

(58) Demostrar que: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

(59) Demostrar por definición que: $P((A \cap B) \cup C) = P(A \cup C) \cap P(B \cap C)$

(60) Probar que sí $B \subset A$, entonces:

a) $A - B \in P(A - B)$

b) $B - A \in P(A - B)$

(61) En una encuesta realizada en un grupo de 100 estudiantes, la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas fueron las siguientes: Ruso 28, Ingles 30, Latín 42, Ruso e Ingles 8, Ruso y Latín 10, Ingles y latín 5, los tres idiomas 3.

a) ¿Cuántos alumnos no estudian ningún idioma?

b) ¿Cuántos alumnos tenían al Latín como único idioma de estudio?

c) ¿Cuántos estudiantes aprendían Ruso o Ingles pero no Latín?

Rpta: **a)** 20 alumnos **b)** 30 alumnos **c)** 38 alumnos

(62) Un club deportivo tiene 48 jugadores de fútbol, 25 de basket y 30 de béisbol, si el total de jugadores en 68 y solo 6 de ellos figuran en los tres deportes:

a) ¿Cuántos figuran exactamente en un deporte?

b) ¿Cuántos figuran exactamente en dos deportes?

Rpta: **a)** 39 **b)** 23

(63) Entre los varones que llegaron en un avión internacional; 40 fueron peruanos y 60 comerciantes, de los peruanos el 75% tenían bigote y la mitad eran comerciantes; 5 de cada 6 comerciantes tienen bigotes; de los peruanos con bigote la mitad eran comerciantes. Hallar:

a) El número de peruanos y comerciantes con bigotes.

b) El número de peruanos o comerciantes con bigotes.

Rpta: **a)** 15 **b)** 65

(64) Un club está constituido por 78 personas, de ellas 50 juegan fútbol, 32 basket y 23 voley. Además 6 figuras en los tres deportes y 10 no practican ningún deporte. Si x es el total de personas que practican exactamente un deporte, y es el total de personas que practican exactamente dos deportes. Hallar x – y. **Rpta:** 12

(65) De 120 personas de cierta universidad se obtuvo la información:

72 alumnos estudian el curso A.

64 alumnos estudian el curso B.

36 alumnos estudian el curso C.

12 alumnos estudian los tres cursos.

¿Cuántos alumnos estudian exclusivamente dos cursos? **Rpta:** 28

(66) En el ensamblaje de autos de cierta planta, han resultado 120 unidades con fallas, los fallas son de embrague, dirección y caja de cambios. Sabiendo que 68 fallan en el embrague por lo menos, 32 en la dirección por lo menos 40 fallan solamente en el embrague, 5 tienen fallas en embrague y dirección pero no en la caja de cambios, 17 tienen fallas en la dirección y caja de cambio pero no en el embrague.

a) ¿Cuántos autos les falla sólo la caja de cambios?

b) ¿Cuántos autos tienen fallas en la caja de cambios por lo menos?

Rpta: **a)** 29 **b)** 69

(67) De una encuesta a 58 personas sobre un producto en sus tres tipos se obtienen los siguientes resultados: 10 usan solo el tipo A, 15 solo usan el tipo B, 12 sólo usan el tipo C, 8 usan el tipo A y B, 5 usan el tipo B y C, 15 usan el tipo A y C. **Rpta:** 1

 **68** ¿Cuántos de los 2000 alumnos están inscritos en matemática básica pero no en física I, sabiendo que, 1050 están inscritos en matemática básica, 750 en física I, 650 en Básica y matemática I, 350 en física I y Básica, 300 en matemática I y física I, 1150 en matemática I, y 200 llevan las tres materias. **Rpta:** 700

 **69** Una encuesta de 200 votantes, revelo la siguiente información conveniente a tres candidatos A, B y C de un cierto partido que se presentaban a tres diferentes cargos:

28 a favor de A y B

98 a favor de A o B pero no a C

42 a favor de B pero no de A o C

122 a favor de B o C pero no de A

64 a favor de C pero no A o B

14 a favor de A y C pero no de B

¿Cuántos votantes estaban a favor?

a) De los tres candidatos b) ¿Solamente de uno de los candidatos?

Rpta: **a)** 8 **b)** 142

 **70** De un grupo de 100 alumnos, 49 no llevan el curso de aritmética; 53 no llevan álgebra y 27 no llevan álgebra ni aritmética ¿Cuántos alumnos llevan uno de los cursos?

Rpta: 48 llevan solo un curso

 **71** Supóngase que Juan come huevos o tocino en el desayuno cada mañana durante el mes de Enero (31 días). Si come tocino durante 25 mañanas y huevos durante 18 mañanas, cuántas mañanas come solamente huevos? **Rpta:** 6

 **72** De 150 personas consultados sobre el deporte que practican manifestaron lo siguiente: 82 juegan fútbol, 54 juegan básquet, 50 solo juegan fútbol, 30 sólo juegan sólo básquet, además, el número de personas que juegan sólo básquet y tenis es la mitad de las que juegan sólo fútbol y tenis: el número de personas que juegan sólo fútbol y básquet es el triple de las que juegan los 3 deportes las personas que no practican ningún deporte son tantos como las que practican sólo tenis. Hallar:

a) El número de personas que practican sólo dos deportes.

b) El número de personas que no practican ninguno de los tres deportes.

Rpta: **a)** 36 **b)** 17

(73) En una investigación efectuada a 370 personas, se determino que: 20 personas leen solamente la revista A, 40 personas leen solamente la revista B y C, 10 personas leen solamente la revista A y B. Él número de personas que leen las revistas A, B y C es: el doble de las que leen solamente la revista B, el cuádruplo de las que leen solamente la revista C y es 8 veces mayor de las que leen solamente las revistas A y C. Hallar él número de personas que leen:

a) Solamente la revista B **b)** Solamente la revista C.

Rpta: **a)** 80 **b)** 40

(74) En la edición de un libro hay un resultado de 120 ejemplares con fallas, en el papel, fallas de Impresión, fallas en encuadernación; si se sabe que 68 libros tienen la primera falla, por lo menos 32 tienen la segunda falla; por lo menos 40 libros tiene la primera falla solamente, 5 tienen la primera y segunda falla, pero no la tercera falla, 17 tienen la segunda y tercera, pero no la primera, 4 tienen las tres fallas, se pregunta:

a) ¿Cuántos libros tienen solamente la tercera falla?

b) ¿Cuántos libros tienen la tercera falla por lo menos?

(75) En la biblioteca de un colegio se realizó una encuesta sobre los libros que más leen los alumnos, obteniéndose los siguientes resultados:

350 alumnos leen los libros de letras

380 alumnos leen los libros de ciencias

350 alumnos leen los libros de artes

además, el número de alumnos que leen sólo asignaturas de artes es $\frac{1}{4}$ de los que leen solo asignatura de ciencias, él número de alumnos sólo leen libros de letras es $\frac{1}{2}$ de los que leen sólo libros de ciencias y letras.

El número de alumnos que leen las tres asignaturas es $\frac{1}{4}$ de los que leen sólo libros de artes y letras y $\frac{1}{3}$ de los que leen sólo libros de artes y ciencias ¿cuántos alumnos leen solamente los libros de ciencias?

(76) Una agencia de turismo realiza una encuesta entre 5000 personas para ver las preferencias en materia de viajes a Cuzco, Iquitos y Trujillo; 2400 personas desean viajar por lo menos al Cuzco. 3000 por lo menos a Trujillo, 2100 por lo menos a Iquitos. 1000 a Trujillo y Iquitos, 800 al Cuzco y a Iquitos. 1500 a Trujillo y el Cuzco y 500 están dispuestos a realizar tres excursiones se preguntan:

a) ¿Cuántos indicaron que no realizaran ningún viaje?

b) ¿Cuántos no mostraron interés por el viaje a Iquitos?

c) ¿Cuántos desean hacer dos excursiones siempre que ninguna sea el Cuzco?

d) ¿Cuántos están dispuestos a realizar dos viajes diferentes?

e) ¿Cuántos viajarán al Cuzco si y sólo si no lo harían a Iquitos ni a Trujillo?

(77) En una encuesta realizada en una Universidad sobre las marcas de cigarros que gustan a los estudiantes, se obtuvieron los siguientes resultados.

28 estudiantes consumen Premier.

22 estudiantes consumen Ducal.

25 estudiantes consumen Winston.

11 estudiantes consumen Premier y Ducal.

15 estudiantes consumen Premier y Winston.

14 estudiantes consumen Ducal y Winston.

8 estudiantes consumen, Premier, Ducal y Winston.

a) ¿Cuántos estudiantes prefieren los cigarrillos Premier o Ducal?

b) ¿Cuántos fueron los estudiantes encuestados?

(78) En una encuesta tomada a 160 ahorristas sobre el destino de sus futuros prestamos se verifico que 120, se comprarían casa y que 90 se comprarían auto. ¿Cuántos se disponían a comprar las dos cosas?.

(79) De un grupo de 120 personas, 45 no estudian ni trabajan; 30 estudian, 9 estudian y trabajan. ¿Cuántas personas trabajan solamente?

(80) Consideremos tres conjuntos A, B, C tales que $A\subset C$, $B\subset C$, $n(C) = 120$, $n(A \cup B) = 90$, $n(A \cap B) = 30$ y $n(A) = n(B) + 30$. Hallar:

a) $n[(C - B) \cap A]$ b) $n[(A \cup B) - (A \cap B)]$

(81) Si A es un conjunto de 8n elementos, B es un conjunto de 5n elementos, y 2n – 1 elementos comunes, hallar la suma de los números de elementos de: $(A \cap B) \cap (A - B)$ y $(A \cup B) \cap (A - B)$.

(82) Demostrar que: $n([A \Delta B) \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap C) - n(B \cap C) - 2n(A \cap B)$

$+ 2n(A \cap B \cap C)$

(83) Demostrar que: $n([A\Delta B]-C)=n(A)+ n(B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) - 2n(A\cap B) + 2n(A\cap B\cap C)$

(84) Si x el máximo número de elementos de $A \cup B \cup C$ y sea z el máximo número de elementos de $D\cap E\cap F$, sí $n(A)=9$, $n(B) = 7$, $n(C) = 10$, $n(D) = 4$, $n(E) = 2$ y $n(F) = 9$. Hallar $x + z$

(85) Sean A y B dos conjuntos tales que: $n(A \cup B) = 24$, $n(A - B) = 10$, $n(B - A) = 6$, hallar $5n(A) - 4n(B)$.

(86) Si los conjuntos A y B son tales que: $n(A \cup B) = 30$, $n(A - B) = 12$ y $n(B - A) = 10$, hallar $n(A) + n(B)$.

(87) Se sabe que "U" es un conjunto universal: $n(B) = 28$, $n(C) = 19$, $n(A \cap B) = 14$, $n(A'\cap B\cap C)=5$, $n(A\cap C')=12$, $n(A\cap B'\cap C)=1$, $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(U) = 50$, calcular $n[(A\cup C)\cap B']$

(88) Si $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ y $n(A \cap B) = 2$, hallar la suma de $n[P(A) \cup P(B)] + n[P(A \cup B)]$

(89) Dado el conjunto U y los subconjuntos A, B y C, se tiene los siguientes datos: $n(U) = 44$, $n(A) = 21$, $n(B) = 17$, $n(A \cap B) = 12$, $n(A \cap B \cap C') = 3$, $n(A \cap B \cap C) = 5$ y $n(A \cup B \cup C) = 6$. Hallar $n(C)$.

(90) A es un conjunto de 8n elementos, B un conjunto de 5n elementos y tiene $2n - 1$ elementos comunes. Si $n(A - B) - n(B - A) = 12$ ¿Cuántos subconjuntos propios tiene $A \cap B$?

(91) Si A es un conjunto de 8n elementos, B un conjunto de 5n elementos y tiene $2n - 1$ elementos comunes, halla la suma de los números de elementos de: $(A \cap B) \cap (A - B)$ y $(A \cup B) \cap (A - B)$.

(92) Sean A y B conjuntos tales que $n(A) = 6$, $n(B) = 3$, $n(A \cap B) = 2$. Hallar $n[P(A \Delta B)]$

(93) Si $n(P) = 15$, $n(Q) = 22$, $n(P \cup Q) = 30$, hallar $n(P \cap Q)$

(94) Si $n(A \cup B) = 14$, $n(A \cap B) = 6$, halle $n(A) + n(B)$.

(95) Si $n(A) = 18$, $n(B) = 20$, $n(A \cap B) = 4$, calcular $n[(A \cup B) \cap (A - B)]$

(96) Si $n(M) = 7x$, $n(R) = 9x$, $n(M \cap R) = 5x + 3$, además $n(M \cup R) = 63$, calcular $n[(M \cup R) \cup (R \cap M')]$

(97) M y N son dos conjuntos tales que: $n(M \cup N) = 16$, $n(M \cap N) = 7$, $n(M) + 3 = n(N)$ ¿Cuántos subconjuntos propios tiene $N - M$?

(98) Si $A = \{2x / x \in Z, 3 < x < 9\}$, $B = \{3n / n \in Z, 5 < n < 10\}$, calcule

$n[(A \cap B)] + n[(A \cup B)]$

(99) Si $A = \{x \in N / x \text{ es impar}, x < 25\}$, $B = \{y / y \in N, y < 20\}$ ¿cuántos elementos tiene $P(A \Delta B)$

(100) Si $A = \{2,3,4,5,...,50\}$, $B = \{2n / n \in Z, 1 < n < 30\}$, calcule $n[(A \cup B) - (A \cap B)]$

CAPITULO III

3. SISTEMA DE NÚMEROS REALES.-

3.1. INTRODUCCIÓN.-

El sistema de los números reales que ahora conocemos, fue obtenido después de muchas reflexiones por parte del hombre.

Desde el comienzo de nuestra civilización, ya se conocían los números enteros positivos, o sea 1, 2, 3, ... Los números enteros tan grandes como 100,000 se utilizaban en Egipto en épocas tempranas, como es 300 A.C.

La aritmética que desarrollaron los antiguos Egipcios y Babilonios con los números enteros positivos mediante los cuáles podían efectuarse las operaciones de adición y multiplicación, aunque la división no se desarrollo por completo.

En estos dichos pueblos usaron ciertas fracciones, es decir que los números racionales también aparecieron en una temprana etapa de nuestra civilización (un numero racional es cociente de dos enteros).

Los que tuvieron mas éxito en el desarrollo de la aritmética y el álgebra fueron los babilonios, ellos tenían una notación para los números, muy superior al de los Egipcios, esta notación, análoga a nuestro sistema decimal, excepto por el hecho de que su base es 60 en lugar 10, una buena notación es el pre – requisito para el desarrollo de los matemáticos.

Nuestro sistema decimal de los números llamados análogos fue creado por los Hindúes e introducido en Europa Occidental en el siglo XII mediante la traducción de textos Arabes. Sin embargo, esta notación demoro demasiado en una aceptación generalizada, mucho más tarde fue la aceptación de los números negativos, que se prolongo hasta finales del siglo XVI se descartaba las raíces negativas de las ecuaciones.

En contradicción de la geometría que desarrollaron los Griegos solamente para su satisfacción intelectual y en su modelo del sistema lógico, con el desarrollo del calculo, los números irracionales tales como $\sqrt{3}$, π, $\sqrt[3]{7}$, tuvieron que sustentarse sobre una fundamentación lógica, esto se logró en la ultima parte del siglo XIX,. Ahora tenemos un sistema de axiomas, que describen completamente los números reales partiendo de estas axiomas podemos deducir todas las propiedades de los números reales.

Esto es el método usado en la Geometría Euclideana, se acepta un cierto numero de proposición a los que se llama axiomas o postulados o hipótesis y basándose en esos axiomas se prueban todas las Teoremas de la Geometría.

3.2. DEFINICIÓN.-

Llamaremos sistema de los números reales a un conjunto R, provisto de dos operaciones adición (+) y multiplicación (.) (leyes de composición interna), y una relación de orden denotado por "<" y el axioma del supremo, es decir:

1° LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA:

$$+: R \times R \longrightarrow R$$
$$(a,b) \longrightarrow +(a,b) = a + b$$

Además debe cumplirse los axiomas siguientes:

A_0 Cerradura: $\forall\ a, b \in R \Rightarrow a + b \in R$

A_1 Conmutatividad: $a + b = b + a\ ,\ \forall\ a,b \in R$

A_2 Asociatividad: $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall\ a,b,c \in R$

A_3 Identidad aditiva: $\forall a \in R, \exists\, 0 \in R / a + 0 = 0 + a = a$

A_4 Opuesto Aditivo: $\forall a \in R, \exists -a \in R$, y es único, tal que: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

2° LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA:

$$\bullet : R \times R \longrightarrow R$$
$$(a,b) \longrightarrow a.b$$

Además debe cumplirse los axiomas siguientes:

M_0 Cerradura: $\forall\ a, b \in R \Rightarrow a.b \in R$

M_1 Conmutativa: $a.b = b.a,\ \forall a,b \in R$

M_2 Asociativa: $(a.b).c = a.(b.c),\ \forall a,b,c \in R$

M_3 Identidad Multiplicativa: $\forall a \in R, \exists\ 1 \neq 0,\ 1 \in R$, tal que: $1.a = a$

M_4 Inverso Multiplicativo: $\forall a \neq 0, \exists\ a^{-1} \in R$, tal que: $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

3° RELACIÓN DE ORDEN:

O_1 $\forall a,b \in R$ una y solamente una de las relaciones se cumple $a < b$, $a = b$, $b < a$ (ley de tricotomía).

O_2 Sí $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$ (transitiva).

O_3 Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c,\ \forall a,b,c \in R$.

O_4 Sí $a < b$, $c > 0$ entonces $a.c < b.c$

OBSERVACIÓN:

i) A los números a y b los llamaremos sumando, y al número $a + b$ suma de a y b.

ii) En a.b; a los números a y b los llamaremos factores y al número a.b producto de a y b.

iii) El opuesto es único, así mismo el inverso es único.

3.3. AXIOMA DE SUSTITUCIÓN.-

Si a y b pertenecen a un conjunto B y si a = b, entonces en toda relación se puede sustituir al elemento a por el elemento b sin que altere el significado de la relación.

3.4. AXIOMAS DISTRIBUTIVAS.-

a) $a.(b + c) = a.b + a.c, \ \forall \ a, b, c \in R$ distributiva a izquierda

b) $(a + b).c = a.c + b.c, \ \forall \ a, b, c \in R$ distributiva a derecha

3.5. TEOREMA DE IGUALDAD PARA LA ADICIÓN.-

Sí $a = b$ entonces $a + c = b + c$, para todo $a, b, c \in R$

Demostración

1° $a = b$. por hipótesis.

2° $a + c = a + c$, propiedad reflexiva.

3° $a + c = b + c$, 1°, 2° y axioma 1.3

3.6. TEOREMA DE IGUALDAD PARA LA MULTIPLICACIÓN.-

Sí $a = b$ entonces $a.c = b.c$, para todo $a, b, c \in R$

Demostración

1° $a = b$ por hipótesis.

2° $a.c = a.c$, propiedad reflexiva.

3° $a.c = b.c$, 1°, 2° y axioma 1.3

3.7. TEOREMA DE CANCELACIÓN PARA LA ADICIÓN.-

Sean $a,b,c \in R$; Sí $a + c = b + c$ entonces $a = b$

Demostración

1° $a + c = b + c$. por hipótesis.

2° $a + c + (-c) = b + c + (-c)$, 1° y teorema 1.4

3° $a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$, 2° y A_2

4° $a + 0 = b + 0$, 3° axioma A_4

5° $a = b$, 4° axioma A_3

3.8. TEOREMA DE CANCELACIÓN PARA LA MULTIPLICACIÓN.-

Sean $a,b,c \in R$; Sí $a.c = b.c$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$

Demostración

1° $a.c = b.c$, ... por hipótesis.

2° $c \neq 0$, ... por hipótesis

3° $\exists\ \frac{1}{c} \in R / (a.c).\frac{1}{c} = (b.c).\frac{1}{c}$, ... 2°, 1° y axioma M_4

4° $a.(c.\frac{1}{c}) = b.(c.\frac{1}{c})$, ... 3° y axioma M_2

5° $a.1 = b.1$, ... 4° y axioma M_4

6° $a = b$, ... 5° y axioma M_3

3.9. SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS REALES.-

DEFINICIÓN.- Para cualquier números reales $a,b \in R$, definiremos a la sustracción de números reales por:

$$a - b = a + (-b)$$

3.10. DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES.-

DEFINICIÓN.- Para cualquier números reales $a,b \in R$, donde $b \neq 0$, definiremos al cociente de números reales por:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}$$

3.11. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Para cada número real a ∈ R, demostrar que a + a = 2a

Demostración

1° a = a.1 ... Por M_3

2° a + a = a.1 + a.1 ... 1° y axioma 1.4

3° a + a = a.(1+1) ... 2° y axioma 1.3.a

4° a + a = a.2 ... 3° y por M_3

5° a + a = 2a ... 4° y por M_3

(2) Para cada número real a ∈ R, demostrar que a.0 = 0

Demostración

1° a.0 = a.0 + 0 ... Por A_3

2° a.0 = a.0 + (a + (-a)) ... 1° y por A_4

3° a.0 = (a.0 + a) + (-a) ... 2° y por A_2

4° a.0 = (a.0 + a.1) + (-a) ... 3° y por M_3

5° a.0 = a(0 + 1) + (-a) ... 4° y por axioma 1.3.a

6° a.0 = a.1 + (-a) ... 5° y por A_3

7° a.0 = a + (-a) ... 6° y por M_3

8° a.0 = 0 ... 7° y por A_4

(3) Para cada número real a ∈ R, demostrar que: -a = (-1).a

Demostración

Basta demostrar que a + (-1)a = 0, porque (-1).a, y –a son inversos aditivos de a por A_4

Luego $a + (-1)a = 1.a + (-1)a,$ ... por axioma 1.3

$a + (-1)a = (1 + (-1))a,$ ... por axioma 1.3.b.

$a + (-1)a = 0.a,$ ... por A_4

$a + (-1)a = 0,$ ... por ejercicio 2.

$\therefore \quad -a = (-1)a$

(4) Para cada número real a ∈ R, demostrar que -(-a) = a

Demostración

1° $a + (-a) = 0$ ... por A_4

2° $(-a) + (-(-a)) = 0$ ... por A_4

3° $(-a) + (-(-a)) = a + (-a)$ ... 1°, 2°

4° $-(-a) = a$ ... 3° y por teorema 1.6

(5) Para cada número real a,b ∈ R, demostrar que (-a).(-b) = a.b

Demostración

1° $(-a).(-b) = [(-1)a][(-1)b]$ ... por el ejercicio 3

2° $(-a).(-b) = (-1)[a((-1)b)]$ ... 1° y M_2

3° $(-a).(-b) = (-1)[(-1)a].b$ ... 2° y M_1, M_2

4° $(-a).(-b) = (-1)[(-a)].b$ ... 3° y ejercicio 3

5° $(-a).(-b) = [(-1)(-a)].b$ ... 4° y M_2

6° $(-a).(-b)=a.b$ ... 5° y ejercicio 4

(6) ∀ a,b ∈ R, demostrar que a.(-b) = -(a.b)

Demostración

1° $a.(-b) = a.((-1).b)$ ... por ejercicio 3

2° a.(-b) = (a.(-1)).b ... 1° y por M_2

3° a.(-b) = ((-1)a).b ... 2° y por M_1

4° a.(-b) = (-1)(a.b) ... 3° y por M_2

5° a.(-b) = -(a.b) ... 4° y ejercicio 3

6° -(a-b) = (-1)(a.b) ... Por el ejercicio 3

7° -(ab) = ((-1)a).b ... 6° y por M_2

8° -(ab) = (-a).b ... 7° y ejercicio 3.

9° a(-b) = -(ab) = (-a).b ... 5° y 8°

7 ∀ a,b ∈ R, demostrar que a.(b - c) = a.b – a.c

Demostración

1° a.(b - c) = a.(b + (-c)) ... definición de sustracción

2° a.(b - c) = a.b + a.(-c) ... 1° y axioma 1.3.a

3° a.(b - c) = a.b + (-(a.c)) ... 2° ejercicio 6

4° a.(b - c) = a.b – a.c ... 3° definición de sustracción

 Para a ∈ R, demostrar sí a ≠ 0, entonces $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Demostración

1° $a^{-1} = (a^{-1}).1$ ... por M_3

2° $a^{-1} = 1.(a^{-1})$ ... 1° y M_1

3° $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ... 2° definición de división

9 $\forall$ a,b $\in$ R, a.b $\neq$ 0, demostrar que $(a.b)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Demostración

1° $(a.b).\dfrac{1}{(ab)} = 1$ ... por M_4

2° $(a.b).(a.b)^{-1} = 1$ ... 1° y definición de división

3° $(a.b).(a^{-1}b^{-1}) = (a).(a)^{-1}.(b).(b^{-1})$ ... por M_2

4° $(a.b).(a^{-1}b^{-1}) = (a.\dfrac{1}{a}).(b.\dfrac{1}{b})$ ... 3°, M_2 y definición de división.

5° $(a.b).(a^{-1}b^{-1}) = (1)(1) = 1$ ... 4° y M_4

6° $(a.b).(a^{-1}b^{-1}) = 1$ ... de 5°

7° $(a.b).(a.b)^{-1} = (a.b)(a^{-1}b^{-1})$ ... de 2° y 6°

8° $(a.b)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ ... 7° y teorema 1.7



$\forall$ a,b,c,d $\in$ R, b $\neq$ 0, d $\neq$ 0, demostrar que: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a.d + b.c}{b.d}$

Demostración

1° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = a.b^{-1} + c.d^{-1}$ ... por definición de división

2° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = (a.b^{-1}).(d.\dfrac{1}{d}) + (c.d^{-1}).(b.\dfrac{1}{b})$ ... 1° y por M_4

3° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = (a.b^{-1}).(d.d^{-1}) + (c.d^{-1}).(b.b^{-1})$ ... 2° y definición por división.

4° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a.d).(b^{-1}.d^{-1})+(b.c).(b^{-1}.d^{-1})$ ... 3°, M_2

5° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a.d).(b.d)^{-1}+(b.c).(b.d)^{-1}$ ... 4° y ejercicio 9

6° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a.d+b.c).(bd)^{-1}$ ... de 5° y axioma 1.3.b.

7° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{bd}$ ... 6° y definición de división

3.12. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES.-

Entre los números reales y los puntos de una recta se puede establecer una correspondencia, es decir:

Si sobre una recta se fija su origen "O", una unidad, y un sentido positivo, entonces, a cada punto de una recta le corresponde un número real y recíprocamente, a cada número real le corresponde un único punto de la recta, al número real correspondiente a un punto de la recta se le llama abscisa del punto.



NOTACIÓN PARA LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS.-

N: Conjunto de los números naturales.

Z: Conjunto de los números enteros.

Q: Conjunto de los números racionales.

I: Conjunto de los números irracionales.

R: Conjunto de los números reales.

C: Conjunto de los números complejos.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

R
- Q racionales
  - $Z_0^+ = \begin{cases} N = \{1, 2, ..., n, ..\} \\ N_0 = \{0, 1, 2, ..., n, ...\} \end{cases}$ entero positivo
  - Z^- enteros negativos
  - Decimales periódicos $= 0.\overline{abc} = \dfrac{abc}{999}$
  - Decimales periódico mixto $= 0.ab\overline{cde} = \dfrac{abcde - ab}{99900}$
  - Decimales exactos $= 0.abc = \dfrac{abc}{1000}$
- $Q = \{\frac{a}{b} / \ a, b \in Z, \ \ b \neq 0\}$
- I Irracionales
  - propios: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...
  - trascendentes = {e, π,...}

3.13. DESIGUALDADES.-

La correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta pueden usarse para dar una interpretación geométrica de la relación de orden entre los números reales.

La relación a < b significa que sobre una recta numérica el punto A corresponde al número "a", que se encuentra a la izquierda del punto B correspondiente al número "b".



El símbolo < se lee "Es menor que". También usaremos los símbolos siguientes:

>,	que se lee "Es mayor que".
≤,	que se lee "Es menor o igual que".
≥,	que se lee "Es mayor o igual que".

3.13.a DEFINICIÓN.-

i) Un número real "a" es positivo sí, $a > 0$.

ii) Un número real "a" es negativo sí, $a < 0$.

3.13.b DEFINICIÓN.-

Llamaremos desigualdad a una expresión que indica que un número es mayor o menor que otro. Por ejemplo: $5 < 9$.

3.14. AXIOMA DE LA RELACIÓN DE ORDEN.-

$\forall$ a,b,c $\in$ R., se tiene:

O_1 Orden de tricotomía: una y sólo una de las siguientes posibilidades se cumple:
$a = b \vee a < b \vee a > b$

O_2 Orden transitivo: sí $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

O_3 Orden de adición: sí $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

O_4 Orden Multiplicativo: sí $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$

En base a estos axiomas daremos las siguientes definiciones:

3.15. DEFINICIÓN.-

i) $a < b \Leftrightarrow b - a$ es positivo.

ii) $a > b \Leftrightarrow a - b$ es positivo.

iii) $a \le b \Leftrightarrow a = b \vee a < b$

iv) $a \ge b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

3.16. TEOREMA.-

$\forall$ a,b,c,d $\in$ R; Sí $a < c \wedge b < d \Leftrightarrow a + b < c + d$

Demostración

1° $a < c$ por hipótesis

2° $a + b < b + c$ 1° y O_3.

3°	$b < d$	por hipótesis
4°	$b + c < c + d$	3° y O_3
5°	$a + b < c + d$	2°, 4° y O_2

3.17. TEOREMA.-

Para $a, b \in R$, si $a < b \Rightarrow -a > -b$

Demostración

1°	$a < b$	por hipótesis
2°	$b - a > 0$	1° y definición 1.14 i.
3°	$(b - a) + (-b) > 0 + (-b)$	2° y O_3
4°	$-a + (b + (-b)) > -b$	3°, A_2 y A_3
5°	$-a + 0 > -b$	4° y A_4
6°	$-a > -b$	5° y A_3

3.18. TEOREMA.-

Sí $a, b, c \in R$, donde $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

Demostración

1°	$a < b$	por hipótesis
2°	$c < 0$	por hipótesis
3°	$-c > 0$	2° y definición 1.14.i)
4°	$-a.c < -b.c$	1°, 3° y O_4 y ejercicio 6
5°	$a.c > b.c$	4° y teorema 1.16

3.19. TEOREMA.-

Para $a \in R$, $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Demostración

1°	$a \neq 0$	por hipótesis
2°	$a > 0 \vee a < 0$	1° y O_1
3°	sí $a > 0 \Rightarrow a.a > 0.a$	2° y O_4
4°	$a^2 > 0$	3° y ejercicio 2
5°	sí $a < 0 \Rightarrow -a > 0$	2° y definición 1.15i
6°	$(-a)(-a) > 0.(-a)$	5° y O_4
7°	$a^2 > 0$	6°, ejercicio 2 y 5

3.20. TEOREMA.-

Para $a \in R, a \neq 0$ entonces a^{-1} tiene el mismo signo que "a" es decir:

i) Sí $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$ **ii)** Sí $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

Demostración

i)

1°	$a > 0$	por hipótesis
2°	$a^{-1} < 0$	hipótesis auxiliar
3°	$a.a^{-1} < 0$	1°, 2° y teorema 1.18
4°	$1 < 0$	3° y M_4 es absurdo
5°	$a^{-1} > 0$,	por 2° y 4°
6°	Sí $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$	1° y 5°

ii) Su demostración es en forma similar.

3.21. TEOREMA.-

Para a,b ∈ R, donde a y b tienen el mismo signo, sí $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

Demostración

Como a y b tienen el mismo signo entonces se tiene dos casos:

i) $a > 0 \wedge b > 0$ ii) $a < 0 \wedge b < 0$

i) 1° $a < b$ por hipótesis

2° $a > 0 \wedge b > 0$ por hipótesis

3° $a^{-1} > 0 \wedge b^{-1} > 0$ 2°, teorema 1.20

4° $a.a^{-1} < b.a^{-1}$ 3° y 1°; O_4

5° $(a.a^{-1})b^{-1} < (b.a^{-1})b^{-1}$ 3° y 4°; O_4

6° $(a.a^{-1})b^{-1} < (b.b^{-1})a^{-1}$ 5° y M_2

7° $1.b^{-1} < 1.a^{-1}$ 6° y M_4

8° $b^{-1} < a^{-1}$ 7° y M_3

9° sí $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$ 1° y 8°

ii) Su demostración es en forma similar.

3.22. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Si $a \geq b \geq 0$, Demostrar que: $a^2 \geq b^2$, donde a,b ∈ R.

Demostración

Por hipótesis se tiene $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$

Como $a \geq b \Rightarrow a + b \geq 2b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$ ... (α)

$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$ ... (β)

de (α) y (β) se tiene: $(a + b)(a - b) \geq 0.(a - b)$

de donde $a^2 - b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$ $\therefore$ Sí $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$

(2) Sí $a.b > 0$ y $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$

Demostración

Por hipótesis se tiene $a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$ de donde $(a + b)(a - b) > 0$ ... (α)

como $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0$, de donde $\frac{1}{a+b} > 0$ ... (β)

de (α) y (β) se tiene $\frac{(a+b)(a-b)}{a+b} > 0$, de donde $a - b > 0$ entonces $a > b$.

(3) Si $b > a > 0$ y $c > 0$. Demostrar: $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

Demostración

Como $b > a > 0 \Rightarrow a.b > 0$ ... (1)

$b > a$ y $c > 0 \Rightarrow b.c > a.c$ ... (2)

en (2) sumando $a.b > 0$ en ambos lados. $a.b + b.c > a.b + a.c$

$b.(a + c) > a.(b + c)$, de donde: $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

(4) Si $a,b,c,d > 0$ y $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ Demostrar $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$

Demostración

Como $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, donde $b,d > 0 \Rightarrow a.d > b.c$ ... (1)

Además $c > 0$, $d > 0$ entonces $c.d > 0$

Sumando $c.d > 0$, a ambos miembros en **(1)**: $a.d + c.d > b.c + c.d$

d.(a + c) > c.(b + d), de donde: $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$

(5) Para a,b,c números reales. Demostrar que $a^2 + b^2 + c^2 \geq a.b + a.c + b.c$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} \forall\ a,b \in R,\ (a-b)^2 \geq 0 \\ \forall\ a,c \in R,\ (a-c)^2 \geq 0 \\ \forall\ b,c \in R,\ (b-c)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2 + b^2 - 2a.b \geq 0 \\ a^2 + c^2 - 2a.c \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2b.c \geq 0 \end{array}$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a.b + a.c + b.c) \geq 0$$

de donde $a^2 + b^2 + c^2 \geq a.b + a.c + b.c$

(6) ∀ a,b ∈ R^+, demostrar que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

Solución

Como a,b ∈ R^+ $\Rightarrow$ $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in$ R

Sí $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in$ R $\Rightarrow$ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, de donde $a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$$

(7) Demostrar que sí a < b, Entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

Demostración

Como $a < b \Rightarrow a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b$ ... **(1)**

$a < b \Rightarrow a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b$ ... **(2)**

de (1) y (2) por transitividad se tiene: $2a < a + b < 2b$ $\therefore \quad a < \frac{a+b}{2} < b$

(8) Demostrar que si, $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, entonces: $1 \geq$ a.c + b.d. para a,b,c,d ∈ R

Demostración

$\forall$ a.c $\in$ R, $(a-c)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a^2+c^2 \geq 2a.c$ **... (1)**

$\forall$ b,d $\in$ R, $(b-d)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; b^2+d^2 \geq 2b.d$ **... (2)**

sumando (1) y (2) se tiene: $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 2(a.c+b.d)$

$2 \geq 2(a.c+b.d)$ $\qquad \therefore\; 1 \geq a.c+b.d$

(9) $\forall$ a,b,c,d $\in R^+$ y n $\in Z^+$, demostrar que: $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 4(abcd)^{n/2}$

Demostración

a,b $\in R^+ \;\Rightarrow\; a^n, b^n \in R^+$, pero $a^n-b^n \in$ R, entonces:

$(a^n-b^n)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a^{2n}+b^{2n} \geq 2a^nb^n$ **... (1)**

c,d $\in R^+ \;\Rightarrow\; c^n, d^n \in R^+$, pero $c^n-d^n \in$ R, entonces:

$(c^n-d^n)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; c^{2n}+d^{2n} \geq 2c^nd^n$ **... (2)**

Sumando (1) y (2) se tiene: $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 2(a^nb^n+c^nd^n)$ **... (3)**

$(\sqrt{a^nb^n}-\sqrt{c^nd^n})^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a^nb^n+c^nd^n \geq 2\sqrt{a^nb^nc^nd^n}$ **... (4)**

$a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 4\sqrt{a^nb^nc^nd^n}$

$\therefore\; a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 4(abcd)^{n/2}$

(10) Si a + b + c = 1, donde a,b,c > 0. Demostrar que (1 – a)(1 – b)(1 – c) ≥ 8abc

Demostración

Como a,b,c > 0 $\Rightarrow\; \sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c} > 0$ entonces:

$$\begin{cases} \sqrt{b}-\sqrt{c} \in R \\ \sqrt{a}-\sqrt{c} \in R \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ a+c \geq 2\sqrt{ac} \\ a+b \geq 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

$(b + c)(a + c)(a + b) \geq 8abc$ ... **(1)**

Pero sí $a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-a=b+c \\ 1-b=a+c \\ 1-c+a+b \end{cases}$ ... **(2)**

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 8abc$

(11) Si $a,b,c,d \in R^+$, Demostrar que: $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$

Demostración

Como $a,b,c,d \in R^+ \Rightarrow ab \geq 0,\ cd \geq 0,\ ac \geq 0,\ bd \geq 0$

De donde $\sqrt{ab}-\sqrt{cd} \in$ R, y $\sqrt{ac}-\sqrt{bd} \in$ R, entonces:

$$\begin{cases} (\sqrt{ab}-\sqrt{cd})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{ac}-\sqrt{bd})^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab+cd \geq 2\sqrt{abcd} \\ ac+bd \geq 2\sqrt{abcd} \end{cases}$$

multiplicando se tiene: $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$

(12) Sean $a,b,c,d \in R^+$ tal que $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, demostrar que: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Demostración

Como $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow a.d < b.c$ por que $b,d \in R^+$ $a.d < b.c$, sumando a.b, a ambos miembros $ad + ab < bc + ab$, factorizando

$a(b + d) < b(a + c)$, de donde $\boxed{\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}}$ ... **(1)**

En $ad < bc$ sumando cd, a ambos miembros $ad + cd < bc + cd$,

Factorizando d(a + c) < c(b + d), de donde: $\boxed{\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}}$ ... **(2)**

De (1) y (2) se tiene: $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d} \wedge \dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$

De donde por transitividad se tiene: $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$

(13) Si a,b,c y d, son números reales cualesquiera. Demostrar que: $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd$

Demostración

Como a,b,c,d ∈ R ⇒ $a^2,b^2,c^2,d^2\in R$, además:

$$\begin{cases} a^2-b^2\in R \\ c^2-d^2\in R \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (a^2-b^2)^2\geq 0 \\ (c^2-d^2)^2\geq 0 \end{matrix}$$

de donde al efectuar se tiene: $a^4+b^4\geq 2a^2b^2$ ... **(1)**

$c^4+d^4\geq 2c^2d^2$ ... **(2)**

Sumando (1) y (2) miembro a miembro se tiene:

$a^4+b^4+c^4+d^4\geq 2(a^2b^2+c^2d^2)$ ... **(3)**

Como ab, cd ∈ R ⇒ ab − cd ∈ R, entonces: $(ab-cd)^2\geq 0$ de donde

$a^2b^2+c^2d^2\geq 2abcd \Rightarrow 2(a^2b^2+c^2d^2)\geq 4abcd$ ... **(4)**

de (3) y (4) por transitividad se tiene: $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd$

(14) Si a > 0, a ∈ R, demostrar que: $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$

Demostración

Como $a>0 \Rightarrow \sqrt{a}>0$, de donde $\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\in R$ por lo tanto

$(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}})^2 \geq 0$, desarrollando se tiene: $a-2+\frac{1}{a}\geq 0$ de donde $a+\frac{1}{a}\geq 2$

(15) Si a,b,c, ∈ R^+, demostrar que: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

Demostración

Por hipótesis se tiene que a,b,c > 0, entonces

$\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{c}>0$, $\frac{a}{c}>0$ entonces aplicando el ejercicio 14).

Se tiene: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ **... (1)**

Ahora a (1) multiplicamos por c,a,b respectivamente.

$$\begin{cases}\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\geq 2c\\ \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}\geq 2a\\ \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b\end{cases} \Rightarrow 2\frac{ac}{b}+2\frac{bc}{a}+2\frac{ab}{c}\geq 2c+2a+2b$$

$2(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})\geq 2(a+b+c)$ $\therefore$ $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

(16) Si a ≥ 0, b ≥ 0, demostrar que: $\frac{a+b}{a+b+1}\leq\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}$

Demostración

Como a ≥ 0, b ≥ 0, entonces a + 1 ≥ 1, b + 1 ≥ 1 luego se tiene:

$$\begin{cases}a+1\geq 1\\ b+1\geq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b+1\geq b+1\\ a+b+1\geq a+1\end{cases}$$

ahora invirtiendo cada una de las desigualdades: $\frac{1}{a+b+1}\leq\frac{1}{b+1}$ y $\frac{1}{a+b+1}\leq\frac{1}{a+1}$

multiplicando a las desigualdades por a y b respectivamente.

$$\frac{a}{a+b+1}\leq\frac{a}{b+1} \quad \text{y} \quad \frac{b}{a+b+1}\leq\frac{b}{a+1}$$

Sumado estas dos desigualdades se tiene: $\frac{a+b}{a+b+1}\leq\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}$

(17) Si a,b $\in$ R, b $\neq$ 0, demostrar que: $\frac{1}{a^2+ab+b^2}\leq\frac{4}{3b^2}$

Demostración

Completando cuadrado en a^2+ab+b^2 se tiene: $a^2+ab+b^2=(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}$ **... (1)**

Como a,b $\in$ R $\Rightarrow$ $a+\frac{b}{2}\in$ R, de donde $(a+\frac{b}{2})^2\geq 0$

Sumando $\frac{3b^2}{4}$ se tiene: $(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}\geq\frac{3b^2}{4}$ **... (2)**

Ahora de (1) y (2) se tiene.

$a^2+ab+b^2\geq\frac{3b^2}{4}$ como b $\neq$ 0 invertimos $\frac{1}{a^2+ab+b^2}\leq\frac{4}{3b^2}$

(18) Si a > 0 y b < 0, Demostrar que: $\frac{b+1}{a}<\frac{1}{a}$

Demostración

Como a > 0, b < 0 $\Rightarrow$ ab < 0, sumando "a" a ambos miembros se tiene:

a + b.a < a, de donde a(b + 1) < a **... (1)**

Como a > 0 $\Rightarrow$ $\frac{1}{a^2}>0$, ahora multiplicamos a (1) por $\frac{1}{a^2}$

Obteniéndose $\frac{a(b+1)}{a^2}<\frac{a}{a^2}$ simplificando $\therefore\ \frac{b+1}{a}<\frac{1}{a}$

(19) Si $a > 0, b > 0$ tal que $a + b = 1$, demostrar que: $ab \leq \frac{1}{4}$

Demostración

Como $a > 0, b > 0 \Rightarrow a - b \in R$, de donde:

$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ sumando 4ab.

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$ de donde: $(a+b)^2 \geq 4ab$

pero como $a + b = 1$, se tiene $1 \geq 4ab$, por lo tanto $ab \leq \frac{1}{4}$

(20) Si $a > 0, b > 0, 3a \neq 5b$, demostrar que: $\frac{3a}{5b} + \frac{5b}{3a} > 2$

Demostración

Como $3a \neq 5b \Rightarrow 3a - 5b \neq 0$ y $3a - 5b \in R$ entonces $(3a - 5b)^2 > 0$

Desarrollando se tiene: $9a^2 - 30ab + 25b^2 > 0$

Sumando 30ab, a ambos miembros: $9a^2 + 25b^2 > 30ab$ multiplicando por $\frac{1}{15ab}$

$\frac{9a^2 + 25b^2}{15ab} > \frac{30ab}{15ab}$, de donde: $\frac{3a}{5b} + \frac{5b}{3a} > 2$

3.23. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Si a y b son números reales positivos, demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a+b) \geq 4$

(2) Si a,b,c son números reales positivos, demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})(a+b+c) \geq 9$

(3) Si a,b,c,d son números reales positivos, demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d})(a+b+c+d) \geq 16$

(4) Si a y b dos números reales positivos tal que $a \geq b$, demostrar que: $\frac{a}{b}+\frac{3b}{a} \geq \frac{b^2}{a^2}+3$

(5) $\forall\ a \in R,\ a \neq 0$, demostrar que: $a^2+\frac{9}{a^2} \geq 6$

(6) Si $a,b,c \in R^+$, demostrar que: $(b+c)(a+c)(a+b) \geq 8abc$

(7) Si $a,b \in R$, demostrar que: $a^3b+ab^3 \leq a^4+b^4$

(8) Si $a,b,c \in R$, demostrar que: $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$

(9) Si $0 < a < 1$, demostrar que $a^2 < a$

(10) Si a,b,c son números reales positivos y $\frac{d}{a}<\frac{e}{b}<\frac{f}{c}$. Demostrar que: $\frac{d}{a}<\frac{d+e+f}{a+b+c}<\frac{f}{c}$

(11) Demostrar que si a,b,c son números positivos y no iguales entre si, entonces: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > 9abc$

(12) Si a,b,c son números positivos y no iguales entre si. Demostrar que: $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}) > 9$

(13) Si a y b son números reales diferentes de cero. Demostrar que: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{16b^2}{a^2}+24 \geq \frac{8a}{b}+\frac{32b}{a}$

(14) Si $a^2+b^2=1$. Demostrar que: $-\sqrt{2} \leq a+b \leq \sqrt{2}$

Sug. $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$

(15) Si $a+b=c$, $a>0$, $b>0$, demostrar que: $a^{2/3}+b^{2/3} > c^{2/3}$

(16) Si $a+b \geq c > 0$, demostrar que: $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}$

(17) Si a,b,c ≥ 0, demostrar que: $3abc \le a^3 + b^3 + c^3$

(18) Si c > 0, d > 0, 2d ≠ 3c, demostrar que: $\frac{d}{3c} > 1 - \frac{3c}{4d}$

(19) Si a > 0, b > 0, a ≠ b, demostrar que: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} > 2$

(20) Si a,b,c ∈ R, demostrar que: $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \ge abc(a+b+c)$

(21) Sea a + b = 2, donde a y b son números reales, demostrar que: $a^4 + b^4 \ge 2$

(22) Si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, demostrar que: ax + by + cz ≤ 1

(23) Si a > 0, b >0, demostrar que: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(24) Si 0 < a < 1, demostrar que: $a^2 < a$

(25) Si a,b > 0, demostrar que: $\sqrt{ab} \ge \frac{2ab}{a+b}$

(26) Si a > 0, b > 0, demostrar que: $\frac{a^3 + b^3}{2} \ge (\frac{a+b}{2})^3$

(27) Si a > 0, a ≠ 1, demostrar que: $a^3 + \frac{1}{a^3} > a^2 + \frac{1}{a^2}$

(28) Si a > 0 y b > 0, demostrar que: $4(a^3 + b^3) \ge (a+b)^3$

(29) Si a y b son números reales, demostrar que: $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

(30) Si a,b,c ∈ R^+, demostrar que: $(a+b+c)^3 \ge 27abc$

(31) Si a,b,c y d son números reales cualesquiera. Demostrar $(ab + cd)^2 \le (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$

(32) Si a,b ∈ R, demostrar que: $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4$

(33) Si a > 0 y b > 0, demostrar que: $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{1}{2}(\frac{(a+b)^2+4}{a+b})^2$

(34) Si a > 0, b > 0 tal que a + b = 1, demostrar que: $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$

(35) Si a,b,c,d ∈ R, demostrar que: $ac+bd \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

(36) Si a,b ∈ R tal que a + b = 1, demostrar que: $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$

(37) Si a,b ∈ R tal que a + b = 3, demostrar que: $a^4+b^4 \geq \frac{81}{8}$

(38) Si a,b,c,d ∈ R^+, demostrar que: $\frac{1}{4}(a+b+c+d) \geq \sqrt[4]{abcd}$

(39) Si $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n \in R$ tal que: $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=1$, $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2=1$, demostrar que: $a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \leq 1$

(40) Demostrar que si -1 < a < 0 entonces $a^3 > a$

(41) Si –a > 0 y $(a-b)^2 > (a+b)^2$, entonces b >0

(42) Si a, b ∈ R, tal que 2a +4b = 1, Demostrar que: $a^2+b^2 \geq \frac{1}{20}$

(43) Si a > 0, b > 0 ⇒ $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$

(44) Si $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ y si $\beta = \sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}$ y $\alpha = \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}$, demostrar que: $\beta \leq \alpha$.

(45) Si a,b,c,m,n,p ∈ R / m > 0, n > 0, p > 0: $\frac{a}{m} < \frac{b}{n} < \frac{c}{p}$ entonces: $\frac{a}{m} < \frac{b+a+c}{m+n+p} < \frac{c}{p}$

(46) Probar que si $a_1 < a_2 < ... < a_n$ entonces $a_1 < \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} < a_n$

(47) Demostrar que si $0 < a < b < c$ entonces: $\frac{a^3 - b^3}{3c(b-a)} < a + b + c$

(48) Probar que: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4|abcd|$ para a,b,c,d ∈ R

(49) Si a,b,c > 0, demostrar que: $2(a^3 + b^3 + c^3) > bc(b+c) + ac(c+a) + ab(a+b)$

(50) Demostrar que: $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc(a+b+c)$ ∀ a,b,c ∈ R

(51) ∀ x ∈ R y n par, demostrar que: $\frac{x^n}{x^{2n}+1} \leq \frac{1}{2}$

(52) Demostrar que si $r > 0$ y $a < b$ entonces a $a < \frac{a+br}{1+r} < b$

(53) Si a y b son números positivos y distintos, demostrar que: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(54) Consideremos x, y, z, w números reales, demostrar que:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq \frac{2}{3}(xy + xz + xw + yz + yw + zw)$$

(55) Si a y b son números desiguales positivos demostrar que: $a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$

(56) Si a,b y c son números positivos distintos. Demostrar que: $(a+b+c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$

(57) Si a y b son números positivos distintos, demostrar que: $(a^3 + b^3)(a+b) > (a^2 + b^2)^2$

(58) Si x,y son números distintos, demostrar que: $(x^4 + y^4)(x^2 + y^2) > (x^3 + y^3)^2$

(59) Si x,y,z son números positivos distintos, demostrar que:

$xy(x + y) + yz(y + z) + xz(x + z) > 6xyz$

(60) Demostrar que: $a \leq b < 1 \Rightarrow \frac{a-2}{a-1} \leq \frac{b-2}{b-1}$

(61) Sean a,b,c,x,y,z números positivos distintos, demostrar que:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) > (ax+by+cz)^2$

(62) Demostrar que: $0 < d < c \Rightarrow \frac{c^3}{3} - \frac{d^3}{3} > d^2(c-d)$

(63) Sí $0 \leq d < c \Rightarrow d^3(c-d) < \frac{c^4}{4} - \frac{d^3}{3} < c^2(c-d)$

(64) Si $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, demostrar que:

a) $xyz = 1 \Rightarrow x + y + z \geq 3$

b) $xyz = 1 \wedge x + y + z = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

(65) Demostrar que: $x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$ (sug: $\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x} = 1$ y ejercicio 64)

(66) Demostrar para todo a y b real $\sqrt[3]{ab} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{a^2+b^2}$

(67) Si x e y ∈ R, demuestre que: $|x| + |y| \geq |x+y|$

(68) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^+$ tal que $x_1.x_2 \ldots x_n = 1$. Entonces $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 1$

(69) Si a,b ∈ R, demostrar que: $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$

(70) Si $a > 0$, probar que: $\frac{x^2+1+a}{\sqrt{x^2+a}} \geq a+1$

(71) Si a,b,c ∈ R^+ ,y si $a^2+b^2+c^2 = 8$, demostrar que: $a^3+b^3+c^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}$

(72) Si $a > 0$, $b > 0$, demostrar que: $(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})(a^2+b^2) \geq 4$

(73) Demostrar que sí a,b,c nos números reales positivos entonces $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

(74) Sí ∀ a,b∈ R tal que $a \geq 0 \wedge b > 0$ y $a \leq x^2 < b \Rightarrow \sqrt{a} \leq x < \sqrt{b} \vee -\sqrt{b} < x \leq -\sqrt{a}$

(75) Si $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, tal que $x_1.x_2....x_n = 1$. Demostrar que $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$

(76) Si $a,b \in R^+$, Demostrar que $(a^2+b^2)(a+b)^2 \geq 8a^2b^2$

(77) Si a + b + c = 0, Demostrar que: $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

(78) Si $a,b \in R^+$, Demostrar que $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$

3.24. INECUACIONES.-

3.24.1 DEFINICIÓN.- Una inecuación es una desigualdad en las que hay una o más cantidades desconocidas (incógnita) y que sólo se verifica para determinados valores de la incógnita o incógnitas.

Ejemplo.- La desigualdad: 2x + 1 > x + 5, es una inecuación por que tiene una incógnita "x" que se verifica para valores mayores que 4.

3.24.2 INTERVALOS.- Los intervalos son sub-conjuntos de los números reales que sirven para expresar la solución de las inecuaciones, estos intervalos sé representan gráficamente en la recta numérica real.

Consideremos los siguientes tipos de intervalos:

a) **Intervalo cerrado.-** a ≤ b

$[a,b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$



b) **Intervalo abierto.-** a < b

$<a,b> = \{x \in R / a < x < b\}$



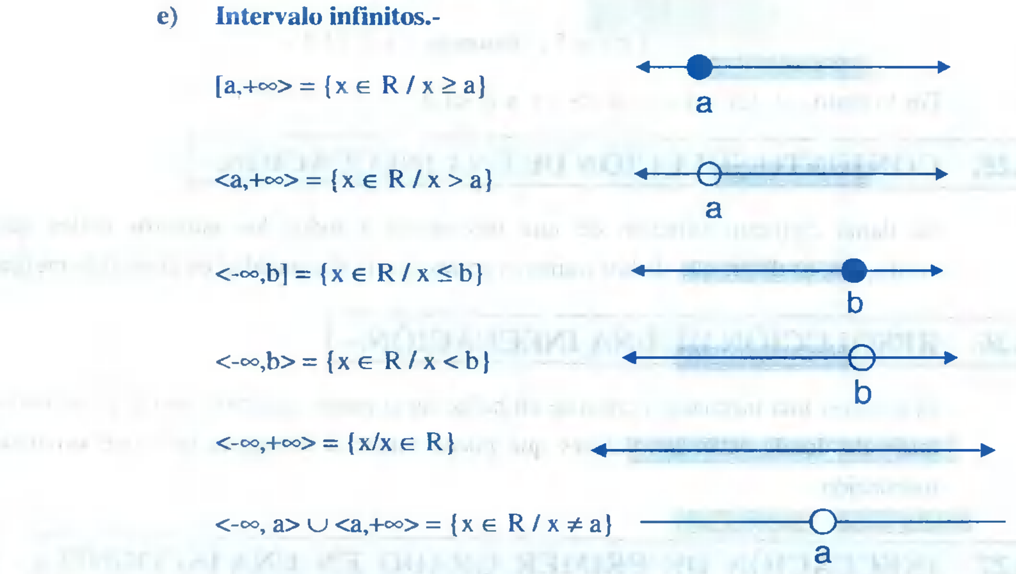
c) Intervalo cerrado en a y abierto en b.-

$[a,b\rangle = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$

d) Intervalo abierto en a y cerrado en b.-

$\langle a,b] = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$

e) Intervalo infinitos.-



$[a,+\infty\rangle = \{x \in R \,/\, x \geq a\}$

$\langle a,+\infty\rangle = \{x \in R \,/\, x > a\}$

$\langle -\infty,b] = \{x \in R \,/\, x \leq b\}$

$\langle -\infty,b\rangle = \{x \in R \,/\, x < b\}$

$\langle -\infty,+\infty\rangle = \{x / x \in R\}$

$\langle -\infty, a\rangle \cup \langle a,+\infty\rangle = \{x \in R \,/\, x \neq a\}$

Nota.- (1) $\boxed{\text{Sí } x \in [a,b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b}$

Ejemplo.- Demostrar que: sí $x \in [2,4]$ entonces $2x + 3 \in [7,11]$

Solución

$x \in [2,4] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$, multiplicando por 2

$4 \leq 2x \leq 8$, sumando 3

$7 \leq 2x + 3 \leq 11$

Sí $7 \leq 2x + 3 \leq 11 \Rightarrow 2x + 3 \in [7,11]$

Por lo tanto, sí $x \in [2,4] \Rightarrow 2x + 3 \in [7,11]$

② Sí $x \in \langle a,b \rangle \Leftrightarrow a < x < b$

Ejemplo.- Demostrar que: Sí $2x - 6 \in \langle -4,4 \rangle \Rightarrow x \in \langle 1,5 \rangle$

Solución

$2x - 6 \in \langle -4,4 \rangle \Rightarrow -4 < 2x - 6 < 4$, sumando 6

$2 < 2x < 10$ dividiendo entre 2

$1 < x < 5$, entonces $x \in \langle 1,5 \rangle$

Por lo tanto, sí $2x - 6 \in \langle -4,4 \rangle \Rightarrow x \in \langle 1,5 \rangle$

3.25. CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN.-

Se llama conjunto solución de una inecuación a todos los números reales que la verifiquen, es decir, que dichos números reales dan la desigualdad en el sentido prefijado.

3.26. RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN.-

El resolver una inecuación consiste en hallar un conjunto solución; es decir, encontrar el intervalo donde están los valores que puede tomar la incógnita para que verifique la inecuación.

3.27. INECUACIÓN DE PRIMER GRADO EN UNA INCÓGNITA.-

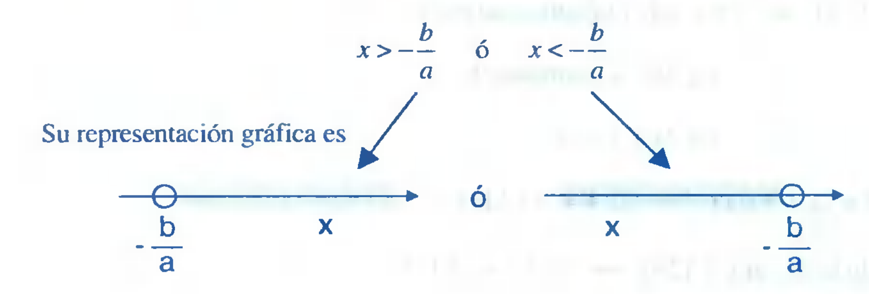
Las inecuaciones de primer grado en una incógnita, son de la forma:

$$ax + b > 0 \quad o \quad ax + b < 0 \quad o \quad ax + b \geq 0 \quad o \quad ax + b \leq 0, \; a \neq 0$$

Para resolver estas inecuaciones se debe considerar a > 0, es decir, sí a > 0, entonces:

$$x > -\frac{b}{a} \quad ó \quad x < -\frac{b}{a}$$

Su representación gráfica es



Luego la solución es dado en la forma: $x \in \langle -\frac{b}{a}, +\infty \rangle$ ó $x \in \langle -\infty, -\frac{b}{a} \rangle$

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones.

① $3x - 4 < x + 6$

Solución

Las inecuaciones de primer grado en una incógnita, se resuelve, expresando la inecuación en la forma:

En un sólo miembro se pone la incógnita, en el otro miembro los números, es decir:

$3x - x < 6 + 4$, simplificando se tiene: $x < 5$, es decir: $x \in \langle -\infty, 5 \rangle$



La solución es: $x \in \langle -\infty, 5 \rangle$

② $3(x - 4) + 4x < 7x + 2$

Solución

Poniendo en un sólo miembro la incógnita y en el otro miembro los números:

$3x - 12 + 4x < 7x + 2 \Rightarrow 3x + 4x - 7x < 2 + 12$ simplificando $0 < 14$

esta desigualdad obtenida es cierta, entonces la solución de la inecuación dada , es el conjunto de todos los números reales ($x \in R$).

③ $5x - 4(x + 5) < x - 24$

Solución

En forma análoga a los ejemplos anteriores en un sólo miembro ponemos las incógnitas y en el otro miembro los números: $5x - 4x - x < -24 + 20$ simplificando $0 < -4$

Como la desigualdad obtenida no es correcta, entonces no hay ningún valor de x, que verifique que la inecuación dada. Por lo tanto la solución es el vacío (ϕ).

④ $2 \leq 5 - 3x \leq 11$

Solución

Aplicando la propiedad de transitividad: $a \leq b < c \Leftrightarrow a \leq b \wedge b < c$

$2 \leq 5 - 3x < 11 \iff 2 \leq 5 - 3x \wedge 5 - 3x < 11$

$\iff 3x \leq 5 - 2 \wedge 5 - 11 < 3x$

$\iff x \leq 1 \wedge -2 < x$

-2 1

La solución es: $x \in \langle -2,1]$

3.28. INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN UNA INCÓGNITA.-

Las inecuaciones de segundo grado en una incógnita son de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ ó } ax^2 + bx + c < 0,\ a \neq 0$$

donde $a,b,c \in R$, siendo $a \neq 0$, la solución de estas inecuaciones, se obtiene mediante las propiedades de los números reales o también por medio de la naturaleza de las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c = 0$.

a) CARÁCTER DE LAS RAICES DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO.

Consideremos el trinomio de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a > 0 \quad \ldots (1)$$

al analizar el valor numérico de la ecuación (1) dando valores reales a x se presentan tres casos:

1° Caso.- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces hay dos valores reales diferentes $r_1 < r_2$ que anulan al trinomio $ax^2 + bx + c = 0$.

Es decir: $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$, si se hace variar x a lo largo de la recta real resulta:

i) Cuando x toma valores menores que r_1, los factores $(x - r_1)$ y $(x - r_2)$ son negativos, luego el trinomio $ax^2 + bx + c$, tiene el mismo signo del coeficiente de "a".

ii) Cuando x toma valores intermedio entre r_1 y r_2; entonces el factor $(x - r_1)$ es positivo y el factor $(x - r_2)$ es negativo, luego el trinomio $ax^2 + bx + c$, tiene signo opuesto del coeficiente de "a".

iii) Cuando x toma valores mayores que r_2, entonces los factores $(x-r_1)$, $(x-r_2)$ son positivos, luego el trinomio ax^2+bx+c, tiene el mismo signo del coeficiente de "a".

2° Caso.- Si $\Delta=b^2-4ac=0$, entonces hay un sólo valor real $r_1=r_2=r$, que anulan el trinomio ax^2+bx+c, luego como $(x-r)^2$ es positivo, el signo del trinomio ax^2+bx+c es el mismo del coeficiente de "a".

3° Caso.- Si $\Delta=b^2-4ac<0$, entonces se tiene dos valores no reales $r_1=\alpha+\beta i$ y $r_2=\alpha-\beta i$ que anulan el trinomio ax^2+bx+c, y para cualquier valor de x, el trinomio: ax^2+bx+c tiene el mismo signo del coeficiente de "a".

NOTA.- Sí $ax^2+bx+c=0$ entonces $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

b) RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO.-

Para resolver una inecuación cuadrática de las formas $ax^2+bx+c>0$ ó $ax^2+bx+c<0$, donde a,b,c $\in$ R, a $\neq$ 0, por medio de la naturaleza de las raíces primero se resuelve la ecuación $ax^2+bx+c=0$, y de acuerdo a la naturaleza de las raíces se presenta tres casos:

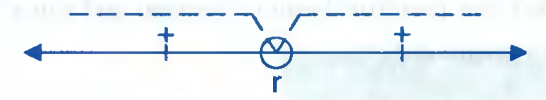
1° Caso.- Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$, tiene dos raíces reales diferentes $r_1<r_2$.



i) Si la inecuación es de la forma $ax^2+bx+c>0$, con a > 0, la solución es todos los valores de x que pertenecen al intervalo $<-\infty, r_1> \cup <r_2,+\infty>$.

ii) Si la inecuación es de la forma $ax^2+bx+c<0$ con a > 0, la solución es todos lo valores de x que pertenece al intervalo $<r_1, r_2>$.

2° Caso.- Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$, tiene una raíz real única $r_1=r_2=r$.



i) Si la inecuación es de la forma: $ax^2+bx+c>0$, con a > 0.

La solución es todos los valores de x ≠ r, es decir: x ∈ <-∞,r> U <r,+∞>

ii) Si la inecuación es de la forma: $ax^2+bx+c<0$, con a > 0.

No se verifica para ningún valor real de x; la solución es el ϕ

3° Caso.- Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$, tiene dos raíces no reales.

i) Si la inecuación es de la forma: $ax^2+bx+c>0$, con a > 0.

La solución es todos los valores reales de x.

ii) Si la inecuación es de la forma: $ax^2+bx+c<0$, con a > 0.

No se verifica para ningún valor real de x; la solución es el ϕ

RESUMIENDO EN EL SIGUIENTE CUADRO.

Forma de la Inecuación	Raíces de la Ecuación $ax^2+bx+c=0$	Conjunto Solución
$ax^2+bx+c>0$, a > 0	Raíces diferentes $r_1<r_2$	$<-\infty,r_1>U<r_2,+\infty>$
	Raíz Real Unica r	R − {r}
	Raíces no reales	R
$ax^2+bx+c<0$, a > 0	Raíces diferentes $r_1<r_2$	$<r_1,r_2>$
	Raíz Real Única	ϕ
	Raíces no reales	ϕ

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones.

① $2x^2 - x - 10 > 0$

Solución

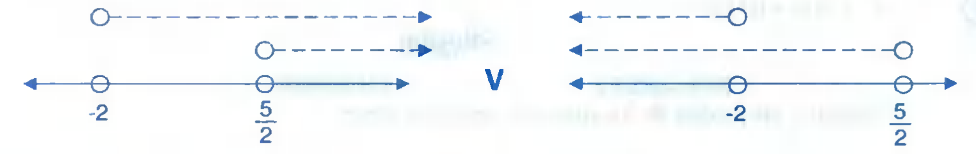
Resolveremos la inecuación usando propiedades de los números reales:

$$\boxed{a.b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)}$$

$$2x^2 - x - 10 > 0 \Rightarrow (x+2)(2x-5) > 0$$

$$(x+2)(2x-5) > 0 \Leftrightarrow (x+2 > 0 \wedge 2x-5 > 0) \vee (x+2 < 0 \wedge 2x-5 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (x > -2 \wedge x > 5/2) \vee (x < -2 \wedge x < 5/2)$$



La solución es: $x \in \langle -\infty, -2 \rangle U \langle \frac{5}{2}, +\infty \rangle$

Otra forma de resolver esta inecuación, es por la naturaleza de sus raíces de la ecuación $2x^2 - x - 10 = 0$, de donde $r_1 = -2$, $r_2 = \frac{5}{2}$, luego $r_1 < r_2$ y como $2x^2 - x - 10 > 0$, de acuerdo al cuadro la solución es:

$x \in \langle -\infty, -2 \rangle U \langle \frac{5}{2}, +\infty \rangle$

+ - +
-2 5/2

② $x^2 + 8x - 65 < 0$

Solución

Usando propiedades de los números reales.

$$\boxed{a^2 < b, b > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}}$$

completando cuadrados en $x^2 + 8x - 65 < 0$, se tiene:

$x^2+8x+16<65+16 \Rightarrow (x+4)^2<81$, aplicando la propiedad

$$(x+4)^2<81 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{81}<x+4<\sqrt{81}$$

$$\Leftrightarrow \quad -9<x+4<9 \quad \Leftrightarrow \quad -13<x<5$$

La solución es $x \in \langle -13,5 \rangle$

Ahora resolveremos la inecuación por medio de la naturaleza de las raíces de $x^2+8x-65=0$, es decir: $(x+13)(x-5)=0$ de donde $r_1=-13$, $r_2=5$

de acuerdo al cuadro es: $x \in \langle -13,5 \rangle$



(3) $x^2+20x+100>0$

Solución

Mediante propiedad de los números reales se tiene:

$x^2+20x+100>0 \Rightarrow (x+10)^2>0$ entonces:

$\forall$ x $\in$ R; $x \neq -10$, $(x+10)^2>0$, por lo tanto la solución es; $x \in R-\{-10\}$

Ahora veremos de acuerdo a la naturaleza de las raíces: $x^2+20x+100=0 \Rightarrow r=-10$, multiplicidad 2, y como $x^2+20x+100>0$, de acuerdo al cuadro de solución es:

$$x \in R-\{-10\}$$

(4) $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}<0$

Solución

Aplicando la propiedad de los números reales: $\forall$ x $\in$ R, $x^2 \geq 0$

luego $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}<0 \Rightarrow (x+\frac{3}{10})^2<0$ pero $(x+\frac{3}{10})^2 \geq 0$, entonces no existe ningún valor real para x que verifique a la inecuación, es decir: ϕ.

Ahora resolvemos mediante la naturaleza de las raíces de la ecuación $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}=0$, de donde $r=-\frac{3}{10}$ de multiplicidad dos, pero se tiene que $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}<0$ y de acuerdo al cuadro la solución es: ϕ.

3.29. INECUACIONES POLINÓMICAS.-

Una inecuación polinómica en una incógnita, es de la forma siguiente:

$$P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0>0 \quad \text{ó} \quad P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0<0$$

donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$, $n \in Z^+$

a) RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN POLINÓMICAS.-

Una inecuación polinómicas de la forma P(x) > 0 o P(x) < 0, se resuelve de acuerdo a la naturaleza de sus raíces de la ecuación polinómica P(x) = 0, en una forma sencilla y rápida, considerando $a_n>0$.

Para esto hallaremos primero las raíces del polinomio $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0=0$, y como éste polinomio es de grado n entonces tiene n raíces, los cuáles pueden ser reales diferentes, reales de multiplicidad y no reales.

1° CASO.- Cuando las raíces de la ecuación polinómica p(x) = 0, son reales diferentes. Es decir: $r_1<r_2<...<r_{n-1}<r_n$

a) En los intervalos consecutivos determinados por las raíces del polinomio P(x) = 0, se alternan los signos "+" y "–" empezando por asignar el signo (+) al intervalo $<r_n,\infty>$.



b) Si la inecuación polinómica es de la forma: $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 > 0$, $a_n > 0$; al conjunto solución será la unión de los intervalos a los cuales se le ha asignado el signo "+".

c) Si la inecuación polinómica es de la forma: $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 < 0$, $a_n > 0$; el conjunto solución, será la unión de los intervalos a los cuales se le ha asignado el signo "-".

NOTA.- Explicar el método de Ruffini

Ejemplo: Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 > 0$

Solución

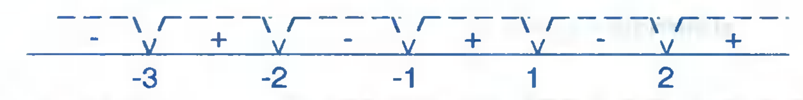
Expresamos el 1° miembro de la inecuación en forma factorizada

(x + 3)(x + 2)(x – 1)(x + 1)(x – 2) = 0

1	3	-5	-15	4	12	1
	1	4	-1	-16	-12	
1	4	-1	-16	-12	0	2
	2	12	22	12		
1	6	11	6	0		-1
	-1	-5	-6			
1	5	6	0			-2
	-2	-6				
1	3	0				-3
	-3					
1	0					

Luego las raíces son:

$r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_3 = -1$, $r_4 = 1$, $r_5 = 2$



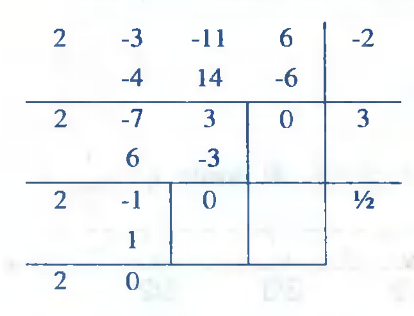
Como P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+).

Es decir: x ∈ <-3,-2> U <-1,1> U <2,+∞>

② $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 < 0$

Solución

Hallaremos las raíces de la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$



2	-3	-11	6	-2
	-4	14	-6	
2	-7	3	0	3
	6	-3		
2	-1	0		½
	1			
2	0			

Luego las raíces del polinomio son:

$r_1 = -2$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $r_3 = 3$

- + - +
-2 1/2 3

Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-). Es decir: $x \in \; < -\infty, -2 > U < \frac{1}{2}, 3 >$

2° CASO.- Si algunas de las raíces del polinomio P(x) = 0 son reales de multiplicidad de orden mayor que 1 se tiene:

a) Cuando el orden de la multiplicidad de una de las raíces del polinomio P(x) = 0 es par, en este caso a la raíz no se considera para la determinación de los intervalos y para dar la solución se sigue el mismo proceso del 1° caso.

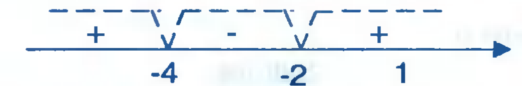
b) Cuando el orden de la multiplicidad de una de las raíces del polinomio P(x) = 0, es impar, en este caso a la raíz se considera para la determinación de los intervalos y para dar la solución se sigue el mismo proceso del 1° caso.

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes.

① $(x-1)^2(x+2)(x+4) > 0$

Solución

Resolviendo la ecuación $(x-1)^2(x+2)(x+4) = 0$, de donde $r_1 = -4$, $r_2 = -2$, y $r_3 = 1$, de multiplicidad 2.



Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty,-4\rangle \cup \langle -2,+\infty\rangle - \{1\}$

(2) $(2x+1)(3x-2)^3(2x-5) < 0$

Solución

Resolviendo la ecuación $(2x+1)(3x-2)^3(2x-5)=0$, de donde $r_1 = -\dfrac{1}{2}$, $r_2 = \dfrac{2}{3}$ de multiplicidad 3, $r_3 = \dfrac{5}{2}$

- + - +

-1/2 2/3 5/2

Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-). Es decir: $x \in \langle -\infty, -\dfrac{1}{2}\rangle \cup \langle \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{2}\rangle$

3° CASO.- Cuando alguna de las raíces del polinomio P(x) = 0 no son reales, en este caso a estas raíces no se consideran en la determinación de los intervalos y para dar la solución se sigue el mismo procedimiento de los casos anteriores.

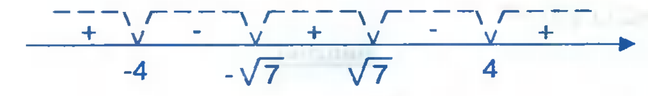
Ejemplo.- Resolver las siguientes inecuaciones.

(1) $(x^2-7)(x^2+16)(x^2-16)(x^2+1) < 0$

Solución

Resolviendo la ecuación: $(x^2-7)(x^2+16)(x^2-16)(x^2+1)=0$, de donde

$r_1 = -4$, $r_2 = -\sqrt{7}$, $r_3 = \sqrt{7}$, $r_4 = 4$, $r_5 = -4i$, $r_6 = 4i$, $r_7 = i$, $r_8 = -i$



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es de la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x \in \langle -4, -\sqrt{7}\rangle \cup \langle \sqrt{7}, 4\rangle$

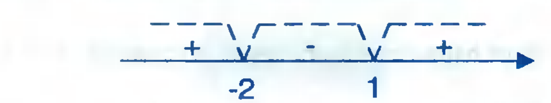
(2) $(1+x+x^2)(2-x-x^2)\geq 0$

Solución

La inecuación la expresaremos así: $(x^2+x+1)(x^2+x-2)\leq 0$

ahora resolviendo la ecuación $(x^2+x+1)(x^2+x-2)=0$ de donde: $r_1=-2$, $r_2=1$,

$r_3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $r_4=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: x ∈ [-2,1]

3.30. INECUACIONES FRACCIONARIAS.-

Una inecuación fraccionaria en una incógnita es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \text{ ó } \frac{P(x)}{Q(x)}<0, \quad Q(x)\neq 0$$

donde P(x) y Q(x) son monomios o polinomios diferente de cero.

Para resolver una inecuación fraccionaria debe tenerse en cuenta que las inecuaciones:

$\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$, son equivalentes a las inecuaciones

P(x).Q(x) > 0 ó P(x).Q(x) < 0 es decir: Sí $Q(x)\neq 0 \Rightarrow Q^2(x)>0$, de donde se tiene:

Sí $\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \Rightarrow \frac{P(x).Q^2(x)}{Q(x)}>0.Q^2(x) \Rightarrow$ P(x).Q(x) > 0

Sí $\frac{P(x)}{Q(x)}<0 \Rightarrow \frac{P(x).Q^2(x)}{Q(x)}<0.Q^2(x) \Rightarrow$ P(x).Q(x) < 0

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $\frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)}>0$

Solución

La inecuación $\frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)} > 0$, es equivalente a la siguiente inecuación.

$(x^2-1)(x+3)(x-2)(x-5)(x+7) > 0$, para $x \neq -7, 5$

ahora hallaremos las raíces de la ecuación $(x^2-1)(x+3)(x-2)(x-5)(x+7) = 0$.

De donde $r_1 = -7$, $r_2 = -3$, $r_3 = -1$, $r_4 = 1$, $r_5 = 2$, $r_6 = 5$, que son reales diferentes.



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+) es decir: x ∈ <-∞,-7> U <-3,-1> U <1,2> U <5,+∞>

(2) $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

Solución

La inecuación dada se expresa en la forma, mayor que cero o menor que cero, es decir:

$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)-(x+1)(x+3)}{x(x+3)} < 0$, de donde:

$\frac{-6x-3}{x(x+3)} < 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x(x+3)} > 0$, que es equivalente a:

$(2x + 1)(x + 3)x > 0$, para $x \neq -3,0$ ahora encontramos las raíces de la ecuación.

$(2x + 1)(x + 3)x = 0$, de donde $r_1 = -3$, $r_2 = -\frac{1}{2}$, $r_3 = 0$

- + - +
-3 -1/2 0

Como la inecuación es de la forma: $(2x + 1)(x + 3)x > 0$,

la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x \in \; <-3,\frac{1}{2}> U < 0,+\infty >$$

(3) $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}<\frac{2x}{x+1}$

Solución

La inecuación dada expresaremos en la forma: $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}-\frac{2x}{x+1}<0$

$\frac{x^2(x+1)+(x-1)(x-1)(x+1)-2x^2(x-1)}{(x-1)x(x+1)}<0$, simplificando

$\frac{2x^2-x+1}{(x-1)x(x+1)}<0$, que es equivalente a la inecuación.

$(2x^2-x+1)(x-1)x(x+1)<0$, para x ≠ -1,0,1

ahora encontramos las raíces de $(2x^2-x+1)(x-1)x(x+1)=0$, de donde sus raíces son:

$r_1=-1,\; r_2=0,\; r_3=1,\; r_4=\frac{1+\sqrt{7}i}{4},\; r_5=\frac{1-\sqrt{7}i}{4}$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: x ∈ <-∞,-1> U <0, 1>

3.31. INECUACIONES EXPONENCIALES.-

Las inecuaciones exponenciales en una incógnita son de la forma:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \vee \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

donde f(x) y g(x) son expresiones en x, $a \in R^+$, $a \neq 1$.

Para resolver estas inecuaciones, se consideran dos casos:

1° CASO.- Si $a > 1$, entonces los exponentes de la inecuación dada son desiguales en el mismo sentido prefijado, es decir:

Si $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
Si $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

2° CASO.- Si $0 < a < 1$, entonces los exponentes de la inecuación dada son desiguales en sentido contrario al prefijado, es decir:

Si $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
Si $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones:

① $\sqrt[3]{3^{(5x+1)/3}} < \sqrt{9^{3(x+1)/5}}$

Solución

La inecuación dada es equivalente a: $3^{\frac{5x+1}{9}} < 9^{\frac{3(x+1)}{10}} \Rightarrow 3^{\frac{5x+1}{9}} < 3^{\frac{6x+6}{10}}$

como $a = 3 > 1$ entonces $\frac{5x+1}{9} < \frac{6x+6}{10}$

$50x+10 < 54x+54 \Rightarrow -44 < 4x \Rightarrow x > -11 \Rightarrow x \in \langle -11,+\infty \rangle$

$\therefore$ La solución es: $x \in \langle -11,+\infty \rangle$

② $[(0,2)^{(x+1)(x-2)}]^{\frac{1}{x-3}} > \frac{(0.0128)^{3x-1}}{8^{3x-1}}$

Solución

La inecuación dada se puede escribir en la forma:

$(0,2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > (\frac{0.0128}{8})^{3x-1}$ de donde: $(0,2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > (0,2)^{12x-4}$,

como a = 0.2 < 1, se tiene: $\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} < 12-4 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+1)(x-2)}{x-3} - 12x + 4 < 0$

efectuando operaciones y simplificando tenemos: $\frac{11x^2-39x+14}{x-3} > 0$, esta inecuación es equivalente a: $(11x^2-39x+14)(x-3) > 0$ para x ≠ 3.

Ahora hallando las raíces de : $(11x^2-39x+14)(x-3) = 0$, de donde:

$$r_1 = \frac{39-\sqrt{905}}{22}, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = \frac{39+\sqrt{905}}{22}$$

$$\underset{-}{\quad} \quad \frac{39-\sqrt{905}}{22} \quad \underset{+}{\quad} \quad 3 \quad \underset{-}{\quad} \quad \frac{39+\sqrt{905}}{22} \quad \underset{+}{\quad}$$

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+) es decir: $x \in \left< \frac{39-\sqrt{905}}{22}, 3 \right> U \left< \frac{39+\sqrt{905}}{22}, +\infty \right>$

3.32. INECUACIONES IRRACIONALES.-

Las inecuaciones irracionales en una incógnita son de la forma:

$$F(x, \sqrt{P_2(x)}, \sqrt[3]{P_3(x)}, \ldots, \sqrt[n]{P_n(x)}) > 0 \quad ó \quad F(x, \sqrt{P_2(x)}, \sqrt[3]{P_3(x)}, \ldots, \sqrt[n]{P_n(x)}) < 0$$

donde $P_2(x), P_3(x), \ldots, P_n(x)$ son monomios o polinomios diferentes de cero.

Para que la solución de la inecuación sea válida debe resolverse antes la condición $P_i(x) \geq 0$, i = 2,3,...,n en las expresiones con una radical par. cuyo conjunto solución constituirá el universo o dentro del cuál se resuelve la inecuación dada. Debe observarse que $\sqrt{P(x)}$, quiere decir, $(+\sqrt{P(x)})$ y si se desea la raíz negativa se escribirá expresamente como $(-\sqrt{P(x)})$; es decir:

i) $\forall\ P(x) \geq 0 \quad , \quad \sqrt{P(x)} \geq 0$ **ii)** $\sqrt{P(x)} = 0 \iff P(x) = 0$

para resolver las inecuaciones radicales se debe tener en cuenta las siguientes propiedades:

① $0 \le x \le y \iff 0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{y}$

② $0 < x < y \iff 0 < \sqrt{x} < \sqrt{y}$

③ $0 \le x < y \iff 0 \le \sqrt{x} < \sqrt{y}$

④ **i)** Si n es un entero positivo par.

a_1) $\forall\ P(x) \ge 0 \quad \therefore \quad \sqrt[n]{P(x)} \ge 0 \iff P(x) \ge 0$

a_2) $\sqrt[n]{P(x)} = 0 \iff P(x) = 0$

a_3) $\sqrt[n]{P(x)} \le \sqrt[n]{Q(x)} \iff 0 \le P(x) \le Q(x)$

ii) Si n es entero positivo impar.

b_1) $\sqrt[n]{P(x)} \ge 0 \iff P(x) \ge 0$

b_2) $\sqrt[n]{P(x)} < 0 \iff P(x) < 0$

b_3) $\sqrt[n]{P(x)} \le \sqrt[n]{Q(x)} \iff P(x) \le Q(x)$

Las propiedades b_1), b_2) indican que $\sqrt[n]{P(x)}$ tienen el mismo signo que P(x) si n es impar.

OBSERVACIÓN.- Cuando en una expresión existen k radicales par entonces se calculan los universos relativos $U_1, U_2, \ldots, U_k$ para cada radical y el universo general será $U = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k$.

Daremos algunos ejemplos de ilustración de estas propiedades, para después estudiar las diversas formas de inecuaciones irracionales.

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones

① $\sqrt{x+5} > -2$

Solución

Como $\sqrt{x+5} > -2$ es válida para todo x tal que x ∈ U: $x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$ $\Rightarrow$ U = [-5,+∞>, luego el conjunto solución es [-5,+∞>

(2) $\sqrt{x+7} > 0$

Solución

Como $\sqrt{x+7} > 0$ entonces el conjunto universal es $x+7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7 \Rightarrow$ U = [-7,+∞>

Además $\sqrt{x+7} > 0 \Leftrightarrow x+7 > 0 \Rightarrow$ x ∈ <-7,+∞>.

Luego el conjunto solución es x ∈ [-7,+∞> Λ <-7,+∞> ∴ x ∈ <-7,+∞>

(3) $\sqrt{x-5} \leq 0$

Solución

Como $\sqrt{x-5} \leq 0$, el conjunto universal es $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow$ U = [5,+∞> y como $0 \leq \sqrt{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 0 \Rightarrow x-5 = 0 \Rightarrow x = 5 \in U$, luego el conjunto solución es $\{5\}$.

(4) $\sqrt{x-8} < 0$

Solución

Como $\sqrt{x-8} < 0$ es absurdo entonces la solución es ϕ.

(5) $\sqrt{x+9} \geq 0$

Solución

Como $\sqrt{x+9} \geq 0$ es verdadero ∀ x ∈ U: $x+9 \geq 0$ es decir U = [-9,+∞>, luego el conjunto solución es x ∈ [-9,+∞>.

(6) $\sqrt{8-2x} < \sqrt{13}$

Solución

El conjunto universal es $8-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$ de donde U = <-∞,4].

$\sqrt{8-2x} < \sqrt{13} \Leftrightarrow 8-2x < 13 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$ de donde $x \in [-\frac{5}{2},+\infty>$. Luego el conjunto solución es: $U \cap [-\frac{5}{2},+\infty> = [-\frac{5}{2},4]$

(7) $\sqrt{x+3}+\sqrt{4-x}>-3$

Solución

Calculando los universos relativos.

$U_1:\ x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3 \Rightarrow x\in [-3,+\infty>$

$U_2:\ 4-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 4 \Rightarrow x\in <-\infty,4]$

$U=U_1\cap U_2=[-3,+\infty>\cap<-\infty,4]=[-3,4]$

como la suma de dos positivos es siempre mayor que un negativo.

$\sqrt{x+3}+\sqrt{4-x}>-3$ es valido $\forall\ x\in U=[-3,4]$.

(8) $\sqrt{x-7}>3$

Solución

Sea U: $x-7\geq 0 \Rightarrow x\geq 7 \Rightarrow x\in [7,+\infty>$

$\sqrt{x-7}>3 \Leftrightarrow x-7>9 \Rightarrow x>16 \Rightarrow x\in <16,+\infty>$

el conjunto solución es $x\in U\ \cap <16,+\infty> = <16,+\infty>$

(9) $-\sqrt{x-5}>0$

Solución

$-\sqrt{x-5}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}<0$ el conjunto solución es ϕ.

(10) $\sqrt{x^2-x-12}\leq\sqrt{x^2-6x+5}$

Solución

Calculando los universos relativos.

$U_1:\ x^2-x-12\geq 0 \Rightarrow (x-4)(x+3)\geq 0$

+ -3 - 4 +

$U_1=<-\infty,-3]\ U\ [4,+\infty>$

$U_2:\ x^2-6x+5\geq 0 \Rightarrow (x-5)(x-1)\geq 0$

+ 1 - 5 +

$U_2=<-\infty,1]\ U\ [5,+\infty>$

$U = U_1 \cap U_2 = <-\infty-3] \; U \; [5,+\infty>$

$\sqrt{x^2-x-12} \leq \sqrt{x^2-6x+5} \iff x^2-x-12 \leq x^2-6x+5$

de donde $5x \leq 17 \Rightarrow x \leq \frac{17}{5} \Rightarrow x \in <-\infty, \frac{17}{5}]$

Luego el conjunto solución es: $x \in U \wedge <-\infty, \frac{17}{5}] = <-\infty, -3]$

(11) $$\frac{\sqrt[3]{x^2-4}(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)^3(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$$

Solución

Como $\sqrt[3]{x^2-4}$ tiene el mismo signo que x^2-4 y $(x+4)^3$ tiene el mismo signo que x + 4 entonces la inecuación dada es equivalente.

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-4}(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)^3(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0 \iff \frac{(x^2-4)(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$$

Como $\forall x \in R, \; (x-2)^2 \geq 0$ entonces

$$\frac{(x^2-4)(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0 \iff \frac{(x^2-4)(x^3-13x+12)}{(x+4)(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(x-1)(x^2+x-12)}{(x+4)(x-2)(x+6)(x+4)} \geq 0, \text{ para } x \neq 2, -4$$

$$\frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(x+6)(x+4)} \geq 0, \text{ para } x \neq 2, -4$$

- + - + - +
-6 -4 -2 1 3

Luego el conjunto solución es: $x \in <-6,-4> \cup [-2,1] \cup [3,+\infty>$

(12) $$\frac{\sqrt[5]{x+7}(x+2)^4(x+3)\sqrt[3]{x^2-7x+12}\ \sqrt[4]{10-x}}{\sqrt[6]{x+9}(x-8)^3(x^3-27)(x^2-14x+48)}\leq 0$$

Solución

Los radicales pares nos da el universo U. $10-x\geq 0 \wedge x+9>0 \Rightarrow x\leq 10 \wedge x>-9$

$x\in\ <-9,10] \Rightarrow U=\ <-9,10]$ (no se incluye el –9 por que anula al denominador)

como los radicales pares son positivos la inecuación es equivalente a:

$$\frac{\sqrt[5]{x+7}(x+2)^4(x+3)\sqrt[3]{x^2-7x+12}\ \sqrt[4]{10-x}}{\sqrt[6]{x+9}(x-8)^3(x^3-27)(x^2-14x+48)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[5]{x+7}(x+2)^4(x+3)\sqrt[3]{x^2-7x+12}}{(x-8)^3(x^3-27)(x^2-14x+48)}\leq 0$$

como los radicales impares tienen el mismo signo que las cantidades subradicales entonces:

$$\frac{(x+7)(x+2)^4(x+3)(x^2-7x+12)}{(x-8)^3(x-3)(x^2+3x+9)(x-6)(x-8)}\leq 0,$$ como para todo $x\in R$ $(x+2)^4\geq 0$

$$\frac{(x+7)(x+3)(x-3)(x-4)}{(x-8)^3(x-3)(x-6)(x-8)}\leq 0,$$ para $x\neq 3, 8$ simplificando tenemos

$$\frac{(x+7)(x+3)(x-4)}{x-6}\leq 0,\quad x\neq 3,8$$

+ -7 - -3 + 4 - 6 +

$x\in[-7,-3]\cup[4,6>$ luego el conjunto solución es: $x\in U\cap([-7,-3]\cup[4,6>)$

$$\therefore\quad x\in[-7,-3]\cup[4,6>\cup\{-2\}$$

ahora veremos como resolver diversas formas de la inecuación con radicales aplicando criterios de acuerdo a cada tipo de inecuación irracional.

1° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)}>Q(x)$. La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)}>Q(x)\Leftrightarrow (P(x)\geq 0 \wedge [Q(x)\leq 0 \vee (P(x)\geq 0 \wedge P(x)>Q^2(x))])$$

b) $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow [P(x) \geq 0 \wedge (Q(x) \leq 0 \vee [P(x) \geq 0 \wedge P(x) \geq Q^2(x)])]$$

2° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)} < Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow [(P(x) \geq 0 \wedge (Q(x) > 0 \wedge P(x) < Q^2(x))]$$

b) $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \leq Q^2(x)]$$

3° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

a) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0 \Rightarrow (P(x) \geq 0 \wedge Q(x) > 0) \vee (P(x) > 0 \wedge Q(x) \geq 0)$$

b) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0 \Rightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$$

4° Para la inecuación irracional de la forma:

$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq K$, $K > 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq K \Rightarrow [(P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0) \wedge P(x) \geq (k - \sqrt{Q(x)})^2]$$

5° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0 \Rightarrow P(x) = 0 \wedge Q(x) = 0$$

OBSERVACIÓN.-

Consideremos otros casos más generales.

1° Caso.- Si n es impar positivo mayor que uno.

a) $\frac{P(x)\sqrt[n]{Q(x)}}{R(x)} \geq 0 \iff \frac{P(x).Q(x)}{R(x)} \geq 0$

b) $\frac{P(x)}{R(x)\sqrt[n]{Q(x)}} \leq 0 \iff \frac{P(x)}{R(x)Q(x)} \leq 0$

c) $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \iff$ P(x) ≤ Q(x)

2° Caso.- Si n es par positivo

a) $\sqrt[n]{P(x)}Q(x) \geq 0 \iff$ P(x) ≥ 0 Λ Q(x) ≥ 0

b) $\sqrt[n]{P(x)}Q(x) \leq 0 \iff$ P(x) ≥ 0 Λ Q(x) ≤ 0

c) $\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}R(x)} \geq 0 \iff Q(x) > 0 \ \Lambda \ \frac{P(x)}{R(x)} \geq 0$

d) $\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}R(x)} \leq 0 \iff Q(x) > 0 \ \Lambda \ \frac{P(x)}{R(x)} \leq 0$

e) $\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \iff (P(x) \geq 0 \ \Lambda \ [Q(x) < 0 \ V \ (Q(x) \geq 0 \ \Lambda \ P(x) \geq Q^n(x))]$

f) $\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x) \iff P(x) \geq 0 \ \Lambda \ [Q(x) \geq 0) \ \Lambda \ P(x) \leq Q^n(x)]$

Ejemplo.- Resolver las siguientes inecuaciones

(1) $\sqrt{x^2 - 14x + 13} \geq x - 3$

Solución

$\sqrt{x^2 - 14x + 13} \geq x - 3 \iff x^2 - 14x + 13 \geq 0 \ \Lambda \ [x - 3 \leq 0 \ V$

$(x^2 - 14x + 13 \geq 0 \ \Lambda \ x^2 - 14x + 13 \geq (x-3)^2)]$

$\iff x^2 - 14x + 13 \geq 0 \wedge [x \leq 3 \vee (x^2 - 14x + 13 \geq 0 \wedge x \leq \frac{1}{2})]$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 14x + 13 \geq 0 \ \wedge [x \leq 3 \vee x \in \langle -\infty, 1] \cup [13, \infty\rangle \ \wedge x \leq \frac{1}{2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 14x + 13 \geq 0 \wedge [x \leq 3 \ \vee x \leq \frac{1}{2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 14x + 13 \geq 0 \ \Lambda \ x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 13)(x - 1) \geq 0 \quad \Lambda \quad x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 1] \cup [13, +\infty\rangle \ \ \Lambda \ \ x \leq 3 \qquad \therefore \ x \in \langle -\infty, 1]$$

② $\sqrt{x^2 - 14x + 13} < x + 1$

Solución

Aplicando la parte b) del 1° caso:

$$\sqrt{x^2 - 14x + 13} < x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 14x + 13 \geq 0 \ \Lambda \ [x + 1 > 0) \ \Lambda \ (x^2 - 14x + 13 < (x + 1)^2])$$

$$\Leftrightarrow ((x - 13)(x - 1) \geq 0 \ \Lambda[\, x > -1) \ \Lambda \ ((x - 13)(x - 1) < (x + 1)^2])$$

$$\Leftrightarrow ((x - 13)(x - 1) \geq 0 \ \wedge \ [x > -1) \ \wedge \ x > \frac{3}{4}]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -1, 1] \cup [13, +\infty\rangle \ \Lambda \ x > \frac{3}{4}\,]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle \frac{3}{4}, 1] \ \cup [13, +\infty\rangle$$

③ $\sqrt{\dfrac{2x - 8}{x - 1}} + \sqrt{\dfrac{5 - x}{x + 3}} \geq 0$

Solución

Aplicando la parte b), del 3° caso: $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ P(x) \geq 0 \ \ \Lambda \ \ Q(x) \geq 0$

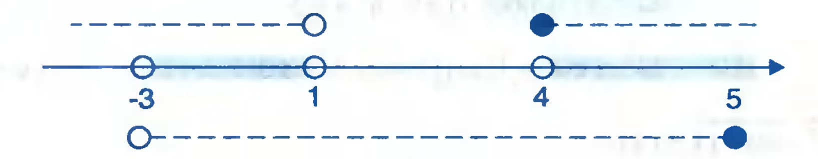
$$\sqrt{\frac{2x - 8}{x - 1}} + \sqrt{\frac{5 - x}{x + 3}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x - 8}{x - 1} \geq 0 \quad \Lambda \quad \frac{5 - x}{x + 3} \geq 0$$

$\Leftrightarrow\quad (x-4)(x-1)\geq 0,\ x\neq 1\ \wedge\ (5-x)(x+3)\geq 0,\ x\neq 3$

$\Leftrightarrow\quad (x-4)(x-1)\geq 0,\ x\neq 1\ \wedge\ (x-5)(x+3)\leq 0,\ x\neq -3$

+ 1 - 4 + $\wedge$ + -3 - 5 +

$x\in\ <-\infty,1>\ \cup\ [4,\infty>\ \wedge\ x\in\ <-3,5]$



La solución es: $x\in\ <-3,1>\ \cup\ [4,5]$

OBSERVACIÓN.- Si n es un numero positivo impar, entonces:

① $\sqrt[n]{P(x)}\leq\sqrt[n]{Q(x)}\ \Leftrightarrow\ P(x)\leq Q(x)$

② $\sqrt[n]{P(x)}<\sqrt[n]{Q(x)}\ \Leftrightarrow\ P(x)<Q(x)$

③ $\sqrt[n]{P(x)}\geq\sqrt[n]{Q(x)}\ \Leftrightarrow\ P(x)\geq Q(x)$

④ $\sqrt[n]{P(x)}>\sqrt[n]{Q(x)}\ \Leftrightarrow\ P(x)>Q(x)$

Ejemplo.- Resolver la inecuación $\dfrac{\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[4]{x^2-1}\sqrt[3]{x+5}}>0$

Solución

El conjunto de referencia o conjunto universal se obtiene del radical par y diferente de cero: $x^2-1>0$, dé donde $x^2>1\ \Rightarrow\ x>1\ \vee\ x<-1\ \therefore\ x\in\ <-\infty,-1>\cup<1,+\infty>$ luego el radical par resulta positivo y puede simplificar quedando la inecuación $\dfrac{\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[3]{x+5}}>0$, que de acuerdo a las observaciones, las expresiones del subradical tiene el mismo signo $\dfrac{3-x}{x+5}>0$, de donde $\dfrac{x-3}{x+5}<0$

+ -5 - 3 +

$x\in\ <-5,3>$

Luego la solución de la inecuación es: $x \in \langle -5,3\rangle \cap (\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle)$

$$\therefore\ x \in \langle -5,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle$$

Ejemplo.- Resolver la inecuación $\dfrac{\sqrt[3]{x^2-9}.(x^3+8x^2+4x-48)}{(x+4)^5(x^3-13x+12)} \geq 0$

Solución

De acuerdo a las observaciones indicadas se tiene que $\sqrt[3]{x^2-9}$ tiene el mismo signo que x^2-9 y que $(x+4)^5$ tiene el mismo signo que x + 4, por lo tanto la inecuación dada resulta equivalente a la inecuación:

$\dfrac{(x^2-9)(x^3+8x^2+4x-48)}{(x+4)(x^3-13x+12)} \geq 0$ factorizando el numerador y el denominador

$$\frac{(x+3)(x-3)(x-2)(x+6)(x+4)}{(x+4)(x-1)(x+4)(x-3)} \geq 0 \iff \frac{(x+3)(x-2)(x+6)(x+4)}{(x+4)^2(x-1)} \geq 0,\ x \neq 3$$

$$\frac{(x+3)(x-2)(x+6)(x+4)}{x-1} \geq 0$$

- + - + - +
-6 -4 -3 1 2

$\therefore\ x \cup [-6,-4] \cup [-3,1\rangle \cup [2,+\infty\rangle - \{3\}$

OBSERVACIÓN.- Si n es un numero positivo par, entonces:

(1) $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \iff 0 \leq P(x) \leq Q(x)$

(2) $\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)} \iff 0 \leq P(x) < Q(x)$

Ejemplo.- $\sqrt{\dfrac{32-2x}{x+2}} \geq \sqrt{x}$

Solución

Aplicando la observación a) se tiene:

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{\frac{32-2x}{x+2}} \iff 0 \leq x \leq \frac{32-2x}{x+2}$$

$$\iff x \geq 0 \ \wedge\ x \leq \frac{32-2x}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad x - \frac{32-2x}{x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2+4x-32}{x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{(x+8)(x-4)}{x+2} \leq 0$$

- + - +
-8 -2 4

$\Leftrightarrow \ x \geq 0 \ \wedge \ x \in \langle -\infty,-8] \cup \langle -2,4]$ $\quad \therefore \ x \in [0,4]$

3.33. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Resolver la inecuación cuadrática: $\quad -4x^2+4x+3>0$

Solución

La inecuación dada expresaremos en la forma: $4x^2-4x-3<0$

factorizando $(2x + 1)(2x - 3) < 0$, aplicando la propiedad de números reales:

$(2x + 1)(2x - 3) < 0 \ \Leftrightarrow \ (2x + 1 > 0 \ \wedge \ 2x - 3 < 0) \ \vee \ (2x + 1 < 0 \ \wedge \ 2x - 3 > 0)$

$$\Leftrightarrow \quad (x > -\frac{1}{2} \ \wedge \ x < \frac{3}{2}) \ \vee \ (x < -\frac{1}{2} \ \wedge \ x > \frac{3}{2})$$

-1/2 3/2 V -1/2 ϕ 3/2

La solución es: $\quad x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$

Ahora resolvemos mediante la naturaleza de las raíces la ecuación $4x^2-4x-3=0$, de donde $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{3}{2}$

+ - +
-1/2 3/2

Como la inecuación es de la forma $4x^2-4x-3<0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $\boxed{x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle}$

2 $\quad x^5+8x^4+12x^3-x^2-8x-12>0$

Solución

Aplicaremos el criterio de las raíces de la ecuación: $x^5+8x^4+12x^3-x^2-8x-12=0$

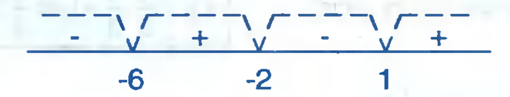
1	8	12	-1	-8	-12	1
	1	9	21	20	12	
1	9	21	20	12	0	-2
	-2	-14	-14	-12		
1	7	7	6	0		-6
	-6	-6	-6			
1	1	1	0			

La ecuación que queda es:

$x^2+x+1=0$, cuyas raíces

son: $r=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

Luego las raíces reales son: $r_1=-6$, $r_2=-2$, $r_3=1$



Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+), es decir: $x \in \langle -6,-2\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$



$12x^4-56x^3+89x^2-56x+12<0$

Solución

Encontrando las raíces de la ecuación

$12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=0$ dividiendo entre x^2

$$12x^2-56x+89-\frac{56}{x}+\frac{12}{x^2}=0 \Rightarrow 12(x^2+\frac{1}{x^2})-56(x+\frac{1}{x})+89=0 \qquad \textbf{... (1)}$$

Sea $z=x+\dfrac{1}{x} \Rightarrow z^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=z^2-2$

Reemplazando en la ecuación **(1)** se tiene:

$12(z^2-2)-56z+89=0$, entonces: $12z^2-56z+65=0 \Rightarrow (6z-13)(2z-5)=0$

de donde $z=\frac{13}{6}$, $z=\frac{5}{2}$

para $z=\frac{13}{6} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6} \Rightarrow 6x^2-13x+6=0$, de donde $r_1=\frac{3}{2}$, $r_2=\frac{2}{3}$

para $z=\frac{5}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2-5x+2=0$, de donde $r_3=\frac{1}{2}$, $r_4=2$

ordenando las raíces en la recta numérica

+ 1/2 - 2/3 + 3/2 - 2 +

Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x \in <\frac{1}{2},\frac{2}{3}> \cup <\frac{3}{2},2>$

4 x(2x + 1)(x – 2)(2x – 3) > 63

Solución

Hallaremos las raíces de la ecuación:

x(2x + 1)(x – 2)(2x – 3) – 63 = 0, entonces x(2x – 3)(2x + 1)(x – 2) – 63 = 0

$(2x^2-3x)(2x^2-3x-2)-63=0$

Sea $z=2x^2-3x \Rightarrow z(z-2)-63=0$

$z^2-2z-63=0 \Rightarrow (z-9)(z+7)=0$, de donde z = 9, z = -7, entonces:

Para z = 9 $\Rightarrow 9=2x^2-3x \Rightarrow 2x^2-3x-9=0$, de donde: $r_1=-\frac{3}{2}$, $r_2=3$

Para z = -7 $\Rightarrow -7=2x^2-3x \Rightarrow 2x^2-3x+7=0$, de donde: $r=\frac{3\pm\sqrt{47}i}{4}$

+ -3/2 - 3 +

Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -\frac{3}{2} \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$

(5) $\frac{x}{1-x} \le \frac{x-3}{2-x}$

Solución

La inecuación dada se escribe en la forma:

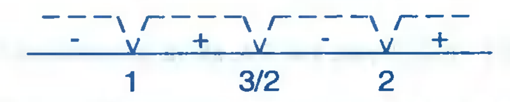
$$\frac{x}{1-x} - \frac{x-3}{2-x} \le 0 \Rightarrow \frac{x(2-x)-(x-3)(1-x)}{(1-x)(2-x)} \le 0, \text{ simplificando}$$

$$\frac{-2x+3}{(1-x)(2-x)} \le 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \ge 0, \text{ entonces la inecuación}$$

$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \ge 0$, es equivalente a la inecuación

$(2x - 3)(x - 1)(x - 2) \ge 0$ para $x \ne 1,2$ encontrando las raíces de la ecuación

$(2x - 3)(x - 1)(x - 2) = 0$, se tiene: $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{3}{2}$, $r_3 = 2$



como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle 1, \frac{3}{2}] \cup \langle 2, +\infty \rangle$

(6) $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

Solución

La inecuación dada se escribe en la forma:

$\frac{x-2}{x+3}-\frac{x+1}{x}<0 \Rightarrow \frac{x(x-2)-(x+1)(x+3)}{x(x+3)}<0$, simplificando

$\frac{-6x-3}{x(x+3)}<0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x(x+3)}>0$. entonces la inecuación $\frac{2x+1}{x(x+3)}>0$ es equivalente a la inecuación (2x + 1)x(x + 3) > 0, para x ≠ -3,0, ahora encontraremos las raíces de la ecuación: (2x + 1)(x + 3)x = 0, de donde $r_1=-3$, $r_2=-\frac{1}{2}$, $r_3=0$.

```
 - + - +
-----|-------|-------|-----
    -3     -1/2      0
```

Como la inecuación P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+) es decir: $x \in \langle -3, \frac{1}{2} \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$

7. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geq 0$

Solución

$\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x+7)(x-6)} \geq 0$, esta inecuación es equivalente a:

(x–2)(x–3)(x + 7)(x – 6) ≥ 0 para x ≠ -7,6, ahora encontraremos las raíces de la ecuación.

(x – 2)(x – 3)(x + 7)(x – 6) = 0, donde $r_1=-7$, $r_2=2$, $r_3=3$, $r_4=6$.

```
 + - + - +
-----|-----|-----|-----|-----
    -7     2     3     6
```

Como la ecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: x ∈ <-∞, -7> ∪ [2,3] ∪ <6,+∞>

8. $\frac{-x^3+x^2+22x-40}{x(x+7)} \geq 0$

Solución

La inecuación dada escribiremos en la forma:

$$\frac{x^3-x^2-22x+40}{x(x+7)}\le 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)(x+5)}{x(x+7)}\le 0$$

La inecuación $\frac{(x-2)(x-4)(x+5)}{x(x+7)}\le 0$, es equivalente a:

$(x-2)(x-4)(x+5)x(x+7)\le 0$, para $x\neq -7,0$

ahora encontramos las raíces de la ecuación

$(x-2)(x-4)(x+5)x(x+7)=0$ de donde: $r_1=-7$, $r_2=-5$, $r_3=0$, $r_4=2$, $r_5=4$

$$\begin{array}{ccccccccccc} - & & + & & - & & + & & - & & + \\ & -7 & & -5 & & 0 & & 2 & & 4 & \end{array}$$

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}\le 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x\in\langle-\infty,-7\rangle\cup[-5,0\rangle\cup[2,4]$

(9) $$1+\frac{24-4x}{x^2-2x-15}>0$$

Solución

La inecuación dada escribiremos en la forma: $\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-15}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{(x-5)(x+3)}>0$

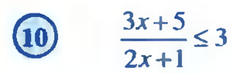
pero $(x-3)^2>0$, $x\neq 3$, entonces: $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(x+3)}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-5)(x+3)}>0$ para $x\neq 3$

$\frac{1}{(x-5)(x+3)}>0$, $x\neq -3, 5 \Leftrightarrow (x-5)(x+3)>0$, para $x\neq -3, 5$,

ahora encontraremos las raíces de $(x-5)(x+3)=0$, de donde $r_1=-3$, $r_2=5$.

+ -3 - 5 +

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty,-3\rangle \cup \langle 5,\infty\rangle$



10) $\frac{3x+5}{2x+1} \le 3$

Solución

A la inecuación dada escribiremos en la forma:

$$\frac{3x+5}{2x+1} - 3 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+2}{2x+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{2x+1} \ge 0$$

$$\frac{3x-2}{2x+1} \ge 0 \Leftrightarrow (3x-2)(2x+1) = \ge 0, \text{ para } x \ne -\frac{1}{2}$$

ahora encontramos las raíces de: $(3x-2)(2x+1) = 0$, donde $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{2}{3}$

+ -1/2 - 2/3 +

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{2}\rangle \cup [\frac{2}{3}, +\infty\rangle$

11) $\frac{(2x^2-8x+8)(x+3)}{x+6} \ge 0$

Solución

$$\frac{(2x^2-8x+8)(x+3)}{x+6} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-2)^2(x+3)}{x+6} \ge 0, \ (x-2)^2 \ge 0, \ \forall x \in R$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x+6} \ge 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+6) \ge 0, \text{ para } x \ne -6$$

Luego las raíces de $(x+3)(x+6)=0$ son $r_1=-6$, $r_2=-3$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -6 & & -3 & \end{array}$$

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty,-6\rangle \cup [-3,+\infty\rangle \cup \{2\}$

(12) $\frac{(1-x-x^2)(2-x-x^2)}{(3-x)(2-x)}\geq 0$

Solución

$$\frac{(1-x-x^2)(2-x-x^2)}{(3-x)(2-x)}\geq 0 \iff \frac{(x^2+x-1)(x^2+x-2)}{(x-3)(x-2)}\geq 0$$

$$\frac{(x^2+x-1)(x^2+x-2)}{(x-3)(x-2)}\geq 0 \iff (x^2+x-1)(x^2+x-2)(x-3)(x-2)\geq 0\text{, para } x\neq 2,3$$

ahora encontramos las raíces de: $(x^2+x-1)(x^2+x-2)(x-3)(x-2)=0$, dé donde

$$r_1=-2,\ r_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ r_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ r_4=1,\ r_5=2.\ r_6=3$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} + & & - & & + & & - & & + & & - & & + \\ \hline & -2 & & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & & 1 & & 2 & & 3 & \end{array}$$

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x\in\langle -\infty,-2]\cup[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}]\cup[1,2\rangle\cup\langle 3,+\infty\rangle$$

(13) $\frac{x^5-1}{x^4+1}<\frac{x^5-2}{x^4+2}$

Solución

$\forall$ x $\in$ R, $x^4+1>0$, $x^4+2>0$, entonces la inecuación dada se puede escribir en la forma: $(x^5-1)(x^4+2)<(x^5-2)(x^4+1)$, efectuando operaciones y simplificando se tiene: $x^4(x+1)<0$, luego encontrando las raíces de

$x^4(x+1)=0$ se tiene $r_1=-1$, $r_2=0$, multiplicidad 4.



Como la inecuación es de la forma p(x) < 0, la solución es: $x \in \langle -\infty,-1\rangle$


14) $\dfrac{(x^2-2x+4)(x-1)}{(2x+1)(x+4)}<0$

Solución

La inecuación $\dfrac{(x^2-2x+4)(x-1)}{(2x+1)(x+4)}<0$, es equivalente a:

$(x^2-2x+4)(x-1)(2x+1)(x+4)<0$, para $x\neq -4,-\dfrac{1}{2}$

ahora encontramos las raíces de la ecuación.

$(x^2-2x+4)(x-1)(2x+1)(x+4)=0$, de donde.

$r_1=-4$, $r_2=-\dfrac{1}{2}$, $r_3=1$, $r_4=1+\sqrt{3}i$, $r_5=1-\sqrt{3}i$

-	+	-	+
-4	-1/2	1	

Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x\in\langle -\infty,-4\rangle\cup\langle -\dfrac{1}{2},1\rangle$

15 $\frac{x+5}{x-6} \leq \frac{x-1}{x-3}$

Solución

$\frac{x+5}{x-6} \leq \frac{x-1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x+5}{x-6} - \frac{x-1}{x-3} \leq 0$, efectuando operaciones se tiene:

$\frac{3x-7}{(x-6)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow (3x-7)(x-6)(x-3) \leq 0,\ x \neq 3,6$

ahora encontramos las raíces de la ecuación

$(3x-7)(x-6)(x-3) = 0$, de donde $r_1 = \frac{7}{3}$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$

- + - +
7/3 3 6

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x \in \langle -\infty, \frac{7}{3}] \cup \langle 3, 6 \rangle$


16 $\frac{(x-3)(x+2)^2(x+1)(x-4)}{x(x+2)(x^2-3)(x+3)} > 0$

Solución

$(x+2)^2 > 0$, para $x \neq -2$, la inecuación dada es equivalente.

$\frac{(x-3)(x+1)(x+4)}{(x+2)x(x+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} > 0$, la cual es equivalente a:

$(x-3)(x+1)(x-4)x(x+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2) > 0$, $x \neq 0, -3, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

ahora encontramos las raíces de la ecuación,

$(x+2)(x-3)(x+1)(x-4)x(x+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$, de donde

$r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_3 = -\sqrt{3}$, $r_4 = -1$, $r_5 = 0$, $r_6 = \sqrt{3}$, $r_7 = 3$, $r_8 = 4$

+   -3   -   -2   + $-\sqrt{3}$ -   -1   +   0   - $\sqrt{3}$ +   3   -   4   +

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle \sqrt{3}, 3 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$$

(17) $\frac{x-2}{x+2} < \frac{x^2}{x^2+2}$

Solución

$\frac{x-2}{x+2} < \frac{x^2}{x^2+2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} - \frac{x^2}{x^2+2} < 0$, de donde

$$\frac{-4x^2+2x-4}{(x+2)(x^2+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x+2}{(x+2)(x^2+2)} > 0$$

$\forall\ x \in R$, $2x^2 - x + 2 > 0$ y $x^2 + 2 > 0$, entonces se simplifica la inecuación $\frac{1}{x+2} > 0$

Luego $\frac{1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0$, para $x \neq -2$. La solución es: $x \in \langle -2, +\infty \rangle$

(18) $\frac{x+4}{x-7} > \frac{x}{x+1}$

Solución

$\frac{x+4}{x-7} > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-7} - \frac{x}{x+1} > 0$, de donde

$\frac{12x+4}{(x-7)(x+1)} > 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x-7)(x+1) > 0$, para $x \neq -1, 7$

ahora encontramos las raíces de la ecuación $(3x + 1)(x - 7)(x + 1) = 0$, de donde

$r_1 = -1,\ r_2 = -\frac{1}{3},\ r_3 = 7$

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ & -3 & & -1/3 & & 7 & \end{array}$$

Como la solución es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen los intervalos donde aparece el signo (+), es decir:

$$x \in \left< -1, -\frac{1}{3} \right> \cup \left< 7, +\infty \right>$$

(19) $\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4} > 1$

Solución

$\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4} > 1 \iff \frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4} - 1 > 0$, de donde

$\frac{x^2-x-1}{x^2-5x+4} > 0 \iff (x^2-x-1)(x^2-5x+4) > 0$ para $x \neq 1, 4$;

ahora hallaremos las raíces de la ecuación.

$(x^2-x-1)(x^2-5x+4) = 0$, de donde $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = 1$, $r_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_4 = 4$

$$\begin{array}{ccccccccc} + & & - & & + & & - & & + \\ & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & & 1 & & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & & 4 & \end{array}$$

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x \in \left< -\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right> \cup \left< 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right> \cup \left< 4, +\infty \right>$$

(20) $\frac{2x-1}{x+4} < \frac{x}{x+4} \leq \frac{x+1}{x+4}$

Solución

$$\frac{2x-1}{x+4}<\frac{x}{x+4}\le\frac{x+1}{x+4} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+4}<\frac{x}{x+4} \wedge \frac{x}{x+4}\le\frac{x+1}{x+4}$$

$\frac{2x-1}{x+4}-\frac{x}{x+4}<0 \wedge \frac{x}{x+4}-\frac{x+1}{x+4}\le 0$, de donde $\frac{x-1}{x-4}<0 \wedge \frac{1}{x+4}\ge 0$, estas ecuaciones son equivalentes a:

$(x-1)(x+4)<0 \wedge x+4\ge 0$, para $x\ne -4$ ahora encontraron las raíces de las ecuaciones, $(x-2)(x+4)=0 \wedge x+4=0$, de donde $r_1=-4$, $r_2=1 \wedge r_3=-4$

\+   -   +   Λ   -   +

-4   1   -4

de acuerdo a la forma de la inecuación la solución es: x ∈ <-4,1> Λ x ∈ [-4,+∞>

∴ x ∈ <-4,1>

(21) $\sqrt{x^2-x-2}<5-x$

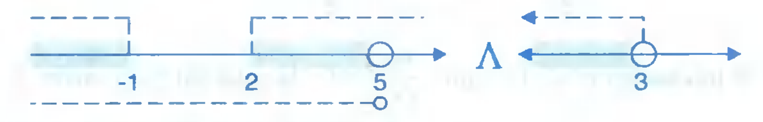
Solución

Aplicando la propiedad: $\sqrt{P(x)}<Q(x) \Leftrightarrow (P(x)\ge 0 \wedge [Q(x)\ge 0) \wedge (P(x)<Q^2(x)])$

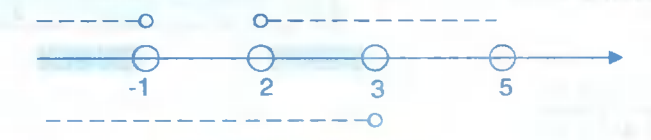
$$\sqrt{x^2-x-2}<5-x \Leftrightarrow (x^2-x-2\ge 0 \wedge [5-x\ge 0 \wedge x^2-x-2<(5-x)^2])$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\ge 0 \wedge [5-x\ge 0 \wedge x^2-x-2<25-10x+x^2])$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)\ge 0 \wedge (x\le 5 \wedge x<3)$$



x ∈ <-∞,-1] U [2,5] Λ x ∈ <-∞,3>



La solución es: x ∈ <-∞,-1] ∪ [2,3>

22 $\sqrt[4]{(0.8)^{\frac{3x-4}{4}}} > \sqrt[8]{(0.64)^{\frac{2x-2}{5}}}$

Solución

La inecuación dada es equivalente a: $(0.8)^{\frac{3x-4}{16}} > (0.8)^{\frac{4x-4}{40}}$

como $a = 0.8 < 1$, entonces los exponentes son desiguales en sentido contrario, es decir:

$\frac{3x-4}{16} < \frac{4x-4}{40}$, efectuando y simplificando.

$\frac{3x-4}{8} < \frac{x-1}{5} \Rightarrow x < \frac{12}{7}$, la solución es: $x \in \langle -\infty, \frac{12}{7} \rangle$

23 $\sqrt{24-2x-x^2} < x$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente:

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \iff (P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \geq 0 \wedge P(x) < Q^2(x)])$$

$$\sqrt{24-2x-x^2} < x \iff (24-2x-x^2 \geq 0 \wedge [x \geq 0 \wedge 24-2x-x^2 < x^2])$$

$$\iff (x^2+2x \leq 24 \wedge [x \geq 0 \wedge 2x^2+2x > 24])$$

$$\iff ((x+1)^2 \leq 25 \wedge [x \geq 0 \wedge (x+\frac{1}{2})^2 > \frac{49}{4}])$$

$$\iff (-6 \leq x \leq 4 \wedge [x \geq 0 \wedge (x > 3 \vee x < -4)])$$

$$\iff x \in [0,4] \wedge x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

$$\therefore \quad x \in \langle 3,4]$$

24 $(0.25)^{\frac{6x-4}{3}} . (0.5)^{\frac{2x-3}{4}} < (0.0625)^{\frac{3x-4}{6}} . (0.125)^{\frac{4x-2}{9}}$

Solución

La inecuación dada es equivalente a: $(0.5)^{\frac{12x-8}{3}}.(0.5)^{\frac{2x-3}{4}} < (0.5)^{\frac{6x-8}{3}}.(0.5)^{\frac{4x-2}{3}}$

Operando tenemos: $(0.5)^{\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4}} < (0.5)^{\frac{6x-8}{3}+\frac{4x-2}{3}}$

Como a = 0.5 < 1, entonces los exponentes son desiguales en sentido contrario a la inecuación, es decir: $\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4} > \frac{6x-8}{3}+\frac{4x-2}{3}$

$\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4} > \frac{10x-10}{3}$, simplificando: $\frac{2x+2}{3}+\frac{2x-3}{4} > 0 \Rightarrow \frac{8x+8+6x-9}{12} > 0$

$14x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{14}$; la solución es: $\boxed{x \in \left< \frac{1}{4}, +\infty \right>}$

(25) $32\sqrt{2^{x+1}} > (4^{2x}.8^{x-3})^{2/5}$

Solución

La inecuación dada es equivalente a: $2^5.2^{\frac{x+1}{2}} > (2^{4x}.2^{3x-9})^{2/5}$, de donde

$2^{\frac{x+11}{2}} > 2^{\frac{14x-18}{5}}$, como a = 2 > 0, entonces:

$\frac{x+11}{2} > \frac{14x-18}{5} \Rightarrow 5x + 55 > 28x - 36 \Rightarrow x < \frac{91}{23}$. La solución $\boxed{x \in \left< -\infty, \frac{91}{23} \right>}$

(26) Si $\frac{1}{2} < x < 1$, Demostrar que: $\frac{3}{8} < \frac{x+2}{x+3} < \frac{6}{7}$

Solución

$\frac{x+2}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$ (se obtiene dividiendo)

$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow \frac{7}{2} < x+3 < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x+3} < \frac{2}{7}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2}{7} < -\frac{1}{x+3} < -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{2}{7} < 1-\frac{1}{x+3} < 1-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{7} < \frac{x+2}{x+3} < \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{8} < \frac{5}{7} < \frac{x+2}{x+3} < \frac{3}{4} < \frac{6}{7}$$

$$\therefore \quad \frac{3}{8} < \frac{x+2}{x+3} < \frac{6}{7}$$

(27) $\sqrt{1-x} \le \sqrt[4]{5+x}$

Solución

$$\sqrt{1-x} \le \sqrt[4]{5+x} \iff (1-x \ge 0 \ \wedge \ x+5 \ge 0) \wedge (\sqrt{1-x})^2 \le (\sqrt[4]{x+5})^2$$

$$\iff (x \le 1 \ \wedge \ x \ge -5) \ \wedge \ (1-x \le \sqrt{x+5}) \qquad \text{... (1)}$$

$$\sqrt{x+5} \ge 1-x \iff [(x+5 \ge 0 \ \wedge \ 1-x \le 0) \vee (x+5 \ge 0 \ \wedge \ x+5 > (1-x)^2]$$

$$\iff [(x \ge -5 \ \wedge \ x \ge 1) \vee (x \ge -5 \ \wedge \ x+5 > 1-2x+x^2)]$$

$$\iff [(x \ge -5 \ \wedge \ x \ge 1) \vee (x \ge -5 \ \wedge \ x^2-3x-4 \le 0)]$$

$$\iff [(x \ge -5 \ \wedge \ x \ge 1) \vee (x \ge -5 \ \wedge \ x \in [-1,4])]$$

$$\iff [(x \ge -5 \ \wedge \ x \ge 1) \vee \ x \in [-1,4]]$$

$$\iff [x \ge -5 \ \wedge \ x \ge -1] \Rightarrow x \ge -1 \Rightarrow x \in [-1,\infty> \qquad \text{... (2)}$$

ahora (2) en (1) se tiene: $(x \le 1 \ \wedge \ x \ge -5) \wedge x \in [-1,+\infty>$

$x \in [-5, 1] \wedge x \in [-1,+\infty>$ $\qquad \therefore \ x \in [-1,1]$

(28) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x-2} > 9$

Solución

Calculando el campo de existencia $\quad 3x+7 \ge 0 \wedge x-2 \ge 0 \iff x \ge -\frac{7}{3} \ \wedge \ x \ge 2$

por lo tanto $x \in [2,+\infty>$ es el campo de existencia

$$\sqrt{3x+7} > 9+\sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \ \wedge \ [3x+7 < 81+18\sqrt{x-2}+x-2]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \ \wedge \ (x-36 < 9\sqrt{x-2})$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \ \wedge \ x^2-153x+1458 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \ \wedge \ (x-\frac{153}{2})^2 < \frac{17577}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \ \wedge \ \frac{153-\sqrt{17577}}{2} < x < \frac{153+\sqrt{17577}}{2}$$

$$x \in <\frac{153-\sqrt{17577}}{2}, \frac{153+\sqrt{17577}}{2}>$$



29) $$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}} \geq 0$$

Solución

Calculando el campo de existencia

$(x-1 \geq 0 \ \wedge \ x-2 \geq 0) \ \wedge \ (9-x^2 \geq 0 \ \wedge \ x \geq 0)$

$(x \geq 1 \ \wedge \ x \geq 2) \ \wedge \ (x^2 \leq 9 \ \wedge \ x \geq 0)$

$(x \geq 1 \ \wedge \ x \geq 2) \ \wedge \ (-3 \leq x \leq 3 \ \wedge \ x \geq 0)$

$x \geq 2 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 3$, de donde $x \in [2,3]$ es el campo de existencia.

Como $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2} > 0$, $\forall \ x \in [2,3]$

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}} \geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}} \geq 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}$$

simplificando $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{9-x^2}-\sqrt{x} > 0$

de donde $\sqrt{x} < \sqrt{9-x^2} \ \Rightarrow \ x < 9-x^2$

$x^2+x-9<0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2<\frac{37}{4}$ (completando cuadrados)

$$(x+\frac{1}{2})^2<\frac{37}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{37}}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{37}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{37}+1}{2}<x<\frac{\sqrt{37}-1}{2}$$

Luego la solución es: $x\in\langle-\frac{\sqrt{37}+1}{2},\frac{\sqrt{37}-1}{2}\rangle \wedge [2,3]$

$$\therefore\ x\in[2,\frac{\sqrt{37}-1}{2}\rangle$$

(30) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

Solución

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x} \Leftrightarrow (2-\sqrt{3+x}\geq 0 \wedge 4+x\geq 0) \wedge (2-\sqrt{3+x}<4+x)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3+x}\leq 2 \wedge x\geq -4) \wedge (\sqrt{3+x}>-x-2) \quad \textbf{... (1)}$$

$$\sqrt{3+x}\leq 2 \Leftrightarrow (3+x\geq 0 \wedge 3+x\leq 4)$$

$$\Leftrightarrow (x\geq -3 \wedge x\leq 1) \Rightarrow x\in[-3,1] \quad \textbf{... (2)}$$

$$\sqrt{3+x}>-x-2 \Leftrightarrow x+3\geq 0 \wedge [-x-2<0 \vee (x+3\geq 0 \wedge x+3>(x+2)^2)]$$

$$\Leftrightarrow x\geq -3 \wedge [x>-2 \vee (x\geq -3 \wedge x^2+3x+1<0)]$$

$$\Leftrightarrow x\geq -3 \wedge [x>-2 \vee (x\geq -3 \wedge (x+\frac{3}{2})^2<\frac{5}{4})]$$

$$\Leftrightarrow x\geq -3 \wedge [x>-2 \vee (x\geq -3 \wedge -\frac{\sqrt{5}+3}{2}<x<\frac{\sqrt{5}-3}{2})]$$

$$\Leftrightarrow x\geq -3 \wedge [x>-2 \vee x\in\langle-\frac{\sqrt{5}+3}{2},\frac{\sqrt{5}-3}{2}\rangle]$$

$$\Leftrightarrow x\geq -3 \wedge x\in\langle-\frac{\sqrt{5}+3}{2},+\infty\rangle$$

$$x \in \left\langle -\frac{\sqrt{5}+3}{2}, +\infty \right\rangle \quad \ldots (3)$$

Luego de (2), (3) en (1) se tiene:

$$\sqrt{2-\sqrt{x+3}} < \sqrt{4+x} \Leftrightarrow (x \in [-3,1] \wedge x \geq -4) \wedge x \in \left\langle -\frac{\sqrt{5}+3}{2}, +\infty \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow x \in [-3,1] \wedge x \in \left\langle -\frac{\sqrt{5}+3}{2}, +\infty \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x \in \left\langle -\frac{\sqrt{5}+3}{3}, 1 \right]}$$

(31) $\frac{3}{x} \leq \frac{13}{4(x-1)} + \frac{1}{4x+12}$

Solución

A la inecuación dada expresaremos así:

$\frac{13}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+3)} - \frac{3}{x} \geq 0$, efectuando operaciones $\frac{13(x+3)x + x(x-1) - 12(x-1)(x+3)}{4(x-1)(x+3)x} \geq 0$

$\frac{13x^2+39x+x^2-x-12(x^2+2x-3)}{4x(x-1)(x+3)} \geq 0$, simplificando

$$\frac{2x^2+14x+36}{4x(x-1)(x+3)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+7x+18}{x(x-1)(x+3)} \geq 0$$

$\forall$ x $\in$ R, $x^2+7x+18>0$ entonces: $\frac{x^2+7x+18}{x(x-1)(x+3)} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)(x+3)} \geq 0$

$\frac{1}{x(x-1)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+3) > 0$, para x $\neq$ 1, -3, 0

resolviendo la ecuación x(x – 1)(x + 3) = 0, de donde, $r_1 = -3$, $r_2 = 0$, $r_3 = 1$

- + - +

-3 0 1

como la ecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen los signos (+), es decir: $x \in \langle -3,0\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$



$$\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}$$

Solución

La inecuación dada escribiremos en la forma:

$$\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2+3x+x^2-x-3x^2+3}{x(x-1)(x+1)} \geq 0$$

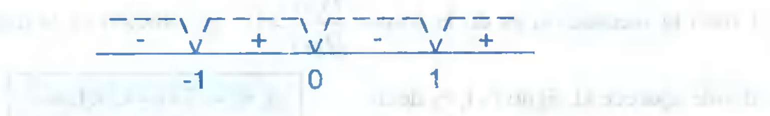
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+1)} \geq 0$$

como $\forall$ x $\in$ R, $x^2+2x+3>0$, entonces

$$\frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \geq 0, \text{ para } x \neq -1,0,1$$

Ahora resolviendo $x(x-1)(x+1)=0$, de donde $r_1=-1$, $r_2=0$, $r_3=1$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -1,0\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$

(33) $\dfrac{2x-25}{2(x^2+2x-3)}+\dfrac{2x+11}{2(x^2-1)}>\dfrac{1}{x+3}$

Solución

La inecuación dada escribiremos en la forma:

$\dfrac{2x-25}{2(x^2+2x-3)}+\dfrac{2x+11}{2(x^2-1)}-\dfrac{1}{x+3}>0$, factorizando en el denominador

$\dfrac{2x-25}{2(x+3)(x-1)}+\dfrac{2x+11}{2(x-1)(x+1)}-\dfrac{1}{x+3}>0$, efectuando operaciones

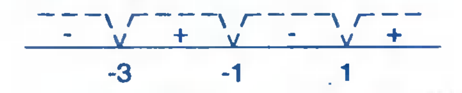
$\dfrac{(2x-25)(x+1)+(2x+11)(x+3)-2(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)(x+3)}>0$, simplificando se tiene:

$\dfrac{x^2-3x+5}{(x-1)(x+1)(x+3)}>0$, como $\forall$ x $\in$ R, $x^2-3x+5>0$, entonces:

$\dfrac{x^2-3x+5}{(x-1)(x+1)(x+3)}>0 \iff \dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x+3)}>0$

$\dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x+3)}>0 \iff (x-1)(x+1)(x+3)>0, \quad x \neq -3, -1, 1$

encontrando las raíces de $(x-1)(x+1)(x+3)=0$, donde $r_1=-3$, $r_2=-1$, $r_3=1$



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+), es decir: **x $\in$ <-3,-1> $\cup$ <1,+∞>**


(34) $\dfrac{(x-1)^2-(x+2)^2}{(x-2)^2-(x+1)^2}\geq 0$

Solución

Por medio de la diferencia de cuadrados se tiene:

$$\frac{[(x-1)-(x+2)][(x-1)+(x+2)]}{[(x-2)-(x+1)][(x-2)+(x+1)]}\geq 0\,,\quad \text{simplificando.}$$

$$\frac{-3(2x+1)}{-3(2x-1)}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+1)(2x-1)\geq 0 \;\text{ para }\; x\neq\frac{1}{2}$$

encontrando las raíces de $(2x + 1)(2x - 1) = 0$, de donde, $r_1=-\frac{1}{2}$, $r_2=\frac{1}{2}$

+   -   +

-1/2   1/2

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x\in\,<-\infty,-\frac{1}{2}>\cup<\frac{1}{2},+\infty>$

 35 $\quad \frac{x^4+5x^3-20x-16}{x^3+2x^2-13x+10}\leq 0$

Solución

Factorizando tanto en el numerador y denominador.

$$\frac{(x-2)(x+2)(x+1)(x+4)}{(x+5)(x-2)(x-1)}\leq 0\,,\;\text{ para }\; x\neq -5,1,2$$

la inecuación dada es equivalente a:

$(x-2)(x+2)(x+1)(x+4)(x+5)(x-2)(x-1)\leq 0$ para $x\neq -5,1,2$

$(x-2)^2(x+2)(x+1)(x+4)(x+5)(x+1)\leq 0$ para $x\neq -5,1,2$

como $\forall$ x $\in$ R, $x\neq 2$, $(x-2)^2>0$ entonces

$(x+2)(x+1)(x+4)(x+5)(x-1)\;\leq 0$, para $x\neq -5,1,2$

encontrando las raíces de $(x+2)(x+1)(x+4)(x+5)(x-1)=0$, de donde:

$r_1 = -5$, $r_2 = -4$, $r_3 = -2$, $r_4 = -1$, $r_5 = 1$

$$\begin{array}{ccccccccccc} - & & + & & - & & + & & - & & + \\ & -5 & & -4 & & -2 & & -1 & & 1 & \end{array}$$

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x \in \langle -\infty,-5\rangle \cup \langle -4,-2\rangle \cup \langle -1,1\rangle$

(36) $\frac{3^{2x-1}.3^{4-x}}{3^{6x-1}} > (3^{2x+1})^{(x-2)}$

Solución

La inecuación dada expresaremos en la forma

$3^{2x-1+4-x-6x+1} > 3^{(2x+1)(x-2)}$, de donde: $3^{-5x+4} > 3^{2x^2-3x-2}$

como $a = 3 > 0 \Rightarrow -5x+4 > 2x^2 - 3x - 2$, de donde

$2x^2 - 2x - 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 < 0$, completando cuadrados $x^2 + x + \frac{1}{4} < 3 + \frac{1}{4}$

$(x+\frac{1}{2})^2 < \frac{13}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{13}}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{13}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{13}-1}{2}$, de donde $x \in \langle -\frac{\sqrt{13}+1}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2} \rangle$

(37) $\frac{x}{x^2-5x+6} + \frac{1}{2x} \ge \frac{2x}{3-4x+x^2}$

Solución

A la inecuación dada expresaremos en la forma

$\frac{x}{x^2-5x+6} + \frac{1}{2x} - \frac{2x}{3-4x+x^2} \ge 0$, efectuando las operaciones:

$\frac{2x^2(x-1)+(x-2)(x-3)(x-1)-4x^2(x-2)}{2x(x-3)(x-2)(x-1)} \ge 0$, desarrollando:

$$\frac{2x^3-2x^2+x^3-6x^2+11x-6-4x^3+8x^2}{2x(x-3)(x-2)(x-1)} \geq 0$$, simplificando

$$\frac{x^3-11x+6}{x(x-3)(x-2)(x-1)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)(x+\frac{3-\sqrt{17}}{2})(x+\frac{3+\sqrt{17}}{2})}{x(x-3)(x-2)(x-1)} \leq 0$$

para x $\neq 3$ se tiene $\frac{(x+\frac{3-\sqrt{17}}{2})(x+\frac{3+\sqrt{17}}{2})}{x(x-2)(x-1)} \leq 0$

- + - + - +
$\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ $\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$ 0 1 2

Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ la solución es la unión de los intervalos

donde aparece el signo (-) es decir: $x \in \langle -\infty, -\frac{3+\sqrt{17}}{2} \rangle \cup \langle \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 0 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle$

38 $\frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3}$

Solución

Aplicaremos la propiedad siguiente: $a < b < c \quad \Leftrightarrow \quad a < b \ \wedge \ b < c$

$$\frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} \ \wedge \ \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{x+1} - \frac{1}{5} > 0 \ \wedge \ \frac{x-3}{x+1} - \frac{2}{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5x-15-x-1}{5(x+1)} > 0 \ \wedge \ \frac{3x-9-2x-2}{3(x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{x+1} > 0 \ \wedge \ \frac{x-11}{x+1} < 0$$

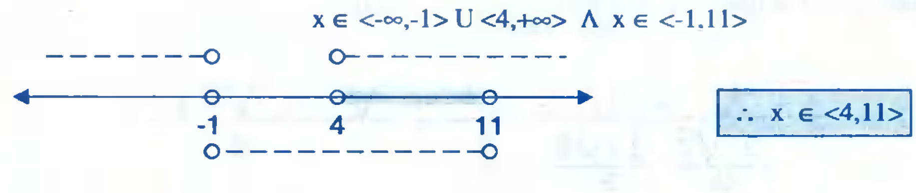
$$\Leftrightarrow \quad (x-4)(x+1)>0,\ x\neq -1 \ \wedge \ (x-11)(x+1)<0,\ x\neq -1$$

ahora encontrando las raíces de (x – 4)(x + 1) = 0, de donde $r_1=-1$, $r_2=4$, $r_3=-1$, $r_4=11$

+ -1 - 4 + ∧ + -1 - 11 +

de acuerdo a la forma de la inecuación la solución es:

x ∈ <-∞,-1> U <4,+∞> ∧ x ∈ <-1,11>



∴ x ∈ <4,11>

39 $\dfrac{x^4}{x^4-16}<\dfrac{5x^2+36}{x^4-16}$

Solución

A la inecuación dada escribiremos en la forma

$$\frac{x^4}{x^4-16}-\frac{5x^2+36}{x^4-16}<0 \Leftrightarrow \frac{x^4-5x^2-16}{x^4-16}<0, \text{ factorizando}$$

$$\frac{(x^2-9)(x^2+4)}{(x^2-4)(x^2+4)}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x^2-4}<0$$

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-2)}<0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)(x+2)(x-2)<0, \text{ para } x\neq -2,2$$

ahora encontrando las raíces de:

(x + 3)(x – 3)(x + 2)(x – 2) = 0 de donde $r_1=-3$, $r_2=-2$, $r_3=2$, $r_4=3$

+ -3 - -2 + 2 - 3 +

como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen los signos (-), es decir: x ∈ <-3,-2> ∪ <2,3>

(40) $(x-9)^{2n}(1-x^3)^{2n+1}(x^4-9)<0$, si n ≥ 1, n ∈ N

Solución

Para x ≠ 9, $(x-9)^{2n}>0$, $(1-x^3)^{2n}>0$, para x ≠ 1.

Entonces a la inecuación dado se puede simplificar, es decir: $(1-x^3)(x^4-9)<0$

Factorizando $(x-1)(x^2+x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)>0$, x ≠ 1,9

como ∀ x ∈ R, $x^2+x+1>0$, $x^2+3>0$

entonces $(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0$, x ≠ 1,9

ahora encontrando las raíces de: $(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$

de donde: $r_1=-\sqrt{3}$, $r_2=1$, $r_3=\sqrt{3}$



Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+), es decir: $x\in<-\sqrt{3},1>\cup<\sqrt{3},+\infty>-\{9\}$

3.34. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Resolver las siguientes inecuaciones

(1) 5x – 2 < 10x + 8 < 2x + 16 **Rpta.** <-2,1>

(2) $-\frac{1}{5}\le 3x-\frac{1}{4}\le\frac{1}{3}$ **Rpta.** $[\frac{1}{60},\frac{7}{36}]$

(3) $\frac{x}{a^2-b^2}+\frac{3x}{a+b}<\frac{5}{a-b}$, a > b > 0 **Rpta.** $<-\infty,\frac{5a+5b}{1+3a-3b}>$

(4) $\frac{2x}{3a}+4>\frac{5x}{6b}+2x$, a > b > 0 **Rpta.** $<-\infty,\frac{24ab}{5a+12ab-4b}>$

(5) $2x+\frac{6-3x}{4}<4$ **Rpta.** $<-\infty,2>$

(6) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}>1+\frac{x}{c}$, $c>b>a>0$ **Rpta.** $<\frac{abc}{ac+bc-ab},+\infty>$

(7) $2x-6<\frac{3x+8}{5}$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{38}{7}>$

(8) $3(x-5)-4(4-3x)\geq 2(7-x)-3(x-5)$ **Rpta.** $<3,+\infty>$

II. Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $2x^2-6x+3<0$ **Rpta.** $<\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2}>$

(2) $2x^2+6x-9<0$ **Rpta.** $<\frac{-3-3\sqrt{3}}{2},\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}>$

(3) $9x^2+54x>-76$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{9+\sqrt{5}}{3}>\cup<\frac{\sqrt{5}-9}{3},+\infty>$

(4) $-4x^2+4x+3>0$ **Rpta.** $<-\frac{1}{2},\frac{3}{2}>$

(5) $4x^2+9x+9<0$ **Rpta.** ϕ

(6) $4x^2-4x+7>0$ **Rpta.** C.S. = R

(7) $x^4-2x^2-8<0$ **Rpta.** $<-2,2>$

(8) $-4x^2-8<-12x$ **Rpta.** $<-\infty,1>\cup<2,+\infty>$

(9) $x^2-2\sqrt{3}x-2>0$ **Rpta.** $<-\infty,\sqrt{3}-\sqrt{5}>\cup<\sqrt{3}+\sqrt{5},+\infty>$

(10) $3x^2-8x+11\geq 4(x-1)$ **Rpta.** $\forall\ x\in R$

(11) $3x^2-10x+3<0$ **Rpta.** $<\frac{1}{3},3>$

(12) $x(3x+2) < (x+2)^2$ **Rpta.** <-1,2>

(13) $4x^2 - 8x + 1 < 0$ **Rpta.** $< \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2} >$

(14) $5x^2 - 14x + 9 \leq 0$ **Rpta.** $[1, \frac{9}{5}]$

(15) $x^2 + 3x + 2 > 0$ **Rpta.** $<-\infty,-2> \cup <-1,+\infty>$

(16) $1 - 2x - 3x^2 \geq 0$ **Rpta.** $[-1, \frac{1}{3}]$

(17) $3x^2 - 5x - 2 > 0$ **Rpta.** $< -\infty, -\frac{1}{3} > \cup < 2, +\infty >$

(18) $(x^2 + 2x)(x^2 - 1) - 24 > 0$ **Rpta.** $<-\infty,-3> \cup <2,+\infty>$

(19) $x(x-3)(x-1)(x+2) > 16$ **Rpta.** $< -\infty, \frac{1-\sqrt{33}}{2} > \cup < \frac{1+\sqrt{33}}{2}, +\infty >$

(20) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6 < 0$ **Rpta.** <-3,1>

(21) $(x^2 + x - 6)(4x - 4 - x^2) \leq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-3] \cup [2,+\infty>$

(22) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 \geq 0$ **Rpta.** $[-3, -\frac{1}{2}] \cup [2, +\infty >$

(23) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 > 0$ **Rpta.** $<-3,1> \cup <5,+\infty>$

(24) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 > 0$ **Rpta.** $<-\infty,-2> \cup <1,2> \cup <3,+\infty>$

(25) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 > 0$ **Rpta.** $<-3,-2> \cup <-1,1> \cup <2,+\infty>$

(26) $x^5 - 6x^4 - x^3 + 29x^2 + 8x - 15 < 0$

Rpta. $< -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} > \cup < -1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > \cup < 3, 5 >$

(27) $(x^2-2x-5)(x^2-2x-7)(x^2-2x-4)>0$

Rpta. $<-\infty,1-2\sqrt{2}>\cup<1-\sqrt{6},1-\sqrt{5}>\cup<1+\sqrt{5},1+\sqrt{6}>\cup<1+2\sqrt{2},+\infty>$

(28) $x^5-2x^4-15x^3>0$ **Rpta.** $<-3,0>\cup<5,+\infty>$

(29) $(x^3-5x^2+7x-3)(2-x)\geq 0$ **Rpta.** $[2,3]$

(30) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)<0$, si $a<b<c<d$ **Rpta.** $<a,b>\cup<c,d>$

(31) $(x^2+6x-1)(x^3-2x^2-2x+4)(x+5)^5>0$

Rpta. $<-\infty,-3-\sqrt{10}>\cup<-5,-\sqrt{2}>\cup<-3+\sqrt{10},\sqrt{2}>\cup<2,+\infty>$

(32) $(6x+3)^2(x^2-1)^3(3x-5)^7<0$ **Rpta.** $<-\infty,-1>\cup<1,\frac{5}{3}>$

(33) $(3-x)^3(x^2-1)^2(1-x)^5x>0$ **Rpta.** $<-0,1>\cup<3,+\infty>$

(34) $x^4-2x^2-3x-2\geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-1]\cup[2,+\infty>$

(35) $x^4-3x^3+5x^2-27x-36<0$ **Rpta.** $<-1,4>$

(36) $x^4<x^2$ **Rpta.** $<-1,1>-\{0\}$

(37) $(2x^2-4x-1)(3x^2-6x+4)(x^2+4x-2)>0$

Rpta. $<-\infty,-2-\sqrt{6}>\cup<\frac{2-\sqrt{6}}{2},-2+\sqrt{6}>\cup<\frac{2+\sqrt{6}}{2},+\infty>$

(38) $x^5+8x^4+12x^3-x^2-8x-12>0$ **Rpta.** $<-6,-2>\cup<1,+\infty>$

(39) $(x^2-1)(x^2+9)(x+4)(x-5)>0$ **Rpta.** $<-\infty,-4>\cup<-1,1>\cup<5,+\infty>$

(40) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)>44$ **Rpta.** $\forall\ x\in R$

(41) $x^6+6x^4+9x^2+4>0$ **Rpta.** $\forall\ x\in R$

(42) $x^4-3x^2-6x-2<0$ **Rpta.** $<1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}>$

(43) $x^5-6x^4-17x^3+17x^2+6x-1>0$

Rpta. $<\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}>\cup<4-\sqrt{15},1>\cup<4+\sqrt{15},+\infty>$

(44) $x^4-2x^2+8x-3>0$ **Rpta.** $<-\infty,-1-\sqrt{2}>\cup<-1+\sqrt{2},+\infty>$

(45) $x^4-2x^3-5x^2+10x-3\le 0$ **Rpta.** $[\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}]$

(46) $(x-7)(x-3)(x+5)(x+1)\ge 1680$ **Rpta.** $<-\infty,-7]\cup[9,+\infty>$

(47) $(x+9)(x-3)(x-7)(x+5)\le 385$ **Rpta.** $[-1-\sqrt{71},-4]\cup[2,-1+\sqrt{71}]$

III. Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $\frac{x+1}{2-x}<\frac{x}{3+x}$ **Rpta.** $<-\infty,-3>\cup<2,+\infty>$

(2) $\frac{1}{3x-7}\ge\frac{4}{3-2x}$ **Rpta.** $<\frac{3}{2},2]\cup<\frac{7}{3},+\infty>$

(3) $\frac{x+2}{x-2}\ge\frac{x^2+2}{x^2}$ **Rpta.** $<2,+\infty>$

(4) $\frac{x-2}{x+4}\ge\frac{x}{x-2}$ **Rpta.** $<-\infty,-4>\cup[\frac{1}{2},2>$

(5) $\frac{x^3-4}{x^2+2}<\frac{x^3-2}{x^2+1}$ **Rpta.** $<-2,0>\cup<0,+\infty>$

(6) $\frac{x-1}{x}\le\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}$ **Rpta.** $<-\infty,-1>\cup<0,1>$

(7) $\frac{x^2+2}{x^4+1}>\frac{x^2+1}{x^4+1}$ **Rpta.** $\forall\ x\in R$

(8) $\frac{x^2-2x}{x-4}\le\frac{x+8}{2}$ **Rpta.** <-∞,4>

(9) $\frac{1}{x}\le\frac{3x+1}{x}<4$ **Rpta.** <-∞,0> ∪ <1,+∞>

(10) $\frac{x^2+8}{x+4}\ge\frac{5x-8}{5}$ **Rpta.** <-4,6]

(11) $\frac{x+4}{x^2+4x+4}>\frac{x-2}{x^2-4}$ **Rpta.** ∀ x ∈ R – {-2,2}

(12) $\frac{1}{x+1}<\frac{2}{3x-1}$ **Rpta.** $<-\infty,-1>\cup<\frac{1}{3},3>$

(13) $-\frac{1}{2}<\frac{2x^2-3x+3}{(x-2)(2x+3)}$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{3}{2}>\cup<0,\frac{7}{6}>\cup<2,+\infty>$

(14) $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}<4+\frac{x-7}{x-1}$ Rpta. $<-2,-\frac{5}{4}>\cup<-1,1>\cup<5,+\infty>$

(15) $\frac{x}{x^2+4}\le\frac{x-3}{x^2+x+4}$ **Rpta.** φ

(16) $\frac{(x^2-2)(x+5)(x-3)}{x(x^2+2)(x+3)}>0$ **Rpta.** $<-\infty,-5>\cup<-3,-\sqrt{2}>\cup<0,\sqrt{2}>\cup<3,+\infty>$

(17) $\frac{(6x+3)^2(x^2+1)^3(3x-5)^7}{(x+6)^2(2x+3)^{17}}>0$ **Rpta.** $<-\infty,-6>\cup<-6,-\frac{3}{2}>\cup<\frac{5}{3},+\infty>$

(18) $\frac{(4x+2)^2(x^2+2)^5(2x-8)^9}{(x+1)^2(2x+5)^{13}}<0$ **Rpta.** $<-\frac{5}{2},4>-\{-1,-\frac{1}{2}\}$

(19) $\frac{x+4}{x-5}<\frac{x-2}{x+3}$ **Rpta.** $<-\infty,-3>\cup<-\frac{1}{7},5>$

(20) $\frac{7}{x-4}+\frac{1}{x+2}<-2$ **Rpta.** <-3,-2> ∪ <1,4>

(21) $\frac{(x^2+x-6)(x^2-x-6)}{(x^2-4)(x^2-2)}>0$ **Rpta.** $<-\infty,-3>\cup<-\sqrt{2},\sqrt{2}>\cup<3,+\infty>$

(22) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$ **Rpta.** $<-\infty,1>\cup<\frac{3}{2},2>\cup<3,\infty>$

(23) $\frac{5}{x+3}+\frac{1}{x-1}>2$ **Rpta.** <-3,-1> ∪ <1,2>

(24) $2\geq\frac{3x+1}{x}>\frac{1}{x}$ **Rpta.** [-1,0>

(25) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$ **Rpta.** $<-\infty,1>\cup<\frac{3}{2},2>\cup<3,+\infty>$

(26) $\frac{2x^4+7x^3+8x^2+6x+1}{6x^5+17x^4+23x^3+18x^2+7x+1}>0$

Rpta. $<\frac{-5-\sqrt{17}}{2},-1>\cup<-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}>\cup<\frac{-5+\sqrt{17}}{2},+\infty>$

(27) $\frac{7}{x-1}-\frac{6}{x^2-1}<5$ **Rpta.** $<-\infty,-1>\cup<-\frac{3}{5},1>\cup<2,+\infty>$

(28) $\frac{12x^5-35x^4-53x^3+53x^2+35x-12}{x^6+15x^5+78x^4+155x^3+78x^2+15x+1}<0$

Rpta. $<-\infty,\frac{-5-\sqrt{21}}{2}>\cup<-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}>\cup<\frac{-5+\sqrt{21}}{2},2-\sqrt{3}>\cup<1,2+\sqrt{3}>$

(29) $\frac{2x-1}{x+4}+\frac{x+2}{3-x}>\frac{x-1}{x+3}$ **Rpta.** <-∞,-4> ∪ <-3,3>

(30) $\frac{1+x^3}{(1-x^2)(1-x)}>\frac{x-x^2+x^4-x^5}{(1-x)^2(1+x)}+9$

Rpta. $<-\infty,-1-\sqrt{3}>\cup<-1+\sqrt{3},1>\cup<1,2>\cup<2,+\infty>$

(31) $\frac{4x^4-20x^2+8}{x^4-5x^2+4}<8$ **Rpta.** $<-\sqrt{6},-2>\cup<-1,1>\cup<2,\sqrt{6}>$

(32) $\frac{(x-1)^2(x^2-1)(x^4-1)}{(x^4+1)(x-2)}\geq 0$ **Rpta.** $<2,+\infty>$

(33) $\frac{(x^2+5x+6)(x^4-16)(x^2-4x-12)}{(1-3x)^3(x-1)(x^2+1)}<0$

Rpta. $<-\infty,-3>\cup<-2,\frac{1}{3}>\cup<1,2>\cup<6,+\infty>$

(34) $\frac{4}{4-x}-\frac{x-2}{5}<\frac{4}{x}$ **Rpta.** $<0,2>\cup<4,+\infty>$

(35) $\frac{3x^2+7x+5}{x^2+3x+2}\leq 2$ **Rpta.** $<-2,-1>$

(36) $\frac{(x^2+x-6)(x^2-x-6)}{(x^2-4)(x^2-16)}\leq 0$ **Rpta.** $<-4,-3]\cup[3,4>$

(37) $\frac{(1+x+x^2)(2-x-x^2)(x^4-2x^2-3x-2)}{(2x^2-4x-1)(3x^2-6x+4)(x^2+4x-2)(x^2-7)}\leq 0$

Rpta. $<-\infty,-\sqrt{7}>\cup<-1-\frac{\sqrt{6}}{2},-2]\cup[-1,-\sqrt{6}+2>\cup<\frac{\sqrt{6}}{2}-1,1>\cup[2,\sqrt{7}>\cup<\sqrt{6}+2,+\infty>$

(38) $\frac{x}{x+1}<\frac{12}{19}<\frac{x+1}{x+2}$ **Rpta.** $<\frac{5}{7},\frac{12}{7}>$

(39) $\frac{(x-3)(x+2)^2(x+1)(x-4)}{x(x+2)(x^2-3)(x+3)(x^2+4)}>0$

Rpta. $<-\infty,-3]\cup<-2,-\sqrt{3}>\cup[-1,0>\cup<\sqrt{3},3]\cup[4,+\infty>$

(40) $\frac{2x^2-3x+3}{(x-2)(2x+1)}\geq-\frac{1}{2}$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{1}{2}>\cup<2,+\infty>$

(41) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}\geq\frac{x+5}{1-x^2}$ **Rpta.** $<1,+\infty>$

(42) $\frac{x}{x^2-5x+6}-\frac{2}{2-x}\geq\frac{2x}{(3-x)(1-x)}$ **Rpta.** $<-\infty,-6]\cup<2,3>$

(43) $\frac{3}{x}\leq\frac{13}{4(x-1)}+\frac{1}{4x+12}$ **Rpta.** $[-\frac{31+\sqrt{889}}{2},-3>\cup[\frac{\sqrt{889}-31}{2},0>\cup<1,+\infty>$

(44) $\frac{(x^2+4x+4)(x-9)^2}{(11-x)(x^2+5)}\leq 0$ **Rpta.** $<11,+\infty>\cup\{-2,9\}$

(45) $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{3}{x}$ **Rpta.** $<-1,0>\cup<1,+\infty>$

(46) $\frac{x-1}{x+2}<1$ **Rpta.** $<-2,+\infty>$

(47) $\frac{(x^2-5)(x^2+7)}{(x^2+x+1)(x^2-3x+2)}\geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-\sqrt{5}]\cup<1,2>\cup[\sqrt{5},+\infty>$

(48) $\frac{3x}{x^2-x-6}>1$ **Rpta.** $<-2,2-\sqrt{10}>\cup<3,2+\sqrt{10}>$

(49) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}<2$ **Rpta.** $<-\infty,3>\cup<4,+\infty>-\{1\}$

(50) $\frac{2x-25}{2(x^2+2x-3)}+\frac{2x+11}{2(x^2-1)}>\frac{1}{x+3}$ **Rpta.** $<-3,-1>\cup<1,+\infty>$

(51) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x-5}\geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-1>\cup<5,+\infty>$

(52) $\frac{2x-x^2-1}{x^2-x^4}<0$ **Rpta.** $<-1,0>\cup<0,1>$

(53) $\frac{(2x^2-8x+8)(x+3)}{x+6}\geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-6>\cup[-3,+\infty>$

(54) $\frac{x^2-2x+1}{x-1}\geq 0$ **Rpta.** <1,+∞>

(55) $\frac{2x+1}{x+1}\geq 3$ **Rpta.** [-2,-1>

(56) $\frac{x^2+4x+9}{x^2-4x-5}\leq 0$ **Rpta.** <-1,5>

(57) $\frac{x^2+x+2}{x(x^2-x-2)}<0$ **Rpta.** <-∞,-1> ∪ <0,2>

(58) $\frac{2}{3x-2}<\frac{3}{x+2}$ **Rpta.** $<-2,\frac{2}{3}>\cup<\frac{10}{7},+\infty>$

(59) $\frac{32}{x^2-4}\geq\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x+2}$ **Rpta.** [-4,-2> ∪ <2,6]

(60) $\frac{2+x-x^2}{x^2-2x+1}\geq 0$ **Rpta.** [-1,1> ∪ <1,2]

(61) $\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^2+5x-14}\leq 0$ **Rpta.** <-∞,-7> ∪ [-3,2>

(62) $\frac{x^2+8x-12-x^3}{7x-x^2-6}\geq 0$ **Rpta.** [-3,1> ∪ <6,+∞> U {2}

(63) $\frac{x^2+3x+2}{x-2}<\frac{x-2}{x+2}$ **Rpta.** <-∞,-2> ∪ <0,2>

(64) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}$ **Rpta.** <-3,-2> ∪ <-1,1>

(65) $\frac{x+1}{1-x}-2<\frac{1-x}{x}$ **Rpta.** $<-\infty,-1>\cup<0,\frac{1}{2}>\cup<1,+\infty>$

(66) $\frac{x^2+8x+24}{x+2}\geq 8$ **Rpta.** <-2,+∞>

(67) $\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}$ **Rpta.** $<-\infty,-2> \cup <\frac{1}{4},1] \cup [4,+\infty>$

(68) $\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{7}{x+2} < 0$ **Rpta.** $<-2,-\frac{5}{4}> \cup <-1,1> \cup <5,+\infty>$

(69) $\frac{x^4-3x^3-6x^2-28x-24}{40+(x-1)(x-3)(x+4)(x+6)} < 0$

(70) $\frac{3x}{x^2-x-6} > 1$

(71) $\frac{7}{x-4} + \frac{30}{x+2} \leq \frac{7}{x+1}$

(72) $\frac{1}{x-2} + \frac{7}{x+4} < 2$

(73) $\frac{3x^2+7x-6}{x^2-x-6} > \frac{3x^2+16x-12}{x^2-4x-12}$

(74) $2 - \frac{x-2}{x-1} > \frac{x-3}{x-2}$

(75) $\frac{2x}{2x^2+7x+5} > \frac{x}{x^2+6x+5}$

(76) $\frac{x^2+10x+16}{x-1} > 10$

(77) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 0$

(78) $\frac{x^2}{x-2} + 4 > x+10$

(79) $\frac{3x^2-4}{x-6} \leq x+6$

(80) $1 + \frac{1-8x}{x^2+4x+3} \leq 0$

IV. Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $(0.5)^{\frac{4x-3}{2}} > (0.0625)^{\frac{3x-2}{5}}$ **Rpta.** $<\frac{1}{4},+\infty>$

(2) $27^{x-1} < 9^{x+3}$ **Rpta.** $<-\infty,9>$

(3) $(0.2)^{\frac{2x+1}{2}} < (0.0016)^{\frac{2x-2}{5}}$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{7}{2}>$

(4) $2^{5x+8} < 16^{x+5}$ **Rpta.** $<-\infty,12>$

(5) $\frac{3^{2x-3}.3^{4-x}}{3^{5x-1}} > (3^{2x+1})^{(x-2)}$ **Rpta.** $<\frac{-1-\sqrt{33}}{4},\frac{-1+\sqrt{33}}{4}>$

(6) $[(0.5)^{x^2}(0.5)^6]^{x^2-3} < \frac{6.125}{8^{x^4}}$ **Rpta.** $\forall$ x $\in$ R

(7) $9^{(x-1)^2} > \frac{9^{3-x}}{9^{x+3}.3}$ **Rpta.** $\forall$ x $\in$ R

(8) $\sqrt[x+1]{8^{x+3}} < \sqrt[x-1]{32^{2x+5}}$ **Rpta.** <-∞,-1> ∪ <1,+∞>

(9) $\sqrt{27^{x+1}} \le \sqrt[3]{9^{x-3}}$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{21}{5}]$

(10) $\sqrt{81^{x+15}} < \sqrt{243^{x-10}}$ **Rpta.** <110,+∞>

(11) $(256)^{\frac{3(x-2)^2}{2}} > 2^{9(x^2-9)^2}.8^{3x+1}.256^{5(x^2-16)}$ **Rpta.** $<-\frac{\sqrt{2293}+33}{86},\frac{\sqrt{2293}-33}{86}>$

(12) $\frac{729^{x^2}.243^x}{81^{2x}} > \frac{243^6.27^{5x-6}}{27^{4x}}$ **Rpta.** <-∞,-1> ∪ <2,+∞>

(13) $3^{x^3}.3^{2x} > 27$ **Rpta.** <1,+∞>

(14) $2^{\frac{x-5}{2}} > 8^{\frac{x-9}{3}}$ **Rpta.** <-∞,13>

(15) $(0.216)^{\frac{5x+3}{4}} > \sqrt[5]{(0.36)^{\frac{2x+1}{6}}}$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{131}{217}>$

(16) $(4^2)^{\frac{5}{x^2-1}} > (64)^{\frac{1}{x-1}}$ **Rpta.** $<-\infty,-1>\cup<1,\frac{7}{3}>$

(17) $[(0.3)^{(x-1)(x-2)}]^{x-3} > [(0.09)^{x^2-4}]^{x^2-9}$ **Rpta.** $\forall$ x $\in$ R

(18) $\sqrt[3]{(0.00032)^{5x-2}} < \sqrt{(0.2)^{\frac{2x+1}{2}}}$ **Rpta.** $<\frac{43}{94},+\infty>$

(19) $\sqrt[x+3]{(\frac{1}{25})^{x-3}} \le \sqrt[x+2]{(0.2)^{2x-2}}$ **Rpta.** <-∞,-3> ∪ <-2,-1]

(20) $\left(\sqrt[\sqrt{x+1}]{(0.16)^{\sqrt{x-1}}}\,.\sqrt[\sqrt{x+1}]{(0.0256)^{\sqrt{x+6}}}\right)^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}} < \sqrt[\sqrt{x+1}]{0.004096}$

(21) $\sqrt[x-2]{(0.008)^{x-1}} \geq \sqrt[x-1]{(0.04)^{x+3}}$ **Rpta.** $<1,2> \cup [3,5]$

(22) $\sqrt[x+3]{(0.04)^{2x-1}} \geq \sqrt[x]{(0.2)^{2x-1}}$ **Rpta.** $<-3,0> \cup [\frac{1}{2},3]$

(23) $\sqrt[x+2]{(0.0016)^{x+3}} > \sqrt[x-5]{(0.2)^{4x+1}}$ **Rpta.** $<-\frac{62}{171},-2> \cup <5,+\infty>$

(24) $\sqrt[x-5]{4^{x-4}} \geq \sqrt[x+1]{2^{2x}}$ **Rpta.** $<-1,2] \cup <5,+\infty>$

(25) $\sqrt[x+1]{(0.01)^{x-2}} \leq \sqrt[x+3]{(0.1)^{2x-3}}$ **Rpta.** $<-3,-1> \cup [3,+\infty>$

(26) $\sqrt[x+3]{(0.04)^{2x-1}} > \sqrt[x]{(0.2)^{2x-1}}$ **Rpta.** $<-3,0> \cup <\frac{1}{2},3>$

(27) $(\frac{2}{250})^{x}(\frac{1}{5})^{4x^2+1} \leq (\frac{1}{5})^{x+2}(\frac{1}{625})^{x^2-3x}$ **Rpta.** $<-\infty,-2] \cup [-\frac{1}{2},+\infty>$

(28) $\sqrt[x-3]{3^{x}(\frac{1}{3})^{-2}} \leq \sqrt[x+2]{9(\frac{1}{9})^{x}}$ **Rpta.** $<-3,3>$

(29) $\sqrt[x+3]{(\frac{1}{25})^{x-3}} \leq \sqrt[x+2]{(\frac{1}{5})^{2x-2}}$ **Rpta.** $<-\infty,-3> \cup <-2,-1]$

(30) $\frac{(2^{2x-3})(2^{4-x})}{2^{5x-1}} < \sqrt[x+1]{2^{2x+3}}$ **Rpta.** $<-1,+\infty> - \{-\frac{1}{2}\}$

(31) $15^{x-1} \leq \sqrt[x]{(0.2)^{x+1}}$

(32) $(0.1)^{x-3} \leq 10^{x+3}$

(33) $\sqrt[2x-1]{(0.00032)^{x+2}} < \sqrt[x-3]{(\frac{1}{5})^{3x-1}}$

(34) $[(0.5)^{x^2}.(0.5)^{6}]^{(x^2-3)} > \frac{(0.125)^{3}}{8^{x^2}}$

(35) $\sqrt{(0.5)^{4x-3}} > \sqrt[5]{(0.625)^{3x-2}}$

V. Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-4}}+\sqrt{x^2-2x-4}>2$ **Rpta.** $<-\infty,1-\sqrt{5}>\cup<1+\sqrt{5},\infty>-\{1\pm\sqrt{6}\}$

2. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}<5$ **Rpta.** [0,4>

3. $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}<\sqrt{2}$ **Rpta.** $[\frac{1}{2},1>$

4. $\sqrt{x}-9\sqrt[4]{x}+118\geq 0$ **Rpta.** [0,+∞>

5. $x+2<\sqrt[3]{x^3+8}$ **Rpta.** <-2,0>

6. $\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}\geq 1$ **Rpta.** $[4,\dfrac{\sqrt{7}+12}{2}]$

7. $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x+1}$ **Rpta.** [1,2>

8. $\sqrt{2x-9}\leq 3-x$ **Rpta.** φ

9. $\dfrac{\sqrt{9x-x^2-8(x^2-8x+12)}}{\sqrt{x}}\leq 0$ **Rpta.** [2,6] U {1,8}

10. $\dfrac{(x-4)\sqrt{x^2-2x+2}}{x^2+2}\leq 0$ **Rpta.** <-∞,4]

11. $\sqrt{x^2-2x-15}\geq x+1$ **Rpta.** <-∞,-3]

12. $\sqrt{3x-6}>-\sqrt{4x-12}$ **Rpta.** [3,+∞>

13. $\sqrt{5x-3}-\sqrt{x-1}>0$ **Rpta.** [1,+∞>

14. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-4}-\sqrt{x}}{x-1}\geq 0$ **Rpta.** [64,+∞>

15. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{x}}{8-x}}\geq\sqrt[3]{x-10}$ **Rpta.** [7,8> ∪ {0}

(16) $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}<\sqrt{x+1}$ **Rpta.** <3,+∞>

(17) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}>\sqrt{x+1}$ **Rpta.** $<\frac{11}{3},5]$

(18) $\frac{\sqrt{\sqrt{x}-3}+\sqrt{6-\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\le 1$ **Rpta.** $[9, \frac{84+16\sqrt{5}}{5}]$

(19) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}\ge 0$ **Rpta.** $[-2,\frac{\sqrt{13}-5}{2}]$

(20) $\sqrt{x^2-14x+13}\ge x-3$ **Rpta.** <-∞,3]

(21) $\frac{\sqrt{x^2+3x+4}}{\sqrt{21}+\sqrt{x^2-4}}\ge 0$ **Rpta.** <-∞,-2] ∪ [2,+∞>

(22) $\sqrt{-x+2}\le\sqrt{-4x+2}+\sqrt{-9x+6}$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{1}{2}]$

(23) $\frac{\sqrt[4]{625-x^2}\sqrt[3]{x^2-4}(x+4)^8(x^2-1)^2}{x^3-2x^2-x+2}\le 0$ **Rpta.** [-25,-2] ∪ <-1,1> ∪ {25}

(24) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}>\sqrt{x}+1$ **Rpta.** <1,2>

(25) $\sqrt{\frac{x+6}{x}}<\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ **Rpta.** <-∞,-6] ∪ <1,2>

(26) $\sqrt{x^2-14x-13}<x+1$ **Rpta.** $<\frac{3}{4},1]\cup[13,+\infty>$

(27) $\frac{\sqrt{x^2-4}.\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[5]{x^2-4x+3}}<0$ **Rpta.** <-∞,-4] ∪ <2,3>

(28) $\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+2}{2-\sqrt{x+4}}}\le x-4$ **Rpta.** ϕ

(29) $\frac{1}{x-2} < \frac{x}{x+4} < \frac{x-2}{x+1}$ **Rpta.** $<8,+\infty>$

(30) $\frac{|x^2-9|-2x}{|x+5|+5} < 0$ **Rpta.** $<\sqrt{10}-1,\ 1+\sqrt{10}>$

(31) $\frac{4}{x-4} < \frac{x+4}{x-4} < 2$ **Rpta.** $<18,+\infty>$

(32) $3^{x+4}(3^{x-4}-1) < 3^x - 81$ **Rpta.** $<0,4>$

(33) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{21}-\sqrt{x^2-4}}} \geq 0$ **Rpta.** $<-5,-2] \cup [4,5>$

(34) $\sqrt{\frac{x^2-3x-4}{5-\sqrt{16-x^2}}} \geq x^2-2x-29$ **Rpta.** $[-4,-1] \cup \{4\}$

(35) $\sqrt{\frac{32-2x}{x+2}} \geq \sqrt{x}$ **Rpta.** $[0,4]$

(36) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-x-2}-2}{2-\sqrt{x-4}}} \geq x-5$ **Rpta.** $[-4,-2] \cup [2,3]$

(37) $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2-7x+10} \leq 0$ **Rpta.** $x = 5$

(38) $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2-7x+10} > 0$ **Rpta.** $<-\infty,1] \cup <5,+\infty>$

(39) $\sqrt{4-\sqrt{x+13}} \leq \sqrt{x+5}$ **Rpta.** $[-5,3]$

(40) $\frac{\sqrt[3]{x^2-2x-15}(x^3-6x^2+9x)}{(x-1)^4(x-2)^5} \leq 0$ **Rpta.** $[-3,0] \cup <2,5]$

(41) $\sqrt{\frac{x+4}{x-2}} \geq \sqrt{x}$ **Rpta.** $<2,4]$

(42) $\sqrt{3-3x} \le \sqrt{21+4x-x^2}$ **Rpta.** [-2,1]

(43) $\sqrt{x^2-x-12}(x-5)(2x^2-3x-2) \le 0$ **Rpta.** <-∞,-3] ∪ [4,5]

(44) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x} > 0$ **Rpta.** $<-15,\frac{-\sqrt{13}+5}{2}> \cup <\frac{\sqrt{13}-5}{2},1]$

(45) $\dfrac{x^2-16}{\sqrt{|x-4|-|x-1|}} > 0$ **Rpta.** <-∞,-4>

(46) $\sqrt{x^2-3x+2} > 2-x$ **Rpta.** <2,+∞>

(47) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{x}}{8-x}} \ge \sqrt[3]{x-10}$ **Rpta.** [7,8> ∪ {0}

(48) $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$ **Rpta.** [-6,3]

(49) $\sqrt{\dfrac{3x-9}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{5-x}{x+1}} > 0$ **Rpta.** <-2,1> ∪ [3,5]

(50) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{3x}}{9-x}} \ge x-10$ **Rpta.** [8,9> ∪ {0}

(51) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-4x-5}}{4-\sqrt{x^2-9}}} \ge x-6$ **Rpta.** [-5,-3] ∪ {5}

(52) $\sqrt{x^2-x-12}(x-5)(2x^2-3x-2) \le 0$ **Rpta.** <-∞,-3] ∪ [4,5]

(53) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}+3}{\sqrt{9-x^2}-1}} > x-4$ **Rpta.** $<-2\sqrt{2},-2] \cup [1,2\sqrt{2}>$

(54) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}-2}{2-\sqrt{x-2}}} \ge x-6$ **Rpta.** [-2,0] ∪ [4,5]

(55) $\sqrt{\frac{2x-8}{x-1}}+\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}\geq 0$ **Rpta.** <-3,1> ∪ [4,5]

(56) $\sqrt{x^2-x+1}<\sqrt{4-x}$ **Rpta.** $<-\sqrt{3},\sqrt{3}>$

(57) $\frac{\sqrt{x^2+1}(x^2-4x+1)}{4x+4}>0$ **Rpta.** $<-1,2-\sqrt{3}>\cup<2+\sqrt{3},\infty>$

(59) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-6}\geq\sqrt{6-x}$

(60) $\sqrt{x^2-2x-15}>x+1$

(61) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}>\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$

(62) $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+4x}>2$

(63) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x+5}\leq\sqrt{3x}$

(64) $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{a-x^2}-\sqrt{x}}\geq 0$, $a>0$

(65) $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10|x|-16-x^2}}{3-\sqrt{x-2}}}+\frac{x-9}{x-8}\geq 0$

3.35. VALOR ABSOLUTO.-

a) **DEFINICIÓN.-** Al valor absoluto del número real x denotaremos por | x |, y se define por la regla.

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$$

Ejemplo.- | 7 | = 7, | -7 | = -(-7) = 7

b) **PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO.-**

(1) $|a|\geq 0,\ \forall a\in R$

(2) $|a|\geq a\ \forall a\in R$

(3) $|a|=|-a|$

(4) $|ab|=|a||b|$

(5) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $b\neq 0$

(6) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (desigualdad triangular)

Demostraremos la 6° propiedad, las demás dejamos para el lector.

$$|a+b|^2 = |(a+b)^2| = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ entonces $\therefore$ $|a+b| \leq |a| + |b|$

3.36. PROPIEDADES BÁSICAS PARA RESOLVER ECUACIONES E INECUACIONES DONDE INTERVIENE VALOR ABSOLUTO.

① $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

② $|a| = b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$

③ $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

④ **Sí $b > 0$, entonces:**

i) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ **ii)** $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

⑤ **Si $a, b \in R$ se verifica**

i) $|a| > b \Leftrightarrow a > b \vee a < -b$ **ii)** $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$

⑥ **i)** $|a| = \sqrt{a^2}$ **ii)** $|a|^2 = a^2$

La demostración de estas propiedades dejamos para el lector.

Ejemplo.- **Resolver la ecuación $|4x + 3| = 7$**

<u>Solución</u>

$|4x + 3| = 7 \Leftrightarrow 4x + 3 = 7 \vee 4x + 3 = -7$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{5}{2}$$

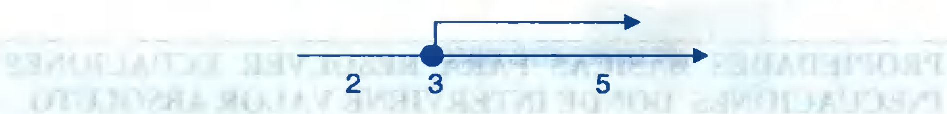
Luego para $x = 1$, $x = -\frac{5}{2}$ son soluciones para la ecuación dada.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|2x+2| = 6x-18$

Solución

$$|2x+2| = 6x-18 \iff [6x-18 \geq 0 \ \land \ (2x+2 = 6x-18 \ \lor \ 2x+2 = -6x+18)]$$

$$\iff [x \geq 3 \ \land \ (x = 5 \ \lor \ x = 2)]$$



Luego la solución de la ecuación es $x = 5$.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|x-2| = |3-2x|$

Solución

$$|x-2| = |3-2x| \iff x-2 = 3-2x \ \lor \ x-2 = -3+2x$$

$$\iff x = \frac{5}{3} \ \lor \ x = 1, \quad \text{la solución es: } \{1, \frac{5}{3}\}$$

Ejemplo.- Hallar el valor de la expresión: $\dfrac{|4x+1|-|x-1|}{x}$, sí $x \in \langle 0,1 \rangle$

Solución

$$|4x+1| = \begin{cases} 4x+1 \ , & x \geq -\frac{1}{4} \\ -4x-1 \ , & x < -\frac{1}{4} \end{cases} \quad , \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 \ , & x \geq 1 \\ 1-x \ , & x < 1 \end{cases}$$

si $x \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow |4x+1| = 4x+1$, $|x-1| = 1-x$

Luego: $$\frac{|4x+1|-|x-1|}{x} = \frac{4x+1-(1-x)}{x} = \frac{5x}{x} = 5$$

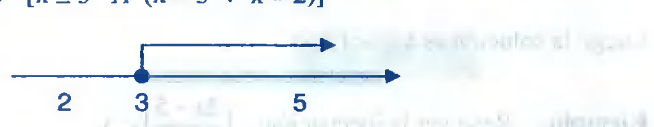
$$\therefore \quad \frac{|4x+1|-|x-1|}{x} = 5, \text{ para } x \in \langle 0,1 \rangle$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|2x+2| = 6x - 18$

Solución

$$|2x+2| = 6x - 18 \Leftrightarrow [6x - 18 \geq 0 \ \wedge \ (2x+2 = 6x - 18 \ \vee \ 2x+2 = -6x+18)]$$

$$\Leftrightarrow [x \geq 3 \ \wedge \ (x = 5 \ \vee \ x = 2)]$$



Luego la solución de la ecuación es $x = 5$.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|x-2| = |3-2x|$

Solución

$$|x-2| = |3-2x| \Leftrightarrow x - 2 = 3 - 2x \ \vee \ x - 2 = -3 + 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{3} \ \vee \ x = 1, \quad \text{la solución es: } \{1, \frac{5}{3}\}$$

Ejemplo.- Hallar el valor de la expresión: $\frac{|4x+1|-|x-1|}{x}$, sí $x \in \langle 0,1 \rangle$

Solución

$$|4x+1| = \begin{cases} 4x+1 \ , & x \geq -\frac{1}{4} \\ -4x-1 \ , & x < -\frac{1}{4} \end{cases} \quad , \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 \ , & x \geq 1 \\ 1-x \ , & x < 1 \end{cases}$$

si $x \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow |4x+1| = 4x+1$, $|x-1| = 1-x$

Luego: $\frac{|4x+1|-|x-1|}{x} = \frac{4x+1-(1-x)}{x} = \frac{5x}{x} = 5$

$\therefore \quad \frac{|4x+1|-|x-1|}{x} = 5$, para $x \in \langle 0,1 \rangle$

Ejemplo.- Resolver la inecuación $|2x - 5| < 3$

Solución

$|2x - 5| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 5 < 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 8$

$\Leftrightarrow 1 < x < 4 \Leftrightarrow x \in <1,4>$

Luego la solución es $x \in <1,4>$

Ejemplo.- Resolver la inecuación: $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right| < 3$

Solución

$$\left|\frac{2x-5}{x-6}\right| < 3 \Leftrightarrow -3 < \frac{2x-5}{x-6} < 3 \Leftrightarrow -3 < \frac{2x-5}{x-6} \wedge \frac{2x-5}{x-6} < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-23}{x-6} > 0 \wedge \frac{x-13}{x-6} > 0$$

$$\Leftrightarrow (5x-23)(x-6) > 0 \wedge (x-13)(x-6) > 9, \quad x \neq 6$$

\+ 23/5 - 6 + $\wedge$ + 6 - 13 +

$$x \in <-\infty, \frac{23}{5}> \cup <6, +\infty> \quad \wedge \quad <-\infty, 6> \cup <13, +\infty>$$

23/5 6 13

La solución es: $x \in <-\infty, \frac{23}{5}> \cup <13, +\infty>$

3.37. MÁXIMO ENTERO.-

Si x es un número real, el máximo entero de x representaremos por $[|x|]$ y es el mayor de todo los entero menores o iguales a x, es decir:

$$[\![x]\!] = \text{máx}\ \{n \in Z \,/\, x \geq n\}$$

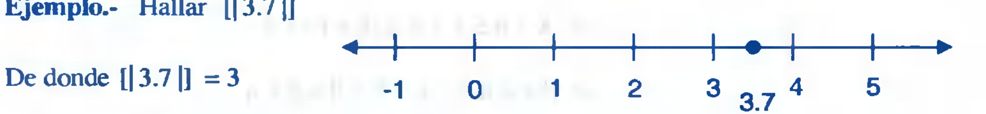
Para calcular el máximo entero de un número real x, se observa todos los enteros que se encuentran a la izquierda de x (o que coinciden con x, en caso que x sea entero) y el mayor de todos ellos es el máximo entero $[\![x]\!]$, por ejemplo:



De donde $[\![x]\!] = 2$

Ejemplo.- Hallar $[\![3.7]\!]$

De donde $[\![3.7]\!] = 3$



Si x se encuentra entre dos enteros consecutivos de la forma:



Entonces: $$[\![x]\!] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1,\ n \in Z$$

Ejemplo.- Sí $[\![x]\!] = 5 \Leftrightarrow 5 \leq x < 6$

$[\![x]\!] = -5 \Leftrightarrow -5 \leq x < -4$

NOTA.- Como se podrá observar siempre se toma él número entero más próximo a la izquierda.

OBSERVACIÓN.- Por definición de máximo entero se tiene:

$$[\![x]\!] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1,\ n \in Z$$

$$\Leftrightarrow x \in [n, n+1\rangle,\ n \in Z$$

$$\therefore\ [\![x]\!] = n \Leftrightarrow x \in [n, n+1\rangle,\ n \in Z$$

Ejemplo.- $[\![x]\!] = -4 \Leftrightarrow -4 \leq x < -3 \Rightarrow x \in [-4.-3\rangle$

Ejemplo.- $[\![x]\!] = 2.15$, es absurdo, puesto que todo máximo entero es un número entero.

3.38. PROPIEDADES DEL MÁXIMO ENTERO.-

① $[\![x]\!] \in Z$, por definición

② $[\![x]\!] = x \Leftrightarrow x \in Z$

③ $\forall x \in R$, $[\![x]\!] \le x$, por definición

④ $[\![x]\!] \le x < [\![x]\!] + 1$, $\forall x \in R$

⑤ $0 \le x - [\![x]\!] < 1$, $\forall x \in R$

⑥ $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!]$, $\forall x \in R$

⑦ $[\![x + n]\!] = [\![x]\!] + n$, $n \in Z$

En efecto: Sea $[\![x]\!] = k$, $k \in Z$, entonces $k \le x < k + 1$

$$\Rightarrow k + n \le x + n < (k + n) + 1$$

$$\Rightarrow [\![x + n]\!] = k + n = [\![x]\!] + n$$

⑧ $[\![x]\!] \le n \Leftrightarrow x < n + 1$, $n \in Z$

⑨ $[\![x]\!] < n \Leftrightarrow x < n$, $n \in Z$

⑩ $[\![x]\!] \ge n \Leftrightarrow x \ge n$, $n \in Z$, $x \in R$

⑪ $[\![x]\!] > n \Leftrightarrow x \ge n + 1$

⑫ $\forall x, y \in R$, sí $x \le y \Leftrightarrow [\![x]\!] \le [\![y]\!]$

⑬ $[\![x + y]\!] \ge [\![x]\!] + [\![y]\!]$

En efecto: Sean $\begin{cases} [\![x]\!] = m \\ [\![y]\!] = n \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m \le x < m+1 \\ n \le y < n+1 \end{matrix}$

$$m + n \le x + y < (m + n) + 2$$

entonces $[\![x + y]\!] = m + n$ o $m + n + 1$

por lo tanto $[\![x + y]\!] \ge m + n$ $\therefore$ $[\![x + y]\!] \ge [\![x]\!] + [\![y]\!]$

⑭ Sí $n \in Z^+$ $\Rightarrow [\![nx]\!] \ge n [\![x]\!]$

En efecto: Sea $[\![x]\!] = m \Rightarrow m \le x < m + 1$

$$\Rightarrow nm \le nx < mn + n$$

$\Rightarrow [\![nx]\!] \ge nm$ $\therefore$ $[\![nx]\!] \ge n [\![x]\!]$

(15) Si $x \in R$ y $n \in Z^+$, entonces $[\![\frac{[\![x]\!]}{n}]\!] = [\![\frac{x}{n}]\!]$

(16) Si a y b $\in$ Z, $x \in R$, entonces se cumple:

i) $a \leq [\![x]\!] \leq b \Rightarrow a \leq x < b + 1$

ii) $a \leq [\![x]\!] < b \Rightarrow a \leq x < b$

iii) $a < [\![x]\!] < b \Rightarrow a + 1 \leq x < b$

Ejemplo.-

(1) Resolver la ecuación $[\![3x + 1]\!] = 2$

Solución

$[\![3x + 1]\!] = 2 \Rightarrow 2 \leq 3x + 1 < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ entonces $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}>$

(2) Resolver la inecuación $[\![5x]\!] < 3$

Solución

$[\![5x]\!] < 3 \Rightarrow 5x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{5}$ $\therefore x \in <-\infty, \frac{3}{5}>$

(3) $[\![2x]\!] < x$

Solución

Sí $x < 0 \Rightarrow 2x < x \Rightarrow [\![2x]\!] \leq 2x < x$

Es decir $[\![2x]\!] < x$ $\therefore S_1 = <-\infty, 0>$

Sí $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2x < 1 \Rightarrow [\![2x]\!] = 0 < x$

Es decir $[\![2x]\!] < x$ $\therefore S_2 = <0, \frac{1}{2}>$

Si $x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow [\![2x]\!] \geq 1$ es decir: $[\![2x]\!] \neq x$ $\therefore S_3 = \phi$

$\therefore S = <-\infty, 0> \cup <0, \frac{1}{2}>$

(4) $[\![2x]\!] < [\![4x]\!]$

Solución

Sea $[\![4x]\!] = P \Leftrightarrow P \le 4x < P+1 \Rightarrow \frac{P}{2} \le 2x < \frac{P}{2} + \frac{1}{2} < \frac{P}{2} + 1$

$$\Rightarrow [\![2x]\!] = \frac{P}{2} \ \wedge \ \frac{P}{2} \in Z$$

$[\![2x]\!] < [\![4x]\!] \Rightarrow \frac{P}{2} < P \Rightarrow 0 < \frac{P}{2} \Rightarrow 0 < P \Rightarrow 0 < [\![4x]\!] \Rightarrow 4x \ge 1$

$\therefore \ x \ge \frac{1}{4} \Rightarrow Cs = [\frac{1}{4}, +\infty >$

(5) $[\![-5x]\!] < [\![x]\!]$

Solución

Sí $0 < x < \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 5x < 1 \\ [\![x]\!] = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < -5x < 0 \Rightarrow [\![-5x]\!] = -1$ y $-1 < 0$

$\therefore \ S_1 = < 0, \frac{1}{5} >$

Sí $x \ge \frac{1}{5} \Rightarrow -5x < x \Rightarrow [\![-5x]\!] < [\![x]\!]$ $\qquad \therefore \ S_2 = [\frac{1}{5}, +\infty >$

$\therefore \ S = <0, +\infty>$

(6) $[\![x-1]\!] < [\![x]\!]$

Solución

Sí $x \ge 1$; supongamos que: $[\![x]\!] = k$

$\Rightarrow [\![x-1]\!] = k-1 < k = [\![x]\!]$ de donde $S_1 = [1, +\infty >$

Sí $x < 1$, entonces $[\![x-1]\!] < 0 \ \wedge \ [\![x]\!] \le 0$

entonces $[\![x-1]\!] \le [\![x]\!] \quad \therefore \ S_2 = < -\infty, 1 >$ $\qquad \therefore \ S = R$

(7) $([\![x]\!] - 2)(x-2)(x+1) > 0$

Solución

a) Si $x < 2 \Rightarrow [|x|] - 2 < 0$, luego resolveremos

$-(x-2)(x+1) > 0$ es decir $(x-2)(x+1) < 0$ de donde $S_1 = <-1,2>$

b) Sí $2 \le x < 3$, entonces $[|x|] - 2 = 0$ de donde $S_2 = \phi$

c) Si $x \ge 3 \Rightarrow [|x|] - 2 > 0$ luego resolveremos $(x-2)(x+1) > 0$

$S_3 = [3.+\infty > \cap (<-\infty,-1> \cup [2,+\infty>)$ $\therefore$ $S_3 = [3,+\infty>$

$\therefore$ $S = <-1,2> \cup [3,+\infty>$

(8) $(x^3-1)(x^2+1)\sqrt{[|x|]-x} \ge 0$

Solución

$[|x|] - x \ge 0$, entonces $[|x|] \ge x$, pero por definición se tiene: $[|x|] \le x$,

$\forall x \in R \Rightarrow [|x|] = x \in Z$

Luego resolveremos $(x^3-1)(x^2+1) \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$ $\therefore$ $S = Z^+$

(9) $([|x - 2[|x|]|])(x-1)(x+1) \ge 0$

Solución

$[|x - 2[|x|]|] = [|x|] - 2[|x|] = -[|x|]$

i) Si $x < 0$, $\Rightarrow -[|x|] > 0$, entonces resolveremos

$(x-1)(x+1) \ge 0$ $\therefore$ $S_1 = <-\infty,-1]$

ii) Si $0 \le x < 1 \Rightarrow [|x|] = 0$ entonces $S_2 = [0,1>$

iii) Si $x \ge 1 \Rightarrow [|x|] > 0$, entonces resolveremos $(x-1)(x+1) \le 0$ $S_3 = \{1\}$

$\therefore$ $S = <-\infty,-1] \cup [0,1]$

(10) $[|\frac{x+2}{x+3}|] = 2$

Solución

Se conoce que $[| x |] + n \iff n \le x < n + 1$

$$\left[\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\right] = 2 \iff 2 \le \frac{x+2}{x+3} < 3 \iff 2 \le 1 - \frac{1}{x+3} < 3$$

$$\iff 1 \le -\frac{1}{x+3} < 2 \iff 1 \le -\frac{1}{x+3} \quad \wedge \quad -\frac{1}{x+3} < 2$$

$$\iff 1 + \frac{1}{x+3} \le 0 \quad \wedge \quad 2 + \frac{1}{x+3} > 0$$

$$\iff \frac{x+4}{x+3} \le 0 \quad \wedge \quad \frac{2x+7}{x+3} > 0$$

$$\iff [(x+4)(x+3) \le 0 \quad \wedge \quad (2x+7)(x+3) > 0], \quad x \ne -3$$

$$\iff x \in [-4,-3> \quad \wedge \quad x \in <-\infty, -\frac{7}{2}> U <-3,+\infty>$$

Luego la solución es: $x \in [-4, -\frac{7}{2}>$

(11) Resolver la inecuación $[|\frac{|x|-1}{5}|] \ge 4$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente: Sí $y \in Z$, $[| x |] \ge y \iff x \ge y$

$$4 \in Z, \left[\left|\frac{|x|-1}{5}\right|\right] \ge 4 \iff \frac{|x|-1}{5} \ge 4 \iff |x| - 1 \ge 20$$

$$\iff |x| \ge 21 \iff x \ge 21 \lor x \le -21$$

La solución es: $x \in <-\infty,-21] \cup [21,+\infty>$

(12) Resolver la inecuación $[||x| - 2x|] = 0$

Solución

Por definición de máximo entero se tiene:

$[\![\,|x|-2x\,]\!]=0 \iff 0\le |x|-2x<1 \iff 2x\le |x|<1+2x$

ahora por la propiedad transitiva $(a<b<c \iff a<b \wedge b<c)$

se tiene: $2x\le |x|<1+2x \iff 2x\le |x| \wedge |x|<1+2x$ **...(1)**

además se conoce que: $|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

1° Si $x\ge 0 \Rightarrow |x|=x$ reemplazando en (1) se tiene:

$2x\le 0 \wedge x<1+2x \Rightarrow x\le 0 \wedge x>-1 \Rightarrow x\in\, <-1,0]$

La primera parte de la solución es: $x\in [0,+\infty> \wedge <-1,0] \Rightarrow x=0$

2° $x<0 \Rightarrow |x|=-x$ reemplazando en (1) se tiene:

$2x\le -x \wedge -x<1+2x \Rightarrow x\le 0 \wedge x>-\frac{1}{3} \Rightarrow x\in <-\frac{1}{3},0]$

la segunda parte de la solución es: $x\in <-\infty,0> \wedge <-\frac{1}{3},0] \Rightarrow x\in <-\frac{1}{3},0>$

Por lo tanto la solución de $[\![\,|x|-2x\,]\!]=0$ es: $x\in <-\frac{1}{3},0>\cup\{0\}=<-\frac{1}{3},0]$

3.39. INECUACIONES LOGARÍTMICAS.-

Para el estudio de las inecuaciones logarítmicas es necesario recordar lo siguiente:

En primer lugar la definición de logaritmo es decir:

$$\log_b N=x \iff N=b^x,\ N>0 \wedge b>0$$

En segundo lugar las propiedades del logaritmo

a) $\log_b AB=\log_b A+\log_b B$ **b)** $\log_b \frac{A}{B}=\log_b A-\log_b B$

c) $\log_b A^n = n\log_b A$

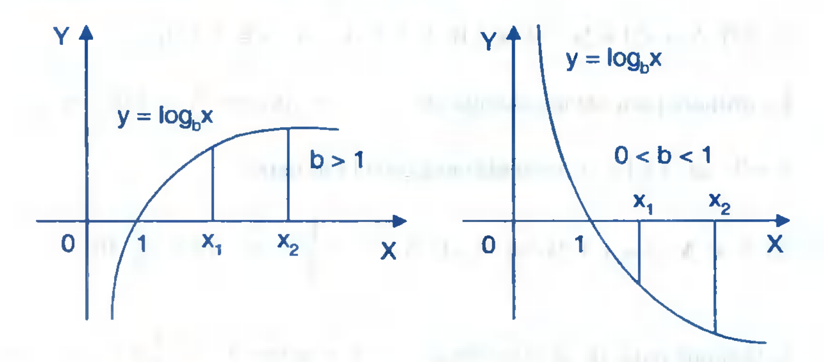
d) $\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_b A$

e) $\log_b 1 = 0$

f) $\log_b b = 1$

g) $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

En tercer lugar se observa la gráfica $y = \log_b x$ cuando $b > 1$ y $0 < b < 1$. También dentro del campo de los números reales, sólo tiene logaritmo los números reales positivo: ahora gratificamos la ecuación $y = \log_b x$.



Al observar la gráfica se tiene los siguientes casos:

1° CASO.- Cuando la base es b > 1, en la gráfica podemos observar:

i) Los números mayores que 1 tiene logaritmo positivo.

ii) Los números entre 0 y 1 tiene logaritmo negativo, entonces para cualquier $x_1 . x_2 \in R^+$ se tiene

Sí $b > 1$ y $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$

De donde deducimos las relaciones siguientes:

a) Sí $x > 0,\ b > 1;\ N \in R \Rightarrow \log_b x > N \Leftrightarrow x > b^n$

b) Si $x > 0,\ b > 1;\ N \in R \Rightarrow \log_b x < N \Leftrightarrow x < b^n$

2° CASO.- Cuándo la base es $0 < b < 1$, en la gráfica podemos observar:

i) Los números mayores que 1 tiene logaritmo negativo.

ii) Los números entre 0 y 1 tiene logaritmo positivo, entonces para cualquier x_1, x_2 de R^+ se tiene:

Sí $0 < b < 1$ y $0 < x_1 < x_2 \iff \log_b x_1 > \log_b x_2$

de donde deducimos las relaciones siguientes:

Sí $x > 0$, $0 < b < 1$ y $N \in R \Rightarrow \log_b x > N \iff 0 < x < b^N$

Sí $x > 0$, $0 < b < 1$ y $E \in R \Rightarrow \log_b x < N \iff x > b^N$

OBSERVACIÓN.- Resumiendo, para la solución de las inecuaciones logarítmicas se obtiene de la siguiente manera:

$$\log_b a > \log_b c \iff \begin{cases} a > c & \text{si } b > 1 \\ a < c & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b a > c \iff \begin{cases} a > b^c & \text{si } b > 1 \\ a < b^c & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $\log_2(2x+4) > \log_2(5x+3)$

Solución

Calculando el campo de existencia de los logarítmicos dados

$2x + 4 > 0 \wedge 5x + 3 > 0$ de donde $x > -2 \wedge x > -\frac{3}{5}$ $\therefore U = \langle -\frac{3}{5}, +\infty \rangle$

como la base es $2 > 1$, entonces se tiene:

$\log_2(2x+4) > \log_2(5x+3) \iff 2x + 4 > 5x + 3 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \langle -\infty, \frac{1}{3} \rangle$

La solución es: $x \in <-\frac{3}{5},+\infty> \cap <-\infty,\frac{1}{3}> = <-\frac{3}{5},\frac{1}{3}>$ $\therefore$ $S = <-\frac{3}{5},\frac{1}{3}>$

② $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2$

Solución

Calculando el campo de existencia del logaritmo

$2x + 5 > 0$, entonces $x > -\frac{5}{2}$ de donde $U = <-\frac{5}{2},+\infty>$

como la base es $\frac{1}{3} < 1$, entonces se tiene:

$\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2 \iff (2x+5 > (\frac{1}{3})^{-2} \Rightarrow 2x + 5 > 9 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x \in <2,+\infty>$

Luego la solución es: $x \in <-\frac{5}{2},+\infty> \cap <2,+\infty> = <2,+\infty>$ $\therefore$ $S = <2,+\infty>$

③ $\log_2(|x-2|-1) > 1$

Solución

Calculando el campo de existencia del logaritmo

$|x-2| - 1 > 0 \Rightarrow |x-2| > 1 \Rightarrow x-2 > 1 \lor x-2 < -1 \Rightarrow x > 3 \lor x < 1$

de donde $U = <-\infty,1> \cup <3,+\infty>$

como la base es $2 > 1$, entonces se tiene:

$\log_2(|x-2|-1) > 1 \Rightarrow |x-2|-1 > 2^1$

$\Rightarrow |x-2| > 3 \Rightarrow x-2 > 3 \lor x-2 < -3 \Rightarrow x > 5 \lor x < -1$

$x \in <-\infty,-1> \cup <5,+\infty>$

La solución es: $x \in (<-\infty,1> \cup <3,+\infty>) \cap (<-\infty,-1> \cup <5,+\infty>)$

$\therefore$ $S = <-\infty,-1> \cup <5,+\infty>$

(4) $\log_x(\frac{x+15}{x-1})>1$

Solución

El logaritmo dado está bien definida sí $x>0$ y $x\neq 1$ además $\frac{x+15}{x-1}>0$

Luego el campo de existencia es $U=<1,+\infty>$

$\log_x(\frac{x+15}{x-1})>1 \Rightarrow \frac{x+15}{x-1}>x^1 \Rightarrow \frac{x+15}{x-1}-x>0$, de donde

$\frac{x+15-x^2+x}{x-1}>0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-15}{x-1}<0$ de donde $\frac{(x-5)(x+3)}{x-1}<0$

de donde $x\in <1,+\infty> \cup <1,5>$

La solución es: $x\in <1,+\infty> \cap (<-\infty,-3> \cup <1,5>) = <1,5>$ $\therefore$ $S = <1,5>$

(5) Resolver la inecuación $\log_{1/3}(2x+5)<-2$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente: $x>0,\ 0<b<1,\ N\in R,\ \log_b x<N \Leftrightarrow x>b^N$

para nuestro caso $2x+5>0 \Rightarrow x>-\frac{5}{2}$

$\log_{1/3}(2x+5)<-2 \Leftrightarrow 2x+5>(\frac{1}{3})^{-2}$

$2x+5>9 \Leftrightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2$, la solución es: $x\in <2,+\infty>$

(6) Resolver la inecuación $\log_2(|x-2|-1)>1$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente: $x>0,\ b>1,\ N\in R,\ \log_b x>N \Leftrightarrow x>b^N$

para nuestro caso se tiene $|x-2|-1>0$

$|x-2|>1 \Leftrightarrow x-2>1 \vee x-2<-1 \Leftrightarrow x>3 \vee x<1$

$\log_2(|x-2|-1)>1 \Leftrightarrow |x-2|-1>2$

$|x-2|>3 \Leftrightarrow x-2>3 \vee x-2<-3 \Leftrightarrow x>5 \vee x<-1$

La solución es $x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 5,+\infty\rangle$

3.40. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

Resolver las siguientes ecuaciones:

(1) $|x^2+2|=2x+1$

Solución

Por definición de valor absoluto $|x^2+2|=x^2+2$ ... (1)

Al reemplazar en $|x^2+2|=2x+1$ se tiene:

$x^2+2=2x+1$ **de donde** $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ **entonces $x=1$. Luego la solución es: $x=1$**

(2) $|x^2-x-6|=x+2$

Solución

$|x^2-x-6|=x+2 \Leftrightarrow [x+2\geq 0 \wedge (x^2-x-6=x+2 \vee x^2-x-6=-x-2)]$

$\Leftrightarrow [x\geq -2 \wedge (x^2-2x-8=0 \vee x^2=4)]$

$\Leftrightarrow [x\geq -2 \wedge (x=4,\ x=-2 \vee x=\pm 2)]$

La solución es el conjunto $\{-2,2,4\}$



(3) $x^2-2|x|-3=0$

Solución

La ecuación dada se expresa así:

$$2|x| = x^2 - 3 \iff [x^2 - 3 \geq 0 \ \wedge \ (2x = x^2 - 3 \ \vee \ 2x = -x^2 + 3)]$$

$$\iff [x^2 \geq 3 \ \wedge \ (x^2 - 2x - 3 = 0 \ \vee \ x^2 + 2x - 3 = 0)]$$

$$\iff (x \geq \sqrt{3} \ \vee \ x \leq -\sqrt{3}) \ \wedge \ (x = 3, -1 \ \vee \ x = -3, 1)$$

-3 $-\sqrt{3}$ -1 1 $\sqrt{3}$ 3

La solución es $\{-3, 3\}$

(4) $|x - 4| = |x - 2|$

Solución

Aplicamos la propiedad: $|a| = |b| \iff a = b \ \vee \ a = -b$

$$|x - 4| = |x - 2| \iff x - 4 = x - 2 \ \vee \ x - 4 = -x + 2$$

$$\iff -4 = -2 \ \vee \ 2x = 6$$

$$\iff \phi \ \vee \ x = 3,$$ La solución es $x = 3$

(5) $|x - 2| = |3 - 2x|$

Solución

$$|x - 2| = |3 - 2x| \iff x - 2 = 3 - 2x \ \vee \ x - 2 = -3 + 2x$$

$$\iff x = \frac{5}{3} \ \vee \ x = 1,$$ La solución es: $\{1, \frac{5}{3}\}$

(6) $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & , \ x \geq -2 \\ -x-2 & , \ x < -2 \end{cases} \qquad |2^{x+1} - 1| = \begin{cases} 2^{x+1} - 1 & , \ x \geq -1 \\ 1 - 2^{x+1} & , \ x < -1 \end{cases}$$

+ -2 - 1 +

para x < -2 $\Rightarrow \begin{cases} |x+2| = -x-2 \\ |2^{x+1}-1| = 1-2^{x+1} \end{cases}$

reemplazando en la ecuación $2^{|x+2|} - |2^{x+1}-1| = 2^{x+1}+1$, se tiene:

$2^{-x-2} - (1-2^{x+1}) = 2^{x+1}+1$. simplificando $2^{-x-2} = 2 \Rightarrow -x-2 = 1 \Rightarrow x = -3$

Luego x < -2, la solución es x = -3

Para $-2 \le x < -1 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |2^{x+1}-1| = 1-2^{x+1} \end{cases}$

reemplazando en la ecuación $2^{x+2} - (1-2^{x+1}) = 2^{x+1}+1$, simplificando

$2^{x+2} = 2 \Rightarrow x+2 = 1 \Rightarrow x = -1$, como $-2 \le x < -1$ entonces x = -1 no es solución

Para $x \ge -1 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |2^{x+1}-1| = 2^{x+1}-1 \end{cases}$

reemplazando en la ecuación se tiene: $2^{x+2} - (2^{x+1}-1) = 2^{x+1}+1$, simplificando

$2^{x+2} = 2^{x+2} \Rightarrow x+2 = x+2, \ \forall x \in R$

Luego la solución para $x \ge -1$ es $R \wedge [-1,\infty> = [-1.\infty>$

Por lo tanto la solución de la ecuación es: x = -3 y [-1,+∞>

(7) $|x^2-9|+|x^2-4| = 5$

Solución

A la ecuación $|x^2-9|+|x^2-4| = 5$ expresaremos en la forma:

$|x+3||x-3|+|x-2||x+2| = 5$ ...(1)

I_1 I_2 I_3 I_4 I_5

-3 -2 2 3

analizando en cada intervalo I_i, i = 1, 2, 3, 4, 5

Para x < -3 $\Rightarrow$ $\begin{cases} |x+3| = -x-3 \;\; ; \;\; |x-3| = 3-x \\ |x+2| = -x-2 \;\; : \;\; |x-2| = 2-x \end{cases}$ **... (2)**

Reemplazando (2) en (1) se tiene: (-x – 3)(3 – x) + (-x – 2)(2 – x) = 5

efectuando y simplificando $x^2 = 9$ $\Rightarrow$ x = ± 3

luego como x < -3 la solución es: x ∈ <-∞,-3> Λ {± 3} = ϕ

Para -3 ≤ x < -2 $\Rightarrow$ $\begin{cases} |x+3| = x+3 \;\; ; \;\; |x-3| = 3-x \\ |x+2| = -x-2 \;\; ; \;\; |x-2| = 2-x \end{cases}$ **... (3)**

Reemplazando (3) en (1) se tiene: (x + 3)(3 – x) – (x + 2)(2 – x) = 5

efectuando operaciones y simplificando: $9-x^2-4+x^2=5$ $\Rightarrow$ 5 = 5 es valido ∀ x ∈ R

luego la solución es: [-3,-2> ∩ R = [-3,-2>

Para -2 ≤ x < 2 $\Rightarrow$ $\begin{cases} |x+3| = x+3 \;\; ; \;\; |x-3| = 3-x \\ |x+2| = x+2 \;\; ; \;\; |x-2| = 2-x \end{cases}$ **... (4)**

Reemplazando (4) en (1) se tiene: (x + 3)(3 – x) + (x + 2)(2 – x) = 5

$9-x^2+4-x^2=5$ $\Rightarrow$ x = ± 2

luego la solución es: [-2,-2> ∩ {± 2} = {-2}

para 2 ≤ x < 3 $\Rightarrow$ $\begin{cases} |x+3| = x+3 \;\; , \;\; |x-3| = 3-x \\ |x+2| = x+2 \;\; , \;\; |x-2| = x-2 \end{cases}$ **...(5)**

reemplazando (5) en (1) se tiene: (x + 3)(3 – x) + (x + 2)(x – 2) = 5

efectuando y simplificando 5 = 5 es valido ∀ x ∈ R

Luego la solución es: $[2,3> \cap R = [2,3>$

Para $x \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} |x+3| = x+3 \quad , \quad |x-3| = x-3 \\ |x+2| = x+2 \quad , \quad |x-2| = x-2 \end{cases}$ ... (6)

Reemplazando (6) en (1) se tiene: $(x + 3)(x - 3) + (x + 2)(x - 2) = 5$

efectuando y simplificando: $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Luego la solución es: $[3,+\infty> \cap \{\pm 3\} = \{3\}$

Por lo tanto la solución de la ecuación es: $[-3,-2> v \{-2\} \cup [2,3> v \{3\}$

$\therefore \ [-3,-2] \cup [2,3]$

(8) $|x^2 - 4| = -2x + 4$

Solución

Por la propiedad: $|a| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge (a = b \ v \ a = -b)$

$|x^2 - 4| = -2x + 4 \Leftrightarrow -2x + 4 \geq 0 \wedge (x^2 - 4 = -2x + 4 \ v \ x^2 - 4 = 2x - 4)$

$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge (x^2 + 2x - 8 = 0 \ v \ x^2 - 2x = 0)$

$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge ((x + 4)(x - 2) = 0 \ v \ x(x - 2) = 0)$

$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge (x = 2, -4 \ v \ x = 0,2)$

Luego $\{-4, 0, 2\}$ son las soluciones de la ecuación dada

(9) $|x^2 + 3| = |2x + 1|$

Solución

Por la propiedad: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \ v \ a = -b$

$|x^2 + 3| = |2x + 1| \Leftrightarrow x^2 + 3 = 2x + 1 \ v \ x^2 + 3 = -2x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \ v \ x^2 + 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \phi \ v \ \phi = \phi$

La solución es él ϕ puesto que $\forall x \in R$, $x^2 - 2x + 2 > 0$, $x^2 + 2x + 4 > 0$

(10) $|x^2+6x+1|=2x+6$

Solución

Por la propiedad: $|a|=b \iff b\geq 0 \wedge (a=b \vee a=-b)$

$|x^2+6x+1|=2x+6 \iff 2x+6\geq 0 \wedge [x^2+6x+1=2x+6 \vee x^2+6x+1=-2x-6]$

$\iff x\geq -3 \wedge (x^2+4x-5=0 \vee x^2+8x+7=0)$

$\iff x\geq -3 \wedge (x=1,-5 \vee x=-1,-7)$



Luego la solución es $\{-1,1\}$

(11) $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right|=8$

Solución

$\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right|=8 \iff \frac{3x+8}{2x-3}=8 \vee \frac{3x+8}{2x-3}=-8$, para $x\neq\frac{3}{2}$

$\iff 3x+8=8(2x-3) \vee 3x+8=-8(2x-3),\ x\neq\frac{3}{2}$

$\iff 13x=32 \vee 19x=16$, Luego la solución es: $x=\frac{32}{13}$, $x=\frac{16}{19}$

(12) $||x|-5|=2x-3$

Solución

$||x|-5|=2x-3 \iff 2x-3\geq 0 \wedge (|x|-5=2x-3 \vee |x|-5=-2x+3)$

$\iff x\geq\frac{3}{2} \wedge (|x|=2x+2 \vee |x|=-2x+8)$

Como $x\geq\frac{3}{2} \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x=2x+2 \vee x=-2x+8$

$\Rightarrow x=-2 \vee x=\frac{8}{3}$, por lo tanto la solución es $x=\frac{8}{3}$

(13) $|x-4|^2 - 5|x-4| + 6 = 0$

Solución

Factorizando se tiene: $(|x-4|-3)(|x-4|-2)=0$

$\Leftrightarrow \; |x-4|-3=0 \;\; v \;\; |x-4|-2=0$

$\Leftrightarrow \; |x-4|=3 \;\; v \;\; |x-4|=2$

$\Leftrightarrow \; (x-4=3 \;\; v \;\; x-4=-3) \;\; v \;\; (x-4=2 \;\; v \;\; x-4=-2)$

$\Leftrightarrow \; x=7 \;\; v \;\; x=1 \;\; v \;\; x=6 \;\; v \;\; x=2$, las soluciones son: $\{1,2,6,7\}$

(14) Hallar el valor de la expresión: $\dfrac{|4x+7|-|x-7|}{x}$ si $x \in \langle 2,5 \rangle$

Solución

Por la definición de valor absoluto se tiene:

$$|4x+7| = \begin{cases} 4x+7 & \text{si} \quad x \geq -\dfrac{7}{4} \\ -4x-7 & \text{si} \quad x < -\dfrac{7}{4} \end{cases} \quad ; \quad |x-7| = \begin{cases} x-7 & \text{si} \quad x \geq 7 \\ 7-x & \text{si} \quad x < 7 \end{cases}$$

ahora para $x \in \langle 2,5 \rangle \Leftrightarrow |4x+7| = 4x+7, \;\; |x-7| = 7-x$

como $x \in \langle 2,5 \rangle \Leftrightarrow \dfrac{|4x+7|-|x-7|}{x} = \dfrac{4x+7-(7-x)}{x} = \dfrac{5x}{x} = 5$

$\therefore \; \dfrac{|4x+7|-|x-7|}{x} = 5$ si $x \in \langle 2,5 \rangle$


Hallar el valor de la expresión: $\dfrac{|5x+4|-|4+3x|}{x}$ si $x \in \langle 0,3 \rangle$

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto

$$|5x+4| = \begin{cases} 5x+4 & \text{si} \quad x \geq -\dfrac{4}{5} \\ -5x-4 & \text{si} \quad x < -\dfrac{4}{5} \end{cases} \quad ; \quad |4+3x| = \begin{cases} 4+3x & \text{si} \quad x \geq -\dfrac{4}{3} \\ -4-3x & \text{si} \quad x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

ahora para $x \in <0,3> \iff |5x+4| = 5x+4, \quad |4+3x| = 4+3x$

como $x \in <0,3> \iff \dfrac{|5x+4|-|4-3x|}{x} = \dfrac{5x+4-(4+3x)}{x} = \dfrac{2x}{x} = 2$

$\therefore \quad \dfrac{|5x+4|-|4+3x|}{x} = 2 \quad$ si $x \in <0,3>$

(16) Hallar el valor de la expresión: $\dfrac{|5x-20|-|3x-20|}{x}$ si $x \in <-3,-2>$

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto

$$|5x-20| = \begin{cases} 5x-20 & \text{si} \quad x \geq 4 \\ 20-5x & \text{si} \quad x < 4 \end{cases} \quad ; \quad |3x-20| = \begin{cases} 3x-20 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{20}{3} \\ 20-3x & \text{si} \quad x < \dfrac{20}{3} \end{cases}$$

ahora para $x \in <-3,-2> \iff |5x-20| = 20-5x, \quad |3x-20| = 20-3x$

como $x \in <-3,-2> \iff \dfrac{|5x-20|-|3x-20|}{x} = \dfrac{20-5x-(20-3x)}{x} = -\dfrac{2x}{x} = -2$

$\therefore \quad \dfrac{|5x-20|-|3x-20|}{x} = -2 \quad$ si $x \in <-3.-2>$

(17) Resolver la inecuación $|x^2-4| < 5$

Solución

Por la propiedad: $|a| < b \iff -b < a < b$ donde $b > 0$

$|x^2-4| < 5 \iff -5 < x^2-4 < 5$

$\Leftrightarrow \quad -1 < x^2 < 9 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x^2 \cap x^2 < 9$

$\Leftrightarrow \quad x \in R \cap -3 < x < 3$

$\Leftrightarrow \quad -3 < x < 3$, Luego la solución es $\boxed{x \in \langle -3,3 \rangle}$

(18) $|9 - x^2| \geq 3$

Solución

Por la propiedad $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \lor a \leq -b$

$|9 - x^2| \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - x^2 \geq 3 \;\; v \;\; 9 - x^2 \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad x^2 \leq 6 \;\; v \;\; x^2 \geq 12$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \;\; \cup x \geq \sqrt{12} \cup x \leq -\sqrt{12}$



Luego la solución es: $\boxed{x \in \langle -\infty, -\sqrt{12}] \cup [-\sqrt{6}, \sqrt{6}] \cup [\sqrt{12}, +\infty \rangle}$

(19) $\left|\frac{3x-3}{x+1}\right| < 2$

Solución

Mediante la propiedad: $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

$\left|\frac{3x-3}{x+1}\right| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \frac{3x-3}{x+1} < 2$

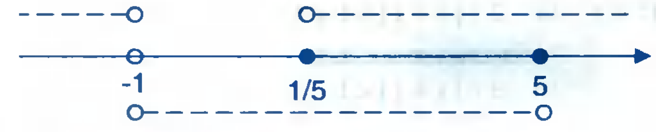
$\Leftrightarrow \quad -2 < \frac{3x-3}{x+1} \quad \land \quad \frac{3x-3}{x+1} < 2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{5x-1}{x+1} > 0 \quad \land \quad \frac{x-5}{x+1} < 0$, para $x \neq -1$

$\Leftrightarrow \quad (5x - 1)(x + 1) > 0 \;\land\; (x - 5)(x + 1) < 0, \;\; x \neq -1$



$x \in <-\infty,-1> U <\frac{1}{5},+\infty> \quad \wedge \quad x \in <-1,5>$



Luego la solución es $x \in <\frac{1}{5},5>$

(20) Resolver: $\frac{1}{x+4} \in [\frac{1}{3},1]$

Solución

$\frac{1}{x+4} \in [\frac{1}{3},1] \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{x+4} \le 1 \Rightarrow 1 \le x+4 \le 3$

$\Rightarrow -3 \le x \le -1$, luego la solución es $x \in [-3,-1]$

(21) Resolver $|\frac{5}{2x-1}| \ge |\frac{1}{x-2}|$

Solución

$|\frac{5}{2x-1}| \ge |\frac{1}{x-2}| \Leftrightarrow \frac{5}{|2x-1|} \ge \frac{1}{|x-2|}$ para $x \ne \frac{1}{2},2$ se tiene

$5|x-2| \ge |2x-1|$, elevando al cuadrado $25(x-2)^2 \ge (2x-1)^2$ efectuando y simplificando:

$7x^2-32x+33 \ge 0 \Leftrightarrow (7x-11)(x-3) \ge 0$

+ - +
11/7 3

Como $(7x-11)(x-3) \ge 0$, se toma los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir $<-\infty,\frac{11}{7}] \cup [3,+\infty>$. Luego la solución es: $<-\infty,\frac{11}{7}] \cup [3,+\infty> -\{\frac{1}{2}\}$

(22) Resolver la inecuación: $|x-1|^2 + 2|x-1| - 3 < 0$

Solución

Completando cuadrados se tiene:

$(|x-1|+1)^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < |x+1| + 1 < 2$

$\Leftrightarrow \quad -3 < |x+1| < 1$

$\Leftrightarrow \quad -3 < |x+1| \ \wedge \ |x+1| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad R \ \wedge \ -1 < x+1 < 1$

$\Leftrightarrow \quad R \wedge -2 < x < 0,$ **la solución es $x \in \langle -2,0 \rangle$**



(23) $|x-3|^2 - 3|x-3| - 18 > 0$

Solución

Factorizando se tiene:

$(|x-3|-6)(|x-3|+3) > 0 \Leftrightarrow (|x-3| > 6 \wedge |x-3| > -3) \vee (|x-3| < 6 \wedge |x-3| < -3)$

$\Leftrightarrow \quad (|x-3| > 6 \ \wedge R) \ \vee \phi$

$\Leftrightarrow \quad (x-3 > 6 \ \vee \ x-3 < -6) \ \wedge \ R$

$\Leftrightarrow \quad (x > 9 \ \vee \ x < -3) \ \wedge R$

$\Leftrightarrow \quad (x < -3 \ \vee \ x > 9)$

La solución es **$x \in \langle -\infty,-3 \rangle \cup \langle 9,+\infty \rangle$**



(24) $\dfrac{|x|-1}{2-x} \geq 0$

Solución

Por la definición de valor absoluto $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, reemplazando en la ecuación dada se tiene

$$\frac{-x-1}{2-x}\geq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}\geq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)\geq 0, \text{ para } x\neq 2$$

de donde $(x+1)(x-2)=0 \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=2$

+ - +
-1 2

como $\dfrac{x+1}{x-2}\geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+) es decir: $x \in (<-\infty,-1] \cup <2,+\infty>) \wedge <-\infty,0]$

$$\boxed{\therefore\ x \in <-\infty,-1]} \qquad \ldots (1)$$

Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, reemplazando en la ecuación dada se tiene

$$\frac{x-1}{2-x}\geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2}\leq 0 \text{ de donde}$$

Si $\dfrac{x-1}{x-2}\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)\leq 0$ para $x\neq 2$



Entonces $(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=2$

Como $\dfrac{x-1}{x-2}\leq 0 \Rightarrow$ la solución es: $x \in [0,+\infty> \wedge [1,2> = [1,2>$

$$\boxed{\therefore\ x \in [1,2>} \qquad \ldots (2)$$

La solución de la inecuación es la unión de (1) y (2) es decir: $x \in <-\infty,-1] \cup [1,2>$

(25) $\left|\dfrac{1}{2x+3}\right| \leq \left|\dfrac{x}{3x+7}\right|$

Solución

$$\left|\frac{1}{2x-+3}\right| \leq \left|\frac{x}{3x+7}\right| \Rightarrow \frac{1}{|2x+3|}\leq \frac{|x|}{|3x+7|}$$

Para $x\neq -\dfrac{7}{3},-\dfrac{3}{2}$, se tiene: $|3x+7| \leq |x||2x+3|$ ... (1)

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ & -7/3 & & -3/2 & & 0 & \end{array}$$

a) si $x < -\dfrac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = -3x-7 \\ |x| = -x \\ |2x+3| = -2x-3 \end{cases}$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: $-3x-7 \le (-x)(-2x-3)$ de donde $2x^2+6x+7 \ge 0$

pero como $\forall\ x \in R,\ 2x^2+6x+7 \ge 0$

la solución es: $\boxed{<-\infty,-\dfrac{7}{3}> \wedge\ R = <-\infty,-\dfrac{7}{3}>}$

b) Si $-\dfrac{7}{3} < x < -\dfrac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = 3x+7 \\ |x| = -x \\ |2x+3| = -2x-3 \end{cases}$ **... (3)**

reemplazando (3) en (1) se tiene: $3x+7 \le -x(-2x-3)$ de donde $2x^2-7 \ge 0$

$2x^2-7 \ge 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x+\sqrt{7})(\sqrt{2}x-\sqrt{7}) \ge 0$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ & -\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} & & \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} & \end{array}$$

La solución es: $<-\dfrac{7}{3},-\dfrac{3}{2}> \wedge\ (<-\infty,-\sqrt{\dfrac{7}{2}}]\ U\ [\sqrt{\dfrac{7}{2}},+\infty>)$

$$\boxed{\therefore\ <-\frac{7}{3},-\sqrt{\frac{7}{2}}]}$$

c) Si $-\dfrac{3}{2} < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = 3x+7 \\ |x| = -x \\ |2x+3| = 2x+3 \end{cases}$ **... (4)**

reemplazando (4) en (1) se tiene: $3x + 7 \leq (-x)(2x + 3)$ de donde $2x^2 + 6x + 7 \leq 0$

como $\forall x \in R$, $2x^2 + 6x + 7 > 0$ entonces la solución es: $\boxed{<-\frac{3}{2}, 0> \wedge \phi = \phi}$

d) Si $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = 3x+7 \\ |x| = x \\ |2x+3| = 2x+3 \end{cases}$ **... (5)**

reemplazando (5) en (1) se tiene: $3x + 7 \leq x(2x + 3) \Rightarrow 2x^2 - 7 \geq 0$

$2x^2 - 7 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x + \sqrt{7})(\sqrt{2}x - \sqrt{7}) \geq 0$

$+ \quad -\sqrt{\frac{7}{2}} \quad - \quad \sqrt{\frac{7}{2}} \quad +$

La solución es: $\boxed{[0, +\infty > \cap (<-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{7}{2}}, \infty >) = [\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty >}$

luego la respuesta es: $<-\infty, -\frac{7}{3} > \cup < -\frac{7}{3}, -\sqrt{\frac{7}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty >$

(26) $\dfrac{|x-1| - |x|}{1 - |x|} \geq 0$

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto: $|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ si } x \geq 1 \\ 1-x, \text{ si } x < 1 \end{cases}$; $|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$



a) Si $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = 1-x \end{cases}$ **... (2)**

reemplazando (2) en la inecuación dada. $\dfrac{1-x-(-x)}{1-(-x)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x} \geq 0$

como $\dfrac{1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 0$, $x \neq -1 \Leftrightarrow x > -1$

La solución para este caso es: $<-\infty,0> \wedge <-\infty,-1> = <-1,0>$

b) Si $0 \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |x-1| = 1-x \end{cases}$ ... (3)

reemplazando (2) en la ecuación dada:

$$\frac{1-x-x}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) \geq 0 \text{ para } x \neq 1$$

ahora mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:

+ 1/2 - 1 +

La solución para este caso es: $[0,1) > \wedge (<-\infty,\frac{1}{2}] \vee <1,+\infty>) = [0,\frac{1}{2}]$

c) Si $x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = x-1 \end{cases}$ ... (4)

reemplazando (4) en la inecuación dada:

$$\frac{x-1-x}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \text{ para } x \neq 1 \text{ de donde } x > 1.$$

La solución para este caso es: $[1,+\infty> \wedge <1,+\infty> = <1,+\infty>$

Por lo tanto la respuesta es: $<-1,0> \cup [0,\frac{1}{2}] \cup <1,+\infty> = <-1,\frac{1}{2}] \cup <1,+\infty>$

(27) $|2x^2-3x-9| < 2|x^2-2x-3|$

Solución

Se conoce que: $\begin{cases} 2x^2-3x-9 = (2x+3)(x-3) \\ x^2-2x-3 = (x+1)(x-3) \end{cases}$ ... (1)

Reemplazando (1) en la inecuación dada

$$|2x^2-3x-9| < 2|x^2-2x-3| \Leftrightarrow |(2x+3)(x-3)| < 2|(x+1)(x-3)|$$

de donde: $|2x+3||x-3| < 2|x+1||x-3|$ para $x \neq 3$

se tiene: $|2x+3| < 2|x+1|$, elevando al cuadrado:

$4x^2+12x+9 < 4x^2+8x+4 \Rightarrow 4x < -5$ de donde:

$x < -\frac{5}{4}$; luego la solución es: $\boxed{x \in \langle -\infty, -\frac{5}{4} \rangle}$



$$\left|\frac{1}{x}-2\right| < 11$$

Solución

Mediante la propiedad: $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

$$\left|\frac{1}{x}-2\right| < 11 \Leftrightarrow -11 < \frac{1}{x}-2 < 11 \Leftrightarrow -9 < \frac{1}{x} < 13$$

mediante la propiedad: $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$

$$-9 < \frac{1}{x} < 13 \Leftrightarrow -9 < \frac{1}{x} \wedge \frac{1}{x} < 13$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x+1}{x} > 0 \wedge \frac{13x-1}{x} > 0$$

+ (-1/9) - (0) + $\wedge$ + (0) - (1/13) +

La solución es: $x \in (\langle -\infty, -\frac{1}{9} \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle) \cap (\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle \frac{1}{13}, +\infty \rangle)$

$$\boxed{\therefore\ x \in \langle -\infty, -\frac{1}{9} \rangle \cup \langle \frac{1}{13}, +\infty \rangle}$$

(29) $|3x+2| \leq |2x-1| + |x+3|$

Solución

Aplicando la desigualdad triangular

$\forall$ x $\in$ R: $|3x+2|=|(2x-1)+(x+3)| \leq |2x-1|+|x+3|$

Por lo tanto la solución es: $\boxed{\forall x \in R}$

(30) $4^x + 2^{x+3} - 9 \geq 0$

Solución

Se conoce: $4^x = 2^{2x}$, $2^{x+3} = 8.2^x$

$$4^x + 2^{x+3} - 9 \geq 0 \iff 2^{2x} + 8.2^x - 9 \geq 0$$

$$2^{2x} + 8.2^x - 9 \geq 0 \iff (2^x+9)(2^x-1) \geq 0$$

$$(2^x+9)(2^x-1) \geq 0 \iff (2^x+9 \geq 0 \ \land \ 2^x-1 \geq 0) \ \lor \ (2^x+9 \leq 0 \ \land \ 2^x-1 \leq 0)$$

$$\iff (2^x \geq -9 \ \land \ 2^x \geq 1) \ \lor \ (2^x \leq -9 \ \land \ 2^x \leq 1)$$

$$\iff x \in (R \ \land \ [0,+\infty\rangle) \lor (\phi \land \langle -\infty, 0])$$

$$\iff \boxed{x \in [0,+\infty\rangle}$$

(31) Demostrar que: Sí $|x-a| \leq R \Rightarrow x \in [a-R, a+R]$

Solución

Si $|x-a| \leq R \Rightarrow -R \leq x-a \leq R$

$$\Rightarrow a-R \leq x \leq a+R$$

$$\Rightarrow x \in [a-R, a+R]$$

(32) Demostrar que: Sí $|x+4| < 1 \Rightarrow \left|\frac{2x+3}{x-1}\right| < \frac{7}{4}$

Solución

A la expresión $\frac{2x+3}{x-1}$ expresaremos en la forma: $\frac{2x+3}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$ ... (1)

Como $|x+4|<1 \Rightarrow -1<x+4<1$ sumando –5 se tiene:

$\Rightarrow -6<x-1<-4$ invirtiendo

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}<\frac{1}{x-1}<-\frac{1}{6}\text{, multiplicando por 5}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4}<\frac{5}{x+1}<-\frac{5}{6}\quad\text{sumando 2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}<2+\frac{5}{x-1}<\frac{7}{6}<\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}<\frac{2x+3}{x-1}<\frac{7}{4} \Rightarrow \left|\frac{2x+3}{x-1}\right|<\frac{7}{4}$$

(33) $\dfrac{|2x-1|+1}{x^2-2x-3}\leq 0$

Solución

Por definición de valor absoluto: $|2x-1|=\begin{cases}2x-1\ , & x\geq\frac{1}{2}\\ 1-2x\ , & x<\frac{1}{2}\end{cases}$

-     1/2   +

Sí $x<\dfrac{1}{2} \Rightarrow |2x-1|=1-2x$

Reemplazando en la inecuación dada:

$$\frac{1-2x+1}{x^2-2x-3}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{(x-3(x+1)}\geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)(x+1)\geq 0$$

para $x\neq -1,3$. Mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:

-   -1   +   1   -   3   +

La solución para este caso es: $x \in <-\infty,\frac{1}{2}> \ \Lambda \ (<-1,1] \ \ U <3,+\infty>)$

$$\therefore \ x \in <-1,\frac{1}{2}>$$

Si $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 2x-1$, reemplazando en la inecuación dada

$$\frac{2x-1+1}{x^2-2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x-3)(x+1)} \leq 0 \Rightarrow x(x-3)(x+1) \leq 0,\ x \neq -1,3$$

Mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:



La solución para este caso es: $x \in [\frac{1}{2},+\infty> \cap (<-\infty,-1> \cup [0,3>)$

$$\therefore \ x \in [\frac{1}{2},3>$$

Por lo tanto la solución de la inecuación es: $x \in <-1,\frac{1}{2}> \cup [\frac{1}{2},3> = <-1,3>$



$$\frac{|x^2-x|-2}{|x|-1} \geq 0$$

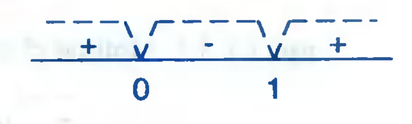
Solución

A la inecuación expresaremos en la forma

$$\frac{|x^2-x|-2}{|x|-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{|x||x-1|-1}{|x|-1} \geq 0 \quad \text{... (1)}$$

Ahora aplicamos la definición de valor absoluto.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$



para $x < 0 \Rightarrow |x| = -x,\ |x-1| = 1-x$ **... (2)**

$$\frac{-x(1-x)-2}{-x-1} \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-x-2}{x+1} \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-2)(x+1)}{x+1)} \leq 0$$

para $x \neq 1$, $\frac{(x-2)(x+1)}{x+1} \leq 0 \Rightarrow x-2 \leq 0,\ x \neq -1$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle -1,2]$$

Luego la solución para este caso es: $x \in \langle -\infty,0\rangle \cap (\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle -1,1])$

$\therefore\ x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle -1,0\rangle$ ...(α)

para $0 \leq x < 1$, $\Rightarrow |x| = x,\ |x-1| = 1-x$ ... (3)

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$\frac{x(1-x)-2}{x-1} \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{x-x^2-2}{x-1} \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-x+2}{x-1} \leq 0$$

pero como $\forall\ x \in R,\ x^2-x+2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \leq 0 \Rightarrow x-1 \leq 0$

$x \neq 1 \Rightarrow x < 1$, luego la solución para este caso es: $x \in [0,1\rangle \cap \langle -\infty,1\rangle = [0,1\rangle$ ... (β)

para $x \geq 1 \Rightarrow |x| = x,\ |x-1| = x-1$

reemplazando (4) en (1) se tiene:

$$\frac{x(x-1)-2}{x-1} \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-x-2}{x-1} \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1)(x-1) \geq 0, \text{ para } x \neq 1$$

Ahora por el criterio de los puntos críticos se tiene

$x \in [1,+\infty\rangle \cap ([-1,1\rangle \cup [2,+\infty\rangle)$

$\therefore\ x \in [2,+\infty\rangle$ ... (γ)

Por lo tanto la solución general de la inecuación es: la unión de (α), (β) y (γ)

$x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle \cup [0, 1\rangle \cup [2, +\infty \rangle$

 $\dfrac{|4x - x^2| - 5}{1 - \sqrt{x^2}} \ge 0$

Solución

A la inecuación dada expresaremos en la forma.

$$\frac{|4x - x^2| - 5}{1 - \sqrt{x^2}} \ge 0 \Rightarrow \frac{|x||x-4| - 5}{1 - |x|} \ge 0 \qquad \ldots (1)$$

Aplicando la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \ge 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}, \quad |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si} \quad x \ge 4 \\ 4-x & \text{si} \quad x < 4 \end{cases}$$

+ 0 - 4 +

Para $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, $|x - 4| = 4 - x$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $\dfrac{-x(4-x) - 5}{1 + x} \ge 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x + 1} \ge 0$

$\dfrac{(x-5)(x+1)}{x+1} \ge 0$ para $x \ne -1$, $x - 5 \ge 0 \Rightarrow x \ge 5$

La solución para este caso se tiene: $x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cap [5, +\infty \rangle = \phi$ ... (α)

Para $0 \le x < 4 \Rightarrow |x| = x$, $|x - 4| = 4 - x$ ... (3)

Reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$\frac{x(4-x) - 5}{1 - x} \ge 0 \Rightarrow \frac{4x - x^2 - 5}{1 - x} \ge 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1} \ge 0$$

como $\forall x \in R$, $x^2 - 4x + 5 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x - 1} \ge 0 \Rightarrow x - 1 \ge 0$, $x \ne 1$

entonces $x > 1$, por lo tanto la solución para este caso es:

$x \in [0,4> \cap <1,+\infty>$ $\therefore x \in <1,4>$ ... (β)

para $x \geq 4 \Rightarrow |x| = x$, $|x-4| = x-4$ ... (4)

reemplazando (4) en (1) se tiene:

$$\frac{x(x-4)-5}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-5}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-5}{x-1} \geq 0$$

para $x \neq 1$, $(x-5)(x+1)(x-1) \geq 0$, ahora mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:

- + - +
-1 1 5

la solución para este caso es: $x \in [4,+\infty> \cap ([-1,1> \cup [5,+\infty>)$

$\therefore x \in [5,+\infty>$ ... (γ)

La solución general es la unión de (α), (β), y (γ)

$\therefore x \in <1,4> \cup [5,+\infty>$

(36) $\dfrac{|2-x|-x^2}{8x-|9-x^2|} \leq 0$

Solución

A la inecuación dada se puede expresar en la forma:

$$\frac{|2-x|-x^2}{8x-|9-x^2|} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{|x-2|-x^2}{8x-|x^2-9|} \leq 0$$ (propiedad del valor absoluto)

$$\frac{|2-x|-x^2}{8x-|9-x^2|} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{|x-2|-x^2}{8x-|x+3||x-3|} \leq 0 \quad \text{... (1)}$$

ahora aplicando la definición de valor absoluto.

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & , \quad x \geq -3 \\ -x-3 & , \quad x < -3 \end{cases}, \quad |x-2| = \begin{cases} x-2 & , \quad x \geq 2 \\ 2-x & , \quad x < 2 \end{cases}, \quad |x-3| = \begin{cases} x-3 & , \quad x \geq 3 \\ 3-x & , \quad x < 3 \end{cases}$$

-3 2 3

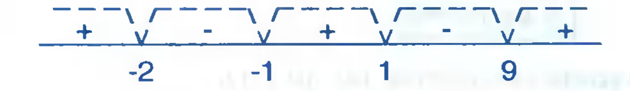
Sí $x < -3, \Rightarrow |x+3| = -x-3, \ |x-2| = 2-x, \ |x-3| = 3-x$ ... (2)

Ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$\frac{2-x-x^2}{8x-(-x-3)(3-x)} \le 0 \ \Rightarrow \ \frac{2-x-x^2}{8x+(3+x)(3-x)} \le 0$$

$$\frac{2-x-x^2}{8x+9-x^2} \le 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{x^2+x-2}{x^2-8x-9} \le 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-9)(x+1)} \le 0 \ \Leftrightarrow \ (x+2)(x-1)(x-9)(x+1) \le 0, \ x \ne -1,9$$



de donde $x \in [-2,-1> \cup [1,9>$

La solución para el caso en que $x < -3$ es: $x \in ([-2,-1> \cup [1,9>) \cap <-\infty,-3> = \phi$

para $-3 \le x < 2 \ \Rightarrow |x+3| = x+3, \ |x-2| = 2-x, \ |x-3| = 3-x$ ... (3)

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$\frac{2-x-x^2}{8x-(x+3)(3-x)} \le 0 \ \Rightarrow \ \frac{2-x-x^2}{8x-9+x^2} \le 0 \ \Rightarrow \ \frac{x^2+x-2}{x^2+8x-9} \ge 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+9)(x-1)} \ge 0 \ \Leftrightarrow \ (x+2)(x-1)(x+9)(x-1) \ge 0, \text{ para } x \ne -9,1$$

$(x+2)(x+9)(x-1)^2 \ge 0, \ x \ne -9,1$

+ - +
-9 -2 1

de donde $x \in <-\infty,-9> \cup [-2,1> \cup <1,+\infty>$

La solución para este caso en que $-3 \le x < 2$ es:

x ∈ (<-∞,-9> ∪ [-2,1> ∪ <1,+∞> ∩ [-3,2>

∴ x ∈ [-2,1> ∪ <1,2> ... (α)

para $2 \le x < 3 \Rightarrow |x+3| = x+3,\ |x-2| = x-2,\ |x-3| = 3-x$ ... (4)

reemplazando (4) en (1) se tiene:

$$\frac{x-2-x^2}{8x-(x+3)(3-x)} \le 0 \Rightarrow \frac{x-2-x^2}{8x-9+x^2} \le 0 \Rightarrow \frac{x^2-x+2}{x^2+8x-9} \ge 0$$

como $x^2-x+2>0 \quad \forall\, x \in R \Rightarrow \frac{1}{x^2+8x-9} \ge 0$

$$\frac{1}{x^2+8x-9} \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+9)(x-1)} \ge 0 \Rightarrow (x+9)(x-1) \ge 0,\ x \ne -9,1$$

+ -9 - 1 +

de donde x ∈ <-∞,9> ∪ <1,+∞>

La solución para este caso en que $2 \le x < 3$ es:

x ∈ <-∞,-9> ∪ <1,+∞> ∩ [2,3> = [2,3> ... (β)

para $x \ge 3 \Rightarrow |x+3| = x+3,\ |x-2| = x-2,\ |x-3| = x-3$ ... (5)

reemplazando (5) en (1) se tiene:

$$\frac{x-2-x^2}{8x-(x+3)(x-3)} \le 0 \Rightarrow \frac{x-2-x^2}{8x-x^2+9} \le 0 \Rightarrow \frac{x^2-x+2}{x^2-8x-9} \le 0$$

como $x^2-x+2>0,\ \forall\, x \Rightarrow \frac{1}{x^2-8x-9} \le 0$

$$\frac{1}{x^2-8x-9} \le 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+1) \le 0,\ x \ne 9,-1$$

+ -1 - 9 +

de donde x ∈ <1,9>

La solución para este caso es: $x \in \langle -1,9\rangle \cap [3,+\infty\rangle = [3,9\rangle$ ... (γ)

la solución es: $x \in [-2,1\rangle \cup \langle 1,2\rangle \cup [2,3\rangle \cup [3,9\rangle$

$\therefore\ x \in [-2,1\rangle \cup \langle 1,9\rangle$

(37) $\left|\frac{x+3}{x+1}\right| < 4x+3$

Solución

$$\left|\frac{x+3}{x+1}\right| < 4x+3 \iff \left(4x+3>0 \ \wedge\ -4x-3 < \frac{x+3}{x+1} < 4x+3\right)$$

$$\iff \left(x > -\frac{3}{4} \ \wedge\ \left(-4x-3 < \frac{x+3}{x+1} \ \wedge\ \frac{x+3}{x+1} < 4x+3\right)\right)$$

$$\iff \left(x > -\frac{3}{4} \ \wedge\ \left(\frac{x+3}{x+1} + 4x+3 > 0 \ \wedge\ 4x+3-\frac{x+3}{x+1} > 0\right)\right)$$

$$\iff \left(x > -\frac{3}{4} \ \wedge\ \left(\frac{2x^2+4x+3}{x+1} > 0 \ \wedge\ \frac{x(2x+3)}{x+1} > 0\right)\right)$$

$$\iff \left(x > -\frac{3}{4} \ \wedge\ \left(\frac{1}{x+1} > 0 \ \wedge\ \frac{x(2x+3)}{x+1} > 0\right)\right)$$

puesto que $2x^2+4x+3>0$

-3/4 ∧ (-1 ∧ -3/2 -1 0)

-3/4 ∧ (-3/2 -1 0)

$x \in \langle -\frac{3}{4},+\infty\rangle \ \wedge\ \langle 0,+\infty\rangle = \langle 0,+\infty\rangle$

$\therefore\ x \in \langle 0,+\infty\rangle$

(38) $\dfrac{x}{|x^2+4|} > \dfrac{x-3}{x^2+x+4}$

Solución

Aplicando la propiedad: $\forall\, x \in R,\quad x^2 \geq 0$ de donde

$x^2+4>0 \;\wedge\; x^2+x+4>0$, entonces

$|x^2+4| = x^2+4$ luego reemplazando se tiene:

$$\frac{x}{x^2+4} > \frac{x-3}{x^2+x+4} \iff x(x^2+x+4) > (x-3)(x^2+4)$$

$$\iff x^3+x^2+4x > x^2-3x^2+4x-12$$

$$\iff x^2 > -3 \Rightarrow \forall\, x \in R$$



$\sqrt[4]{\dfrac{x||x|-|-12}{|x+2|+1} - \dfrac{||1-x|-3|}{|x-1|+4}} + \sqrt{9-x} \geq 0$

Solución

$\sqrt[4]{\dfrac{x||x|-|-12}{|x+2|+1} - \dfrac{||1-x|-3|}{|x-1|+4}} + \sqrt{9-x} \geq 0$, entonces

$$\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} - \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \geq 0 \quad \wedge \quad 9-x \geq 0$$

$$\frac{x||x-1|-12}{|x+2|+1} \geq \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \quad \wedge \quad 9-x \geq 0$$

además como $\dfrac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \geq 0$, entonces:

$$\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} > \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 9 \text{ de donde}$$

$$\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 9 \text{ como } |x+2|+1>0 \text{ entonces}$$

$x\,|\,x-1\,|-12 \geq 0 \;\wedge\; x \leq 9$ **... (1)**

Por definición: $|\,x\,| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, entonces

si $x < 0 \Rightarrow x\,|-x-1\,|-12 \geq 0 \Rightarrow x\,|\,x+1\,|-12 \geq 0$

como $|\,x+1\,| = \begin{cases} x+1\;, & x \geq -1 \\ -x-1\;, & x < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \langle -\infty,0\rangle = \langle -\infty,-1\rangle \cup [-1,0\rangle$

si $x \in \langle -\infty,-1\rangle \Rightarrow |\,x+1\,| = -x-1$ como

$x\,|\,x+1\,|-12 \geq 0 \Rightarrow -x^2-x-12 \geq 0 \Rightarrow x^2+x+12 \leq 0$

$\Rightarrow \nexists\; x \in R$, tal que $x^2+x+12 \leq 0$; por lo tanto ϕ

si $x \in [-1,0\rangle \Rightarrow |\,x+1\,| = x+1 \Rightarrow x(x+1)-12 \geq 0$

$x^2+x-12 \geq 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) \geq 0$



Luego $x \in [-1,0\rangle \wedge \langle -\infty,-4] \cup [3,+\infty\rangle = \phi$

Ahora si $x \geq 0 \Rightarrow x\,|\,x-1\,|-12 \geq 0 \;\wedge\; x \leq 9$

$\Rightarrow x(x-1)-12 \geq 0 \;\wedge\; x \leq 9$

$\Rightarrow x^2-x-12 \geq 0 \;\wedge\; x \leq 9 \Rightarrow (x-4)(x+3) \geq 0 \;\wedge\; x \leq 9$



$x \in \langle -\infty,-3] \cup [4,+\infty\rangle \cap x \leq 9$

$x \in \langle -\infty,-3] \cup [4,9]$

$\therefore$ como $x \geq 0 \cap x \in (\langle -\infty,-3] \cup [4,9])$ $\boxed{\therefore x \in [4,9]}$

40 $|\frac{1}{x+1}| < |\frac{x}{x^2+2x+1}|$

Solución

$$|\frac{1}{x+1}| < |\frac{x}{x^2+2x+1}| \Leftrightarrow \frac{1}{|x+1|} < \frac{|x|}{|x+1|^2}$$

$\frac{1}{|x+1|} < \frac{|x|}{|x+1|^2}$ para $x \neq -1 \Rightarrow 1 < \frac{|x|}{|x+1|}$ de donde

$|x+1| < |x|$ para $x \neq -1 \Rightarrow x^2+2x+1 < x^2$, $x \neq -1$

$2x+1 < 0$, $x \neq -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$, $x \neq -1$

$$\therefore\ x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, -\frac{1}{2} \rangle$$

41 $|\frac{x+1}{x+3}|^2 - 2|\frac{x+1}{x+3}| > 0$

Solución

Completando cuadrados se tiene: $|\frac{x+1}{x+3}|^2 - 2|\frac{x+1}{x+3}| + 1 > 1$ de donde

$$(|\frac{x+1}{x+3}|-1)^2 > 1 \Leftrightarrow |\frac{x+1}{x+3}|-1 > 1 \quad \text{v} \quad |\frac{x+1}{x+3}|-1 < -1$$

$$\Leftrightarrow |\frac{x+1}{x+3}| > 2 \quad \text{v} \quad |\frac{x+1}{x+3}| < 0$$

$$\Rightarrow |\frac{x+1}{x+3}| > 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x+3} > 2 \quad \text{v} \quad \frac{x+1}{x+3} < -2$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+3} - 2 > 0 \quad \text{v} \quad \frac{x+1}{x+3} + 2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+5}{x+3} < 0 \quad \text{v} \quad \frac{3x+7}{x+3} < 0$$

+ -5 - -3 + U + -3 - -7/3 +

$$x \in <-5,-3> \cup <-3,-\frac{7}{3}>$$

42 $[|\frac{5-3x}{x}|] = 2$

Solución

$[|\frac{5-3x}{x}|] = 2 \iff 2 \le \frac{5-3x}{x} < 3$

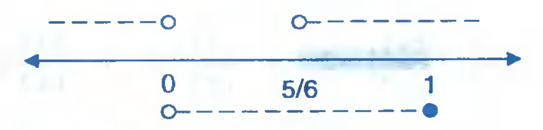
$2 \le \frac{5-3x}{x} < 3 \iff 2 \le \frac{5-3x}{x} \quad \wedge \quad \frac{5-3x}{x} < 3$

$\iff 2 - \frac{5-3x}{x} \le 0 \quad \wedge \quad \frac{5-3x}{x} - 3 < 0$

$\iff \frac{5x-5}{x} \le 0 \quad \wedge \quad \frac{6x-5}{x} > 0$

+ 0 - 1 + U + 0 - 5/6 +

$x \in <0,1] \cap x \in <-\infty,0> \cup <\frac{5}{6},+\infty>$



La solución es: $x \in <\frac{5}{6},1]$

43 $[|\frac{x}{2\sqrt{x}-1}|] = 0$

Solución

$$[|\frac{x}{2\sqrt{x}-1}|]=0 \iff 0\le \frac{x}{2\sqrt{x}-1}<1$$

$$0\le \frac{x}{2\sqrt{x}-1}<1 \iff 0\le \frac{x}{2\sqrt{x}-1} \quad \wedge \quad \frac{x}{2\sqrt{x}-1}<1 \qquad \ldots (1)$$

la expresión esta definida para $2\sqrt{x}-1\neq 0$, $x\ge 0$

$$2\sqrt{x}\neq 1 \Rightarrow 4x\neq 1 \Rightarrow x\neq \frac{1}{4}$$

Por lo tanto analizaremos en: $[0,\frac{1}{4}>\cup<\frac{1}{4},+\infty>$

si $x>\frac{1}{4}$ entonces en **(1)** se tiene: $x\ge 0 \quad \wedge \quad x<2\sqrt{x}-1$

$$x\ge 0 \quad \wedge \quad x-2\sqrt{x}+1<0$$

$$x\ge 0 \quad \wedge \quad (\sqrt{x}-1)^2<0 \Rightarrow x\notin \phi$$

si $0\le x<\frac{1}{4} \Rightarrow x\le 0 \quad \wedge \quad x>2\sqrt{x}-1 \Rightarrow x\le 0 \quad \wedge \quad (\sqrt{x}-1)^2\ge 0$

$$\Rightarrow x\le 0 \wedge x\ge 0 \qquad \therefore\ x=0$$

44 $[|-x|]>0$

Solución

$[|-x|]>0 \Rightarrow [|-x|]\ge 1 \iff -x\ge 1$

como $-x\ge 1 \Rightarrow x\le -1 \Rightarrow x\in <-\infty,-1]$

45 $[|-x|]<0$

Solución

$[|-x|]<0 \iff -x<0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x\in <0,+\infty>$

46 $[|\,2x-1\,|]=-3$

Solución

$[|\,2x-1\,|]=-3 \iff -3 \le 2x-1 < -2$

$\iff -2 \le 2x < -1$

$\iff -1 \le x < -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in [-1,-\frac{1}{2}>$

47 $[|\,\sqrt{x}+1\,|]=-1$

Solución

$[|\,\sqrt{x}+1\,|]=-1 \iff -1 \le \sqrt{x}+1 < 0$. La solución es ϕ puesto que $\sqrt{x}+1>0$

48 $[|\,x^2-2x-8\,|]=\frac{1}{2}$

Solución

Como $\frac{1}{2} \notin Z \Rightarrow$ no tiene solución.

49 $[|\,\sqrt{x-[|\,x\,|]}\,|]=0$

Solución

$[|\,\sqrt{x-[|\,x\,|]}\,|]=0 \iff 0 \le \sqrt{x-[|\,x\,|]} < 1$

$\iff 0 \le x-[|\,x\,|] < 1$

$\iff [|\,x\,|] \le x < [|\,x\,|]+1,\ \forall\, x \in R$

50 $[|\,x^2\,|] \le 15$

Solución

$[|\,x^2\,|] \le 15 \Rightarrow [|\,x^2\,|] < 16 \Rightarrow x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4$

$\therefore\ x \in <-4,4>$

(51) $[\![x^2-2x-3]\!]=0$

Solución

$[\![x^2-2x-3]\!]=0 \iff 0\le x^2-2x-3<1$

$0\le x^2-2x-3<1 \iff 0\le x^2-2x-3 \ \wedge \ x^2-2x-3<1$

$\iff (x-3)(x+1)\ge 0 \ \wedge \ (x-1)^2<5$

+ -1 - 3 + $\wedge \quad -\sqrt{5}+1<x<\sqrt{5}+1$

$\iff x\in \langle -\infty,-1] \cup [3,+\infty\rangle \cap x\in \langle 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\rangle$

$1-\sqrt{5}$ -1 3 $1+\sqrt{5}$

$\therefore \ x\in \langle 1-\sqrt{5},-1] \cup [3,1+\sqrt{5}\rangle$

(52) $\dfrac{x}{[\![-x]\!]}<0$

Solución

$\dfrac{x}{[\![-x]\!]}<0 \iff (x>0 \ \wedge \ [\![-x]\!]<0) \ \vee \ (x<0 \ \wedge \ [\![-x]\!]>0)$

$\iff (x>0 \ \wedge \ x>0) \ \vee \ (x<0 \ \wedge \ x\le -1)$

$\iff (x>0 \ \vee \ x\le -1)$

$\iff x\in \langle -\infty,-1] \cup \langle 0,+\infty\rangle$

(53) $\dfrac{x+|x|}{|x|-[\![|x|]\!]}\le 2$

Solución

Se conoce que $|x|=\begin{cases} x \ , & x\ge 0 \\ -x \ , & x<0 \end{cases}$

i) si x > 0 $\Rightarrow \frac{2x}{x-[|x|]} \le 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-[|x|]} \le 1$

$$\frac{x}{x-[|x|]} - 1 \le 0 \Rightarrow \frac{x-x+[|x|]}{x-[|x|]} \le 0 \Rightarrow \frac{[|x|]}{x-[|x|]} \le 0$$

$$\frac{[|x|]}{x-[|x|]} \le 0 \Leftrightarrow ([|x|] \ge 0 \ \wedge \ x-[|x|] \le 0) \ \vee \ ([|x|] \le 0 \ \wedge \ x-[|x|] \ge 0)$$

$$\Leftrightarrow ([|x|] \ge 0 \ \wedge \ x \le [|x|]) \ \vee \ ([|x|] \le 0 \ \wedge \ [|x|] \ge x)$$

$$\Leftrightarrow (x \ge 0 \ \wedge \ x \in Z_0^+) \ \vee \ (x < 1 \ \wedge \ x \in R)$$

$$\Leftrightarrow (x \in Z_0^+) \ \vee \ (x < 1)$$

$\Leftrightarrow$ x ∈ <-∞,1> $\qquad$ ∴ x ∈ <0,+∞> ∩ (<-∞,1>) = <0,1>

ii) Si x < 0, $x \in Z^-$ $\Rightarrow$ | x | = -x

$\frac{0}{-x-[|x|]} \le 2 \Rightarrow 0 \le 2 \Rightarrow$ x < 0, $x \in Z^-$ $\qquad$ ∴ x ∈ Z^-

∴ x ∈ Z^- ∪ <0,1>

(54) Demostrar que ∀ x ∈ R; $|x| \ge \sqrt[3]{[|x^3|]}$

Solución

Por propiedad: ∀ x ∈ R, $[|x|] \le x < [|x|]+1$

Si x ∈ R $\Rightarrow x^3 \in R$,

Luego ∀ $x^3 \in R$: $[|x^3|] \le x^3 < [|x^3|]+1 \Rightarrow [|x^3|] \le x^3$ ... (1)

además ∀ x ∈ R: $x \le |x| \Rightarrow x^3 \le |x^3|$ ... (2)

Luego (2) en (1) se tiene: ∀ x ∈ R, $[|x^3|] \le x^3 \le |x|^3$. $\Rightarrow [|x^3|] \le |x|^3$

$\sqrt[3]{[|x^3|]} \le |x| \Rightarrow |x| \ge \sqrt[3]{[|x^3|]}$, ∀ x ∈ R

(55) $[\![x[\![x]\!]]\!] = x$

Solución

Se conoce que $[\![x]\!] \in Z$ entonces como $[\![x[\![x]\!]]\!] = x \in Z$

Es decir $x \in Z \Rightarrow [\![x]\!] = x \in Z \Rightarrow x[\![x]\!] \in Z$

Luego: $[\![x[\![x]\!]]\!] = x \Rightarrow [\![x.x]\!] = x$

$[\![x^2]\!] = x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$

por lo tanto $[\![x[\![x]\!]]\!] = x \Rightarrow$ $\boxed{x \in \{0,1\}}$


(56) $[\![|x| + 1]\!] < 2$

Solución

Aplicando la propiedad $[\![x + n]\!] = n + [\![x]\!]$, $n \in Z$

$[\![|x| + 1]\!] < 2 \Rightarrow [\![|x|]\!] + 1 < 2 \Rightarrow [\![|x|]\!] < 1$

como $[\![|x|]\!] < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$


$\therefore x \in <-1,1>$


(57) $[\![\frac{3x+1}{3x-2}]\!] \le 3$

Solución

Aplicando la propiedad $[\![x]\!] \le a \Rightarrow x < a + 1$

$$[\![\frac{3x+1}{3x-2}]\!] \le 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{3x-2} < 4 \Rightarrow \frac{3x+1}{3x-2} - 4 < 0$$

$$\frac{3x+1-4(3x-2)}{3x-2} < 0 \Rightarrow \frac{3x+1-12x+8}{3x-2} < 0$$

$\frac{-9x+9}{3x-2} < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{3x-2} > 0$, aplicando el criterio de los puntos críticos.



Como la inecuación es $\frac{x-1}{3x-2} > 0$, entonces la solución es: $x \in <-\infty, \frac{2}{3}> \cup <1, +\infty>$

(58) $[| x^2 - 2x - 2 |] < 13$

Solución

Por la propiedad: si $[| x |] < a \Rightarrow x < a$

$[| x^2 - 2x - 2 |] < 13 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 < 13 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 16$

$(x-1)^2 < 16 \Rightarrow -4 < x - 1 < 4 \Rightarrow -3 < x < 5$

$\therefore\ x \in <-3,5>$

(59) $2[| x+1 |]^2 - 11[| x |] \leq -4$

Solución

Como $[| x+1 |] = [| x |] + 1$ entonces: $2([| x |] + 1)^2 - 11[| x |] \leq -4$ desarrollando

$2[| x |]^2 + 4[| x |] + 2 - 11[| x |] \leq -4$

$2[| x |]^2 - 7[| x |] + 6 \leq 0 \Rightarrow (2[| x |] - 3)([| x |] - 2) \leq 0$

+ - +
3/2 2

como $(2[| x |] - 3)([| x |] - 2) \leq 0$ entonces: $[| x |] \in [\frac{3}{2}, 2] \Rightarrow [| x |] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$

$\therefore\ x \in [2,3>$

(60) $[| 2x - | x | |] = x$

Solución

Se sabe por propiedad que si $[| a |] \in Z \ \wedge \ [| a |] = a \Rightarrow a \in Z$

Luego como $[| 2x - | x | |] = x \Rightarrow x \in Z \Rightarrow 2x - | x | = x$

De donde $| x | = x \Rightarrow x \in Z_0^+$

$\therefore$ La solución es $\{0,1,2,\ldots,n\}$

(61) $|\,[|\frac{1}{2x}|]-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,|<\sqrt{x}$

Solución

Calculando los valores de x en donde la expresión esta definida, es decir:

$\frac{x-1}{x}\geq 0 \quad \wedge \quad x\geq 0$ de donde $x\in[1,+\infty>$

ahora calcularemos $[|\frac{1}{2x}|]$ cuando $x\in[1,+\infty>$

como $x\in[1,+\infty> \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow 2x\geq 2$ invirtiendo

$0<\frac{1}{2x}\leq\frac{1}{2} \Rightarrow [|\frac{1}{2x}|]=0$, por lo tanto:

$|\,[|\frac{1}{2x}|]-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,|<\sqrt{x} \Rightarrow |0-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,|<\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}}<\sqrt{x}$

como $\sqrt{\frac{x-1}{x}}<\sqrt{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x}<x \Rightarrow x^2-x+1>0$

como $x^2-x+1>0,\ \forall x\in R$ entonces para $x\in[1,+\infty>$, $x^2-x+1>0$

Por lo tanto la solución es: $x\in[1,+\infty>$


(62) $\log_{1/3}(2x+5)<-2$

Solución

Aplicando la propiedad: $\log_a x<b$ sí $0<a<1 \Leftrightarrow x>a^b$

$\log_{1/3}(2x+5)<-2 \Leftrightarrow 2x+5>(\frac{1}{3})^{-2}$

$2x+5>9 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2 \Rightarrow$ $x\in\,<2,+\infty>$

(63) $\log_2(3x+2)-\log_2(1-2x)>2$

Solución

$\log_a x > b$, $a > 1 \iff x > a^b \wedge x > 0$

$$\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{3x+2}{1-2x}\right) > 2$$

$$\log_2\left(\frac{3x+2}{1-2x}\right) > 2 \iff \frac{3x+2}{1-2x} > 0 \quad \wedge \quad \frac{3x+2}{1-2x} > 2^2$$

$$\iff \frac{3x+2}{2x-1} < 0 \quad \wedge \quad \frac{3x+2}{1-2x} - 4 > 0$$

$$\iff \frac{3x+2}{2x-1} < 0 \quad \wedge \quad \frac{11x-2}{2x-1} < 0$$

+ 2/3 - 1/2 + $\wedge$ + 2/11 - 1/2 +

$x \in \left< -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right> \quad \wedge \quad x \in \left< \frac{2}{11}, \frac{1}{2} \right>$

$\therefore \ x \in \left< \frac{2}{11}, \frac{1}{2} \right>$


64 $\log_{1/5}(2x^2 - 3x + 5) < \log_{1/5}(x^2 + 2x + 1)$

Solución

$\log_a P(x) < \log_a Q(x) \iff P(x) > Q(x) \wedge (P(x) > 0 \wedge Q(x) > 0)$, $0 < a < 1$

$$\log_{1/5}(2x^2 - 3x + 5) < \log_{1/5}(x^2 + 2x + 1), \quad 0 < \frac{1}{5} < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 - x + 5 > x^2 + 2x + 1 \quad \wedge \quad (2x^2 - 3x + 5 > 0 \ \wedge \ x^2 + 2x + 1 > 0)$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \ \wedge \ x \neq -1$$

$(x-4)(x-1)>0 \;\cap\; x\neq -1$

+   1   -   4   +

$x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle \quad x\neq -1$

$\therefore\; x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle -1,1\rangle \cup \langle 4,+\infty\rangle$


65 $\quad \log_x\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)>1$

Solución

La variable x debe cumplir $x>0 \;\wedge\; \dfrac{x+3}{x-1}>0$



Como $x>1$ aplicamos la propiedad: $\log_x\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)>1 \;\Rightarrow\; \dfrac{x+3}{x-1}>x^1=x$

$$\frac{x+3}{x-1}>x \;\Rightarrow\; \frac{x+3}{x-1}-x>0 \;\Rightarrow\; \frac{x+3-x^2+x}{x-1}>0$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x-1}<0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-3)(x+1)}{x-1}<0$$

-   -1   +   1   -   3   +

$x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle$

La solución es: $x \in \langle 1,+\infty\rangle \cap (\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle)$ $\quad\therefore\; x \in \langle 1,3\rangle$


66 $\quad$ Hallar el menor de los números M tales que: $\left|\dfrac{x-9}{x-6}\right| \le M$, sí $x \in [2,5]$

Solución

$\dfrac{x-9}{x-6}=1-\dfrac{3}{x-6}$, como $x\in[2,5] \Rightarrow 2\le x\le 5$

$$-4\le x-6\le -1 \;\Rightarrow\; -1\le \frac{1}{x-6}\le -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \le -\frac{1}{x-6} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}+1 \le \frac{x-9}{x-6} \le 2$$

$$\frac{5}{4} \le |\frac{x-9}{x-6}| \le 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 2}$$

(67) Hallar el mayor número M de tal manera que: $\frac{|x^2+6x+14|}{x^3+27} \ge M$, si $x \in [-2,2]$

Solución

$x^2+6x+14 = (x+3)^2+5$ entonces: si $x \in [-2,2] \Rightarrow -2 \le x \le 2$

$1 \le x+3 \le 5 \Rightarrow 1 \le (x+3)^2 \le 25$ de donde $6 \le (x+3)^2+5 \le 30$

$6 \le x^2+6x+14 \le 30$ ... (1)

como $x \in [-2,2] \Rightarrow -2 \le x \le 2 \Rightarrow -8 \le x^3 \le 8$

$$19 \le x^3+27 \le 35 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{35} \le \frac{1}{x^3+27} \le \frac{1}{19}$$ ... (2)

de (1) y (2) se tiene: $\frac{6}{35} \le \frac{x^2+6x+14}{x^3+27} \le \frac{30}{19}$

$$\therefore \frac{|x^2+6x+6|}{x^3+27} \ge \frac{6}{35} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{6}{35}}$$

(68) Hallar el número mayor de m y el número M tal que para todo $x \in [\frac{1}{2},1]$ se cumple: $m \le \frac{x+2}{x+3} \le M$

Solución

A la expresión $\frac{x+2}{x+3}$ escribiremos en la forma: $\frac{x+2}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$

como $x \in [\frac{1}{2},1] \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 1$ sumando 3

$\frac{7}{2} \le x+3 \le 4$, invirtiendo $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+3} \le \frac{2}{7}$, multiplicando por - 1

$-\frac{2}{7} \le -\frac{1}{x+3} \le -\frac{1}{4}$ sumando 1

$1-\frac{2}{7} \le 1-\frac{1}{x+3} \le 1-\frac{1}{4}$ entonces $\frac{5}{7} \le \frac{x+2}{x+3} \le \frac{3}{4}$

de donde $m=\frac{5}{7}$ y $M=\frac{3}{4}$

3.41. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I Hallar los valores de x que satisfacen a las siguientes ecuaciones.

1. $|2x+3|+4=5x$ **Rpta.** $x=\frac{7}{3}$

2. $|3x-1|=2x+5$ **Rpta.** $\{-\frac{4}{5},6\}$

3. $|\frac{x^2}{x-1}|=\frac{|x^2-16|}{x+4}$ **Rpta.** $\{\frac{4}{5}\}$

4. $|\frac{x}{x-1}|=\frac{4}{x}$ **Rpta.** $\{2,-2+2\sqrt{2}\}$

5. $(x-4)^2-2|x-4|-15=0$ **Rpta.** $\{-1,9\}$

6. $|2x+9|=x-1$ **Rpta.** ϕ

7. $|x^2-3x-7|=3$ **Rpta.** $\{-1,-2,4,5\}$

8. $|\frac{x+8}{x+4}|=3$ **Rpta.** $\{-5,-2\}$

9. $|3x+1|=7-x$ **Rpta.** $\{-4,\frac{3}{2}\}$

(10) $|4-8x| = |x - |2x+1||$ **Rpta.** $\{\frac{5}{7},\frac{1}{3}\}$

(11) $|3x-5| + x - 7 = 0$ **Rpta.** $\{-1,3\}$

(12) $|5x-3| = |3x+5|$ **Rpta.** $\{-\frac{1}{4},4\}$

(13) $|2x-6| = |4-5x|$ **Rpta.** $\{-\frac{2}{3},\frac{10}{7}\}$

(14) $|6x+3| = |18+x|$ **Rpta.** $\{-3,3\}$

(15) $|3x-1| = |5x-15|$ **Rpta.** $\{2,7\}$

(16) $|5x+3| = 3x-1$ **Rpta.** ϕ

(17) $||x^2-1|-x| = x$ **Rpta.** $\{1,-1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\}$

(18) $|2x-3| + 2 = |x-6|$ **Rpta.** $\{-1.\frac{7}{3}\}$

(19) $|3x-1| - |x+2| = 1$ **Rpta.** $\{-\frac{1}{2},2\}$

(20) $|x-4|^2 - 5|x-4| + 6 = 0$ **Rpta.** $\{1,2.6,7\}$

(21) $2|x^2-2| + 5 = 6|2x^2-3|$ **Rpta.** $\{\pm\sqrt{2},\ \pm 2\}$

(22) $|6x+3| = |18+x|$ **Rpta.** $\{-3.3\}$

(23) $3||x+1|-4|^2 - 5||x+1|-4| = 2$ **Rpta.** $\{-7,-3,1,5\}$

(24) $||x|-3| = |3x+2|$ **Rpta.** $\{-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\}$

(25) $||x+2|-1|^2 - 5||x+2|-1| - 6 = 0$ **Rpta.** $\{-9,5\}$

(26) $|2x-3| - 1 = |x-3|$ **Rpta.** $\{-1,\frac{7}{3}\}$

(27) $||x^2-5x+15|-x^2+8|=3x+9$ **Rpta.** $\{\frac{7}{4},16\}$

(28) $|x+1|+2|x-2|=|x-8|$ **Rpta.** $\{-\frac{5}{2},\frac{11}{4}\}$

(29) $3|x+1|-2|x-2|=2x-1$ **Rpta.** $\{\frac{2}{7},8\}$

(30) $2||x-5|+2|^2-11||x-5|-2|+12=0$ **Rpta.** $\{3,7\}$

II. Hallar el valor de las siguientes expresiones:

(31) $\frac{|12+5x|-|12-4x|}{x}$ sí $x \in \langle 1,3\rangle$ **Rpta.** 9

(32) $\frac{|7x+10|-|5x-10|}{2x}$ sí $x \in \langle 0,1\rangle$ **Rpta.** 6

(33) $\frac{|9x+8|-|2x-8|}{x}$ sí $x \in \langle 1,2\rangle$ **Rpta.** 11

(34) $\frac{|2x+3|-|3-x|}{x}$ sí $x \in \langle 0,1\rangle$ **Rpta.** 3

(35) $\frac{|6x+4|+2|2-3x|}{12x}$ si $x \in \langle 2,3]$ **Rpta.** 1

(36) $\frac{|6x+32|-4|8-x|}{5x}$ sí $x \in \langle -3,-2\rangle$ **Rpta.** 2

(37) $\frac{|4x+1|-|x-1|}{x}$ sí $x \in \langle 0,1\rangle$ **Rpta.** 5

(38) $\frac{|7x+2|-|3x+2|}{x}$ sí $x \in \langle 0,3\rangle$ **Rpta.** 4

(39) $\frac{3|3x-8|-|3x+24|}{2x}$ si $x \in \langle -5,-4\rangle$ **Rpta.** -6

(40) $\frac{|5x+4|-|4+4x|}{x}$ si $x \in <0,3>$ **Rpta.** 1

III. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones.

(41) $|\frac{x+2}{2x-3}| < 4$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{10}{9}> \cup <2,+\infty>$

(42) $|\frac{6-5x}{3+x}| \le \frac{1}{2}$ **Rpta.** $[\frac{9}{11},\frac{5}{3}]$

(43) $|4+\frac{1}{x}| < 5$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{1}{9}> \cup <1,+\infty>$

(44) $|x+\frac{8}{x}| \le 6$ **Rpta.** [-4,-2] ∪ [2,4]

(45) $|\frac{x^2+3x+11}{x-2}| \le 3$ **Rpta.** [-5,-1]

(46) $|5-\frac{1}{x}| < 1$ **Rpta.** $<\frac{1}{6},\frac{1}{4}>$

(47) $|x+\frac{1}{x}| \le 6$ **Rpta.** $[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}] \cup [3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$

(48) $|\frac{3-2x}{2+x}| < 4$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{11}{2}> \cup <-\frac{5}{6},\infty>$

(49) $|\frac{x+3}{6-3x}| \le 2$ **Rpta.** $<-\frac{3}{2},-1> \cup <-1,-\frac{3}{4}>$

(50) $|\frac{2x}{x+1}| > 6$ **Rpta.** $<-\frac{3}{2},-1> \cup <-1,-\frac{3}{4}>$

(51) $|\frac{x-1}{x}| > 1$ **Rpta.** $<-\infty,0> \cup <0,\frac{1}{2}>$

(52) $\frac{4-|4-x|}{|x|+4} < 0$ **Rpta.** <-1,0]

(53) $\left|\frac{6x-4}{3+x}\right| \geq \frac{1}{2}$ **Rpta.** $<-\infty,-3> \cup <-3,\frac{5}{13}] \cup [1,\infty>$

(54) $\left|\frac{2x-5}{4-x}\right| \geq 1$ **Rpta.** $<-\infty,1] \cup [3,4> \cup <4,\infty>$

(55) $\left|\frac{x+3}{6-2x}\right| \geq \frac{1}{2}$ **Rpta.** $[0,3> \cup <3,\infty>$

(56) $\left|\frac{3x^2-1}{x-2}\right| > -6$ **Rpta.** $<-\infty,2> \cup <2,\infty>$

(57) $|x^2-4| < -2x+4$ **Rpta.** $<-4,0>$

(58) $\left|\frac{x+3}{x+2}\right| < 5-x$ **Rpta.** $<-\infty,22-\sqrt{17}> \cup <-2,1+2\sqrt{2}>$

(59) $\frac{|3x-1|+2x}{|x+1|-3x} \geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{1}{3}>$

(60) $|x-2| \leq 2x$ **Rpta.** $[\frac{2}{3},\infty>$

(61) $\frac{|3x-1|+2x}{|x+1|-3x} \geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{1}{3}>$

(62) $|3x-9| < x+1$ **Rpta.** $<2,5>$

(63) $\left|\frac{x-2}{x+4}\right| \leq \frac{x+3}{x-6}$ **Rpta.** $<6,\infty>$

(64) $|x^2+3x|+x^2-2>0$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2},\infty>$

(65) $\left|\frac{x+3}{x+16}\right| > \frac{3}{x-4}$ **Rpta.** $<-\infty,4>$

(66) $|4x^2-8x+4| \leq 4x+10$ **Rpta.** $[\frac{3-\sqrt{15}}{2},\frac{3+\sqrt{15}}{2}>$

(67) $|x+5| > 2x-3$ **Rpta.** $<-\infty,8>$

(68) a) $\frac{|2x-1|+1}{x^2-2x-3} \le 0$ **Rpta.** $<-1,3>$

b) $|4x-3| > x+2$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{1}{5}> \cup <5,\infty>$

(69) $|x^2-4| > -2x+4$ **Rpta.** $<-\infty,-4> \cup <0,2> \cup <2,\infty>$

(70) $|2x+1| \ge 2+x$ **Rpta.** $<-\infty,-1] \cup [1,\infty>$

(71) $|4x+3| > x+2$ **Rpta.** $<-\infty,-1> \cup <-\frac{1}{3},\ \infty>$

(72) $|3x+8| \ge 8x-3$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{11}{5}]$

(73) Demostrar que:

a) Sí $|x| < 3 \Rightarrow \frac{1}{x-7} \in <-\frac{1}{4},-\frac{1}{10}>$

b) Sí $|x-3| < 1 \Rightarrow \frac{9}{5} < \frac{x+5}{x+1} < \frac{7}{3}$

c) Sí $|x| < 2 \Rightarrow |\frac{x-3}{x+4}| < \frac{5}{2}$

d) Sí $|x| < 1 \Rightarrow |\frac{x+1}{x-2}| < 2$

e) Sí $|x-3| < 1 \Rightarrow |\frac{x+5}{x-1}| < 7$

f) Sí $|x-2| < 1 \Rightarrow |x^2-4| < 5$

g) Sí $|x| < 3 \Rightarrow |\frac{x-3}{x-4}| < \frac{3}{4}$

h) Sí $|x-4| < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x-2} < 1$

i) Sí $|x-3| < 1 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$

j) Sí $|x| < 1 \Rightarrow |\frac{x-2}{x+3}| < \frac{3}{2}$

k) Sí $|x-2| < \frac{1}{2} \Rightarrow |x^2-4| < \frac{9}{2}|x-2|$

l) Sí $|x-5| < 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-3} < 1$

(74) Sabiendo que: $b > 0$ y $|x-a| < 2b$ probar que: $\frac{1}{x-a+2b} \in <\frac{1}{5},1>$

(75) Demostrar que si x, a ∈ <-∞,-1] U [1, ∞> entonces: $|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}| \le |x-a|$

(76) $|\frac{x}{2}|^2 + 3|\frac{x}{2}| \le \frac{7}{4}$ **Rpta.** $-1 \le x \le 1$

(77) $||x|+2| \le |x^2|$ **Rpta.** $<-\infty,-2] \cup [2,\infty>$

(78) $|x-2|^2 - 3|x-2| - 4 < 0$ **Rpta.** <-2,6>

(79) $|x-1|^2 + 2|x-1| - 3 < 0$ **Rpta.** <0,2>

(80) $|x-2|^2 - 2|x-2| - 15 > 0$ **Rpta.** <-3,7>

(81) $|x|^2 + |x| < \frac{15}{4}$ **Rpta.** $<-\frac{3}{2},\frac{3}{2}>$

(82) $2 \le |x|^2 + |x|$ **Rpta.** $<-\infty,-1] \cup [1,\infty>$

(83) $|x^3-1|^2 - |x^3-1| - 3 \le 0$ **Rpta.** $[\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2}]$

(84) $|x-3|^2 - 3|x-3| - 18 > 0$ **Rpta.** $<-\infty,-3> \cup <9,\infty>$

(85) $|x-1|^2 + 5|x-1| - 36 > 0$ **Rpta.** $<-\infty,-3> \cup <5,+\infty>$

(86) $2|x+1| - 3|x-2| + |x-5| \ge x+2$ **Rpta.** $<-\infty,-5> \cup [1,\frac{11}{3}]$

(87) $|x-1| > |x| - 2$ **Rpta.** R

(88) $|x-3| + 2|x| < 5$ **Rpta.** $<-\frac{2}{3},2>$

(89) $x^2 + 2|x+3| - 10 < 0$ **Rpta.** $[1-\sqrt{17},-1+\sqrt{5}]$

(90) $|2x-5| - |x-2| + |x|^2 \ge 7$ **Rpta.** $<-\infty,-\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{2},+\infty>$

(91) $x^2-|3x+2|+x\geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-2-\sqrt{2}]\cup[1+\sqrt{3},+\infty>$

(92) $|3x-2|<|x+6|$ **Rpta.** $<-1,4>$

(93) $|x+2|<|x|^2$ **Rpta.** $<-\infty,-1>\cup<2,+\infty>$

(94) $|3x^2-2x+1|>3|x^2+x-7|$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{1+\sqrt{481}}{12}>\cup<\frac{1-\sqrt{481}}{12},\frac{22}{5}>$

(95) $|x-1|+|x+1|<4$ **Rpta.** $<-2,2>$

(96) $|2x^2-4x-6|\geq|2x^2-3x-9|$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{5}{4}]$

(97) $|x+6|>|x+9|+|x-2|$ **Rpta.** ϕ

(98) $|4x+2|\geq|x-1|+3|x+1|$ **Rpta.** $[\frac{1+\sqrt{13}}{2},\infty>$

(99) $|3x^3-2x^2-7x-2|>|x^3+6x^2-9x-14|$ **Rpta.** $<-\infty,-2>\cup<3,\infty>$

(100) $|10-3x+x^2|\leq|x^2+x-6|$ **Rpta.** $[4,\infty>$

(101) $|2x^2+x-1|<|2x^2-x-1|$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}>\cup<0,\frac{1}{\sqrt{2}}>$

(102) $|x-6|-|x-3|\leq|x-1|$ **Rpta.** $<-\infty,-2]\cup[\frac{10}{3},+\infty>$

(103) $(|x-1|+|x-2|)(|1-x|-|x-2|)\leq x^2-6$ **Rpta.** $<-\infty,-1]\cup[3,\infty>$

(104) $|\frac{1}{6-3x}|\leq\frac{2}{|x+3|}$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{15}{7}-\frac{3\sqrt{30}}{35}]\cup[\frac{25}{7},\frac{3\sqrt{30}}{35}]$

(105) $|\frac{x}{x-3}|\leq\frac{x+12}{4}$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{3\sqrt{33}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{33}-3}{2},3>\cup<3,4]$

(106) $2x+1<\frac{3}{|x+2|}$ **Rpta.** $<-\infty,-2>\cup<-2,\frac{-5+\sqrt{33}}{4}>$

(107) $\frac{3}{|2x-3|} \le \frac{5}{x^2+x+1}$ **Rpta.** $[\frac{13+5\sqrt{13}}{2}, \frac{-13+5\sqrt{13}}{2}]$

(108) $|\frac{x}{1-|x|}| > \frac{1}{x}$ **Rpta.** $<-\infty,-1> \cup <-1,0> \cup <\frac{\sqrt{5}-1}{2},1> \cup <1,+\infty>$

(109) $\frac{|x^2-2x-48|(|x^2-2x|-|x-12|)}{|x-2|-6} \le 0$ **Rpta.** $\{-6\} \cup <-4,-3] \cup [4, \infty>$

(110) $\frac{2-|2-x|-x}{|x-x^2|-2} < 0$ **Rpta.** $<2, \infty>$

(111) $\frac{|x|}{1+|x|} \ge \frac{1}{x}$ **Rpta.** $<-\infty,0> \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty>$

(112) $|\frac{5}{2x-1}| \ge |\frac{x}{x-2}|$ **Rpta.** $[-1-\sqrt{6},\frac{1}{2}> \cup <\frac{1}{2},-1+\sqrt{6}> \cup <2,\infty>$

(113) $|\frac{x}{x-2}| \ge |x+3|$ **Rpta.** $[-1-\sqrt{7},-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{7},2> \cup [\sqrt{6},+\infty>$

(114) $\frac{x+1}{|x^2+1|} < \frac{1}{x}$ **Rpta.** $<0,1>$

(115) $\frac{|x^2-16|}{x+4} \le \frac{x^2}{|x-1|}$ **Rpta.** $<-\infty,-4> \cup [\frac{4}{5},1> \cup <1,+\infty>$

(116) $\frac{|2x^2+10x|}{|4x|} \le 3x$ **Rpta.** $[1,+\infty>$

(117) $\frac{x+4}{|x^2+4x+4|} > \frac{x-2}{x^2+4}$ **Rpta.** $R-\{-2\}$

(118) $\frac{1}{||x|+1|} > x-1$ **Rpta.** $<-\infty,\sqrt{2}>$

(119) $\frac{|4x^2-9|}{|2x+5|}\geq 0$ **Rpta.** $\forall\ x\in R-\{-\frac{5}{2}\}$

(120) $|x+1|-2|x|+3|x-2|<6$ **Rpta.** $<\frac{1}{4},\frac{11}{2}>$

(121) $\frac{3-|x^2-4x|}{|x-5|+x^2}\leq 0$ **Rpta.** $<-\infty,2-\sqrt{7}]\cup[1,3]\cup[2+\sqrt{7},+\infty>$

(122) $3|2x+6|-|x+\frac{5}{x}|\leq 6$ **Rpta.** $<-\infty,-3]\cup[-1,-\frac{5}{7}]\cup<0,\frac{-6+\sqrt{61}}{5}]$

(123) $|\frac{x^2-16}{x-3}|+\frac{8(x+4)}{9-x^2}\leq 0$ **Rpta.** $[-4,-3>\cup<3,5]$

(124) $|\frac{x-1}{x^2-4x+8}|\leq|\frac{1}{x-1}|$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{7}{2}]-\{1\}$

(125) $|\frac{x+2}{x}|\geq|\frac{1}{x-2}|$ **Rpta.** $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]-\{0\}$

(126) $\frac{2-|2-x|-x}{|x^2-x|-2}\geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-1>\cup<-1,2>$

(127) $\frac{|x|^3-4x^2+20}{|x|+1}\geq 4$ **Rpta.** $<-\infty,-4]\cup[-2,2]\cup[4,+\infty>$

(128) $\frac{|6x-x^2|-4}{4-|x|}>-1$ **Rpta.** $<-4,0>\cup<0,4>\cup<5,7>$

(129) $(|x+2|+|x-2|)(|1-x|-|2-x|)\geq x^2-6$ **Rpta.** $[-1,3]$

(130) $|x-1|-|x|+|2x-3|>x+2$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{2}{5}>\cup<6,+\infty>$

(131) $(\sqrt{|x-1|-3}-\sqrt{5-|x-4|})(\sqrt{|x-1|-3}+\sqrt{5-|x-4|})\leq|x|-6$ **Rpta.** $[4,7]$

132 $\dfrac{(|x|+2)(|x|-2)\sqrt{x^2+4}}{(|x^2+3|-4x)\sqrt{x^2+5}} \geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-2] \cup <1,2] \cup <3,+\infty>$

133 $\left|\dfrac{3|x|-x}{x+1}\right| < \dfrac{1}{x+1}$ **Rpta.** $<-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}>$

134 $\left|\dfrac{1-|x|}{x-3}\right| > 2$ **Rpta.** $<\dfrac{7}{3},5>-\{3\}$

135 $\dfrac{(x+3)(x-5)|x|}{|x|^2+2} < 0$ **Rpta.** $<-3,5> - \{0\}$

136 $\left|\dfrac{3x-x^2}{x+2}\right| \geq x$ **Rpta.** $<\infty,\dfrac{1}{2}]-\{-2\}$

137 $\dfrac{(x+3)(x-5)|x|}{|x|^2+2} \leq 0$ **Rpta.** $<-3,0> \cup <0,5>$

138 $(|x| - 1)(2x + 1)(|x| + 3) \geq 0$ **Rpta.** $[-1,-\dfrac{1}{2}]\cup[1,+\infty>$

139 $|6x^2+9x-3|<|2x^2-9x+2|$ **Rpta.** $<-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}>\cup<\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}>$

140 $|x^2-5|^2-|x^2-5|\leq 12$ **Rpta.** $[-3,-1] \cup [1,3]$

141 $(|x-2|+|x-3|)(|2-x|-|3-x|) \geq |x^2-1|$ **Rpta.** ϕ

142 $\dfrac{|x^2-2|+x}{x+2} \leq 3$ **Rpta.** $<-\infty,4] - \{-2\}$

143 $\dfrac{|x-6|-x+|x+2|}{x-2} < 3$ **Rpta.** $<-\infty,2>\cup<\dfrac{9}{2},+\infty>$

144 $\dfrac{|x-4|+|2x+3|}{|x-1|-1} \leq 2$ **Rpta.** $<0,2>$

145 $\dfrac{|x-5|+|x+1|}{x-1} \le 3$ **Rpta.** $<-\infty,1> \cup [3,+\infty>$

146 $\dfrac{|x-8|-x+|x+4|}{x+2} < 3$ **Rpta.** $<-\infty,-2> \cup <\dfrac{3}{2},+\infty>$

147 $\dfrac{|x|-3}{5-|x|} \ge \dfrac{2-|x|}{|x|+1}$ **Rpta.** $<-5,-\dfrac{13}{5}] \cup [\dfrac{13}{5},5>$

148 $(\sqrt{|x-1|-3}-\sqrt{5-|x-4|})(\sqrt{|x-1|-3}+\sqrt{5-|x-4|}) \le x-6$ **Rpta.** $[4,7]$

149 $(\sqrt{|x-2|-4}-\sqrt{6-|x-3|})(\sqrt{|x-2|-4}+\sqrt{6-|x-3|}) \le |x-2|-5$ **Rpta.** $[-3,-2] \cup [6,9]$

150 $\sqrt{\dfrac{|x+1|.||x-1|-2|}{|x-1|}-1}+\sqrt{\dfrac{x}{|x^2+4|}-\dfrac{x-3}{x^2+x+4}} \ge 0$

Rpta. $<-\infty,-3] \cup [\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{17}),3> \cup [\dfrac{1}{2}(3+\sqrt{17}),+\infty>$

151 $\sqrt{\dfrac{x||x+1|-2|-6}{|x-2|+5}-\dfrac{||x+3|-1|}{|x+1|+2}}+\sqrt{9-x} \ge 0$ **Rpta.** $[4,9]$

152 $\dfrac{|4-x|+|2x+3|}{|x-1|-1} \le 2$

153 $\dfrac{|x^2+2|(x^2+x-12)}{|x^2+x+1|} < 0$

154 $1 \le \dfrac{1}{|x|-1} \le 2$

155 $\dfrac{x^2-3x+|x-1|+4}{|x-1|+x^2+10x+27} \le 0$

156 $|x^2+2x+3|+|x^2-1| < 6$

157 $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{|x^2+\pi|(x^2-5x+6)} < 0$

158 $|x-1|-|x|+|2x-3| > x+2$

159 $\dfrac{(x^2-9)(x^2+x+1)}{|x^2+9|+3} \ge 0$

160 $\dfrac{x^2+3-|15+2x-x^2|}{|x^2-9|-8} < 0$

161 $\dfrac{|x^2-1|}{(x-2)(x-4)} < 1$

162 $\dfrac{|x+5|-4x+|x-2|}{|x^2+2|}>0$

163 $||x|-|2x+3||<||x|-|2x+2||$

164 $\dfrac{|x+2|-x^2}{|x+5|+8}<0$

165 $|x^2-4|+8>|x-2|+4x$

166 $\dfrac{|3x+2|\sqrt{x^2+5}}{-x^2+6x-3}>0$

167 $\dfrac{|3x^2+5x+2|}{x^2+5}\leq 0$

168 $\dfrac{|x-2|^2}{|x^2+4|}\leq\dfrac{x^2}{x(x+2)+2(x+3)}$

169 $|x-1|-|x+2|+|x+4|\leq 8$

170 $\dfrac{-2|x^2|+|x^2-x|+1}{x^2-5x+6}\leq 0$

171 $\dfrac{|x^2-16|}{x+4}\leq\dfrac{x^2+4}{|x-1|}$

172 $\dfrac{x^2+3-|x^2-2x-15|}{|9-x^2|-8x}<0$

173 $\dfrac{x^3-x^2+4x}{|x^2-3x+2|}\geq 0$

174 $1<\dfrac{x^2+|x|-3}{1+|x|}$

175 $4<\dfrac{(x+2)^2+|x+2|-2}{|x+2|+2}<25$

176 $\dfrac{|x-3|+7-x}{|x+3|-2}\geq 0$

177 $\dfrac{|2x-x^2|-3}{|x^2-2x-15|-x^2-3}\leq 0$

178 $\dfrac{|x|}{||x|-4|}\leq x-1$

179 $\dfrac{|x^2-x|-2|x^2\cos\pi|+1}{x^2-5x-6\cos\pi}\leq 0$

180 $\dfrac{1}{||x|+1|}>2x+1$

181 $\left|\dfrac{x-1}{x^2-4x+8}\right|\leq\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

182 $\left|\dfrac{1-|x|}{x-3}\right|>2$

183 $\dfrac{|x|-|2x-1|}{x(x-1)}>0$

184 $\dfrac{|x^2-1|+2x+|x|}{||x^2+1|+3|}\geq ||x^2+6|-3|$

185 $x^2+x+1-|x^3-1|>0$

186 $\frac{x-|x+1|-|x|}{||x|-1|} \le 0$

187 $\frac{|x^2+|3x||}{|x|} \le |x|-4$

188 $\frac{\sqrt{|x-3|-|x-1|}}{x^2-9} \le 0$

189 $\frac{|x-x^2|.(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-6x} \ge 0$

190 $\frac{|\sqrt{x}-8|-\sqrt{x}}{|x^2-4|} \ge 0$

191 $\frac{|16-x^2|-x^2}{x^2-|2-x|} > 0$

192 $\frac{|x^2+|3x||}{|x|} \le |x|-4$

193 $|\sqrt{x^2-6x+9}-3| > \sqrt{3-x}$

194 $x^2+x+1-|x^3-1| > 0$

195 $|x^2-5x+7| \ge x^2-1$

196 $\frac{3-|x^2-4x|}{|x-5|+x^2} < 0$

197 $(x^2-6x+8)\sqrt{12-|4-x^2|} < 0$

198 $\frac{||x-1|+2|-|x-1|^2}{x^2+2} \ge 0$

199 $\frac{(|4x-x^2|-5)\sqrt{x(x-1)(x-3)}}{|x|-1} \le 0$

200 $\frac{|x-4|}{4-|x|} > -1$

201 $|\frac{x^2-6x+7}{x-1}| < \frac{2}{x-1}$

202 $\frac{|x-3|^3+2(x-3)^2-5|x-3|-6}{(x-2)^2-2|x-2|-24} \le 0$

203 $\frac{|4-x|+|2x+3|}{|x-1|-1} \le 2$

204 $|\frac{4x}{3}-8| < |\frac{x}{3}-6|+|x-2|$

205 $\frac{|3x^2+5x+2|-4}{x^2+5} \ge 0$

206 $\frac{x^3-x^2+4x}{|x^2-3x+2|} \ge 0$

207 $\frac{x^2-16}{\sqrt{|x-4|-|x-1|}} \ge 0$

208 $\frac{|4x-x^2|-5}{|x|-1} \ge 0$

IV. Encontrar el menor número M con la propiedad de que para todo x ∈ R se cumple:

1. $2x - x^2 \leq M$ **Rpta.** M = 1
2. $1 - 4x - x^2 \leq M$ **Rpta.** M = 3
3. $2 - x^{2/3} - x^{1/3} \leq M$ **Rpta.** $M = \frac{9}{4}$
4. $2x^{2/3} - x^{4/3} \leq M$ **Rpta.** M = 1
5. $1 + 6x - x^2 \leq M$ **Rpta.** M = 10
6. $3 + 36x - 12x^2 \leq M$ **Rpta.** M = 30

V. Encontrar el número mayor M con la propiedad de que para todo x ∈ R se cumple:

1. $M \leq 3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$ **Rpta.** $M = \frac{55}{6}$
2. $M \leq x^{2/5} - x^{1/5} - 2$ **Rpta.** $M = -\frac{9}{4}$
3. $M \leq 9x^2 - 48x - 36$ **Rpta.** M = -100
4. $M \leq 5x^2 - 20x + 16$ **Rpta.** M = -4
5. Si 2x + 3 ∈ [7,11] encontrar el valor M que satisface a la siguiente desigualdad $\frac{x+5}{x-7} \leq M$ **Rpta.** $M = -\frac{7}{5}$
6. Si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ encontrar el mayor valor M que satisface a la desigualdad $M \leq \frac{x+2}{x-2}$

   Rpta. $-\frac{5}{3}$
7. Sí $\frac{1}{x} \in b[<-\infty, 1> U <2, +\infty>]$. Hallar el menor valor de M tal que $|\frac{x-1}{2x+5}| \leq M$

(8) Sí $|x-3|<1$. Hallar el número M tal que: $|\frac{x+5}{x+1}|<M$

(9) Hallar M tal que sí $|x|<2 \Rightarrow |\frac{x-3}{x+4}|<M$

(10) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^3-2x^2+3x-4|\le M$

(11) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x+2}{x-2}|\le M$ sí $x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$

(12) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^2-3x+4|\le M$ sí $x\in[-2,2]$

(13) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^2+4x-3|\le M$ sí $x\in[-2,4]$

(14) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x+2}{x-4}|\le M$ sí $x\in[5,8]$

(15) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^3+2x^2-3x-6|\le M$ sí $x\in[-2,5]$

(16) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^4-2x^3+x^2-3x-5|\le M$ sí $x\in[-3,-1]$

(17) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x^2-6x+2}{x+5}|\le M$ sí $x\in[-\frac{9}{2},4]$

(18) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x+7}{x^2+4x+4}|\le M$ sí $x\in[-1,3]$

(19) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x^3-3x+5}{x^2-2x-5}|\le M$ sí $x\in[0,4]$

(20) Hallar el mayor número N tal que: $|\frac{x^2+6x+14}{x^3+27}|\ge N$ si $x\in[-2,2]$

(21) Si $\frac{1}{x}\in(<-\infty,1>U<2,+\infty>)$, Determinar el menor número M tal que $|\frac{x-2}{x+4}|\le M$



(22) Determinar el número M tal que: $\left|\frac{x-3}{x-4}\right| \leq M$, $\forall$ x $\in$ <1,3>

(23) Hallar el menor número M tal que: $\left|\frac{x^3+14}{x^2-4x+14}\right| \leq M$, sí x $\in$ [-1,2]

(24) Hallar un número M tal que: sí $|x| < 1 \Rightarrow \left|\frac{x+1}{x+3}\right| < M$

VI. Resolver las siguientes ecuaciones:

(1) $[\![3x]\!] = x+2$ **Rpta.** x = 1

(2) $[\![3x]\!] = 2x+2$ **Rpta.** $x = 2, \frac{5}{2}$

(3) $[\![\frac{|x-2|+3}{2}]\!] = 5$ **Rpta.** <-7,-5] $\cup$ [9,11>

(4) $[\![2-|x|]\!] = 1$ **Rpta.** [-1,0> $\cup$ <0,1]

(5) $[\![3x-5]\!] = 2x+1$ **Rpta.** $\{6, \frac{13}{2}\}$

(6) $[\![\sqrt{3-x}]\!] = 2$ **Rpta.** <-6,-1]

(7) $[\![\frac{|x-1|-1}{3}]\!] = 2$ **Rpta.** <-9,-6] $\cup$ [8,11>

(8) $[\![\left|\frac{|x|-2}{|x|}\right|]\!] = -1$ **Rpta.** ϕ

(9) $[\![2x]\!] + [\![4x]\!] = 3$ **Rpta.** $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}>$

(10) $[\![\left|\frac{x-1}{x+3}\right|]\!] = 5$ **Rpta.** $[-4, -\frac{19}{5} > \cup < -\frac{17}{7}, -\frac{7}{3}]$

(11) $[\![\left|\frac{2x}{x+1}\right|]\!] = 3$ **Rpta.** $[-3, -2 > \cup < -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$

(12) $[\![\frac{2x+3}{5}]\!]=3$ **Rpta.** $<-\frac{23}{2},-9]\cup[6,\frac{17}{2}>$

(13) $[\![\,|2x^2-1|\,]\!]=1$ **Rpta.** $<-\sqrt{\frac{3}{2}},-1]\cup\{0\}\cup[1,\sqrt{\frac{3}{2}}>$

(14) $[\![\frac{x+2}{x+3}]\!]=2$ **Rpta.** $<\frac{11}{2},8]$

(15) $[\![\frac{|x-2|+3}{2}]\!]=4$ **Rpta.** [-1,0> ∪ <0,1]

(16) $[\![\,2-|x|\,]\!]=1$ **Rpta.** [7,9>

(17) $[\![\frac{2x-1}{x+3}]\!]=4$ **Rpta.** $[-\frac{13}{2},-\frac{16}{3}>$

(18) $[\![x^2-2x]\!]=3$ **Rpta.** $<1-\sqrt{5},-1]\cup[3,1+\sqrt{5}>$

(19) $[\![2x]\!]-|x-1|=2x-3$ **Rpta.** $\{-2,\frac{10}{3},\frac{11}{3},4\}$

(20) $|[\![x^2]\!]-1|=3$ **Rpta.** $<-\sqrt{5},-2]\cup[2,\sqrt{5}>$

(21) $[\![\frac{|x-2|+|2x-1|-2}{3}]\!]=1$ **Rpta.** $<-\frac{5}{3},-\frac{2}{3}]\cup[\frac{8}{3},\frac{11}{3}>$

(22) $[\![x-1]\!]^2+2[\![x]\!]^2=57$ **Rpta.** [-4,-3>

VII. Resolver las siguientes inecuaciones:

(1) $[\![\frac{x^2+1}{x+2}]\!]<2$ **Rpta.** <-∞,-2> ∪ <-1,3>

(2) $[\![4x^2-5x-4]\!]\le 1$ **Rpta.** $<-\frac{3}{4},2>$

(3) $[\![\,|2x^2+5x|-2\,]\!]<1$ **Rpta.** $<-3,-\frac{3}{2}>\cup<-1,\frac{1}{2}>$

(4) $|\,[\![-x]\!]-1\,|<2$ **Rpta.** <-3,0]

(5) $[\![x^2-1]\!]\geq 0$ **Rpta.** <-∞,-1] ∪ [1,+∞>

(6) $[\![\sqrt{3}-2x]\!]<\sqrt{3}$ **Rpta.** <0,+∞>

(7) $[\![x^2-1]\!]\leq 0$ **Rpta.** $<-\sqrt{2},\sqrt{2}>$

(8) $[\![\frac{5+x}{5-x}]\!]<1$ **Rpta.** <0,5>

(9) $[\![x^2-4]\!]\leq -1$ **Rpta.** <-2,2>

(10) $[\![\,|\frac{2x+3}{x+1}-1|\,]\!]\leq 1$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{2}{3}>\cup<6,+\infty>$

(11) $[\![\frac{|x|+3}{4}-1]\!]\geq 1$ **Rpta.** <-∞,-5] ∪ [5,+∞>

(12) $[\![2x-\frac{10}{x}]\!]\geq 1$ **Rpta.** $[-2,0>\cup[\frac{5}{2},+\infty>$

(13) $[\![x]\!]^2-2[\![x]\!]-2<0$ **Rpta.** [0,2]

(14) $\frac{\sqrt{|x|-3}}{[\![x^2-2x-19]\!]}\leq 0$ **Rpta.** $<1-2\sqrt{5},-3]\cup[3,1+2\sqrt{5}>$

(15) $\sqrt{[\![x]\!]^2-12}([\![x]\!]^2-[\![x]\!]-6)\geq 0$ **Rpta.** <-∞,-3> ∪ <4,+∞>

(16) $\frac{\sqrt{|x|-2}}{[\![x^2-2x-3]\!]}\leq 0$ **Rpta.** [2,3>

(17) $[\![x-2[\![x]\!]\,]\!](x^2-4)\geq 0$

(18) $[\![x-2]\!].(x^2-x+2)>0$

(19) $([\![x]\!]-2)\sqrt{|x^2+2|}(x^2-4x+3)>0$

(20) $\frac{[\![-x]\!]-2}{6-[\![x]\!]}\geq 0$

(21) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}{x^2-[|x|]-4}<0$

(22) $([|x|]-x)(x-2)(x-3)^2>0$

(23) $\dfrac{|x|-1}{[|x|]-1}<1$

(24) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}}{|x|\ [|x-1|]-9}\geq 0$

(25) $||x-1|-[|x|]|<x$

(26) $\sqrt{\dfrac{-2x-11}{5x+26}}\geq [|\dfrac{x-2}{x+7}|]\dfrac{|x|}{x}$

(27) $\dfrac{(|x-5|+2x+\sqrt{x-5}-[|x-2|]x+5)(x-\dfrac{17}{3})}{\sqrt{6-x}}\leq 0$

(28) $\dfrac{\sqrt{2-|x|}}{[|x^2-9|]}\leq 0$

(29) $\dfrac{(x^2+4x+5)\sqrt{x-1}(2^x+\text{sen}\,x)(x+2)}{([|x|]-\dfrac{1}{2})(x^2-2x-3)}\geq 0$

(30) $[|\dfrac{4x+1}{4x+2}|]\leq 4$

VIII. Resolver la inecuación logarítmica.

(1) $\log_{1/2}|2x-3|>-3$ **Rpta.** $<-\dfrac{5}{2},\dfrac{11}{2}>-\{\dfrac{3}{2}\}$

(2) $\log_2(x-3\sqrt{x+1}+3)<1$ **Rpta.** $[-1,0>\cup<3,15>$

(3) $\log_7\dfrac{|x^2+4x|+3}{x^2+|x-5|}\geq 0$ **Rpta.** $[\dfrac{2}{5},+\infty>$

(4) $\log_2[\dfrac{4x-11}{2x^2-4x-6}]\leq -1$ **Rpta.** $[2,\dfrac{11}{4}>\cup<4,+\infty>$

(5) $\log[\dfrac{|2x-3|}{x+1}]>1$ **Rpta.** $<\dfrac{1}{2}(\sqrt{21}-3),1>$

(6) $\log_{(x-4)}(3-x)<2$ **Rpta.** ϕ

(7) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+6) < -2$ **Rpta.** $<2,+\infty>$

(9) $\log_2|3-4x| > 3$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{5}{4}> \cup <\frac{11}{4},+\infty>$

(10) $\log_3|3-4x| > 2$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{3}{2}> \cup <3,+\infty>$

(11) $\log_6[\,|\frac{x-2}{x-5}|+35] > 2$ **Rpta.** $<\frac{7}{2},5> \cup <5,+\infty>$

(12) $\log_{(\frac{25-x^2}{16})}(\frac{24-2x-x^2}{14}) > 1$ **Rpta.** $<-3,1> \cup <3,4>$

(13) $\log_x(\frac{4x-5}{|x-2|}) \geq 1$ **Rpta.** $<-1+\sqrt{6},\ 2> \cup <2,5]$

(14) $\log_6(x-3\sqrt{x+1}+3) < 1$ **Rpta.** $[-1,0> \cup <3,15>$

(15) $\log_5(3x-5) > \log_5(7-2x)$ **Rpta.** $<\frac{12}{5},\frac{7}{2}>$

(16) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+3) \geq -1$ **Rpta.** $[0,1> \cup <3,4]$

(17) $\log_2(|x-2|-1) > 1$ **Rpta.** $<-\infty,-1> \cup <5,\infty>$

(18) $\log_{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}(\frac{3-2x}{1-x}) \geq 0$ **Rpta.** $<0,1> \cup [2,+\infty>$

(19) $\log_{x^2}(2+x) < 1$

(20) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4) > \log_{\frac{1}{2}}(4x-7)$

(21) $\log_2(x^2)+\log_2(x^4) > 3$

(22) $\log_{\frac{1}{3}}(8-2x) \geq 3$

3.42. APLICACIONES DE LAS INECUACIONES A LA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMIA.-

Muchas veces la resolución de problemas expresado en palabras nos conducen a inecuaciones como ilustraremos en los siguiente ejemplos.

1) El producto Interno Bruto (PIB) de un país está proyectado en $t^2+2t+50$ miles millones de dólares, donde t se mide en años a partir del año en curso. Determínese el instante en que el PIB del país sea igual o exceda $ 58 mil millones.

Solución

El (PIB) del país será igual o excederá $ 58 mil millones cuando $t^2+2t+50 \geq 58$

Para obtener la solución de la inecuación expresaremos en la forma: $t^2+2t-8 \geq 0$, donde al factorizar se tiene $(t+4)(t-2) \geq 0$.

Aplicando el criterio de los puntos críticos se tiene:



El conjunto solución de la inecuación es $\langle -\infty,-4] \cup [2,\infty\rangle$ como t debe ser positivo, entonces se considera $t \geq 2$ es decir que, el PIB será igual o excederá por vez primera a los $ 58 mil millones, cuanto $t = 2$ es decir dentro de dos años.

2) Para una compañía que fabrica termostatos, el costo combinado de mano de obra y material es de $ 5 por termostato. Los costos fijos (los costos de un periodo dado sin importar la producción) son de $ 60.000. Si el precio de venta de un termostato es de $ 7 ¿Cuántos debe venderse para que la compañía obtenga utilidades?

Solución

Como: ganancia = ingreso total – costo total

Entonces debemos encontrar el ingreso total y el costo total y después determinar cuando su diferencia es positiva.

Sea q = el número de termostato que deben ser vendidos entonces su costo es 5q

Lugo el costo total para la compañía es 5q + 60,000, el ingreso total de q termostatos será 7q y como: Ganancia = Ingreso total – costo total > 0

entonces: $7q - (5q + 60{,}000) > 0$, de donde $2q > 60{,}000$ entonces $q > 30{,}000$

por lo tanto se deben vender al menos 30,001 termostato para que la compañía obtenga utilidades.

(3) El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce al precio de $ 60 cada artículo. Gasta $ 40 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo y tiene costos adicionales (fijos) de $ 3,000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos $ 1,000 a la semana.

Solución

Sea x = número de artículos producidos y vendidos a la semana.

Como el costo total de producir x unidades es de $ 3,000 más $ 40 por artículo, es decir: (40x + 3,000) dólares el ingreso obtenido por vender x unidades a $ 60 cada una será de 60x dólares, por lo tanto

Utilidad = ingresos – costos = $60x - (40x + 3{,}000) = 20x - 3{,}000$

como debe tener una ganancia de al menos $ 1,000 al mes, tenemos la inecuación:

utilidad ≥ 1000 de donde $20x - 3000 \geq 1000$ entonces $x \geq 200$

por lo tanto, el fabricante debe producir y vender al menos 200 unidades cada semana.

(4) La gerencia de la misma Antamina, un gran consorcio, ha estimado que necesita x miles de dólares para adquirir $100{,}000(-1+\sqrt{1+0.001x})$ acciones de la compañía telefónica. Determinar el dinero que necesita Antamina para adquirir un mínimo de 100,000 acciones de telefónica.

Solución

Calculamos la cantidad de dinero que Antamina necesita para adquirir un mínimo de 100,000 acciones resolviendo la inecuación.

$100{,}000(-1+\sqrt{1+0.001x})\geq 100{,}000$ de donde $-1+\sqrt{1+0.001x}\geq 1$

entonces $\sqrt{1+0.001x}\geq 2$ elevando al cuadrado $1+0.001x\geq 4 \Rightarrow 0.001x\geq 3$

$x\geq 3000$, por lo tanto Antamina necesita al menos $ 3 000,000

(5) Un constructor debe decidir si renta o compra una maquina excavadora. Si renta la máquina el pago mensual sería de $ 600 (con base en un año), y el costo diario (gas, aceite y conductor) sería de $ 60 por cada día que sea utilizada. Si la compra, su costo fijo anual sería de $ 4,000, y los costos por operación y mantenimiento serían de $ 80 por cada día que la máquina sea utilizada ¿Cuál es el número mínimo de días al año que tendría que usarse la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?

Solución

Determinaremos expresiones para el costo anual de la renta y el de la compra, así encontraremos cuándo el costo de la renta es menor que el de la compra.

Sea d = el número de días de cada año en que la máquina es utilizada.

Si la máquina rentada, el costo total anual consistiría en el pago de la renta, que es (12)(600) y los cargos diarios de 60d, si la máquina es comprada, el costo por año será

4000 + 80d, queremos Costo renta < costo compra

$12(600)+60d<4000+80d \Rightarrow 7200+60d<4000+80d$, de donde

$3200<20d \Rightarrow 160<d$, por lo tanto, el constructor debe utilizar la máquina al menos 161 días para justificar su renta.

(6) Las ventas mensuales x de cierto artículo cuando su precio es P dólares están dadas por P = 200 – 3x. El costo de producir x unidades del mismo artículo es C = (650 + 5x) dólar ¿Cuántas unidades de este artículo deberán producirse de modo que la utilidad mensual sea por lo menos de 2,500 dólares?

Solución

Sea R = el ingreso en $ obtenido por vender x unidades al precio de P dólares por unidad,

es decir: R = x (precio por unidad) = x(p) = x(200 – 3x) $\Rightarrow$ $\boxed{R=200x-3x^2}$

C = el costo en \$ de fabricar x unidad, es decir: C = 650 + 5x

Como utilidad = Ingresos – costos $= (200x - 3x^2) - (650 + 5x)$

$$= 195x - 3x^2 - 650$$

como la utilidad debe ser al menos de \$ 2,500, es decir:

utilidad ≥ 2,500, de donde $195x - 3x^2 - 650 \geq 2{,}500$, simplificando

$x^2 - 65x + 1050 \leq 0$, factorizando se tiene:

$(x - 30)(x - 35) \leq 0$, aplicando puntos críticos



La solución es $30 \leq x \leq 35$

Luego para obtener una utilidad de al menos \$ 2,500 al mes, el fabricante debe producir y vender cualesquiera unidades de 30 a 35.

(7) Una compañía de publicidad determina que el costo por publicar cada ejemplar de una cierta revista es de \$ 1.50. El ingreso recibido de los distribuidores es de \$ 1.40 por revista. El ingreso por publicidad es de 10% del ingreso recibido de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por arriba de 10,000 ¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben ser vendidas de modo que la compañía obtenga utilidades?

Solución

Sea q = número de revistas vendidas

El ingreso total recibido de los distribuidores es 1.40q y el recibido por publicidad es

$(0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)]$ el costo total de la publicación es 1.50q

como utilidad = ingreso – costo > 0

$1.40q + (0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)] - 1.50q > 0 \Rightarrow 1.4q + 0.14q - 1400 - 1.5q > 0$

$0.04q - 1400 > 0 \Rightarrow 0.04q > 1400 \Rightarrow q > 35{,}000$

por lo tanto el número total de revistas debe ser mayor que 35,000, es decir que al menos 35,001 ejemplares deben ser vendidos para garantizar utilidades.

(8) Un peluquero atiende un promedio de 100 clientes a la semana y les cobra \$ 3 por corte por cada incremento de \$ 0.5 en la tarifa, el peluquero pierde 10 clientes ¿Qué precio deberá fijar de modo que los ingresos semanales no sean menores de los que él obtiene por una tarifa de \$ 3?

Solución

Sea x = el número de incremento de \$ 0.5 en la tarifa por encima de \$ 3

$\$ (3 + 0.5x)$ = el precio del corte

$100 - 10x$ = número de clientes por semana.

Ingreso total a la semana = (número de clientes) precio del corte

$$= (100 - 10x)(3 + 0.5x) \text{ dólares}$$

el ingreso correspondiente a 100 clientes son de 100 x \$ 3 = 300

luego los nuevos ingresos semanales deben ser al menos 300 dólares, es decir:

$(100 - 10x)(3 + 0.5x) \geq 300$, simplificando $x(x - 4) \leq 0$, aplicando puntos críticos



por lo tanto la solución es $0 \leq x \leq 4$

esto quiere decir que debería subir a lo más $4 \times 0.5 = \$ 2$

El peluquero debería cobrar una tarifa máxima de \$ 3 + \$ 2 = \$ 5 por corte, para obtener al menos los mismo ingresos que los correspondientes a 100 clientes cobrándoles \$ 3 por corte.

3.43. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Determine el costo mínimo C (en dólares) dado que $5(C - 25) \geq 1.75 + 2.5C$

Rpta. \$ 50.70

(2) Determine la ganancia máxima P (en dólares) dado que: $6(P - 2500) \leq 4(P + 2400)$

Rpta. $ 12,300

(3) Determine el costo mínimo C (en dólares) dado que: $2(1.5C + 80) \leq 2(2.5C - 20)$

Rpta. $ 100

(4) Determine la ganancia máxima P (en dólares) dado que: $12(2P - 320) \leq 4(3P + 240)$

Rpta. $ 400

(5) La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de $ 20 y un costo unitario de $ 15. Si los costos fijos son de $ 600,000, determine el número mínimo de unidades que deben ser vendidos para que la compañía tenga utilidades.

Rpta. Al menos 120,001

(6) El administrador de una fabrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a $ 1.10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generales de la empresa en $ 800 al mes y el costo del material y de mano de obra será de $ 0.60 por cada empaque ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques? **Rpta.** Producir al menos 1601 empaques al mes

(7) La publicidad indica que cierto auto rinde 20 millas por galón en la ciudad y 27 millas por galón en la carretera, y que la capacidad del tanque de gasolina es de 18.1 galones. Suponga que existen las condiciones ideales de manejo y determine la distancia que puede recorrer un auto de estas características con el tanque lleno.

Rpta. [362,488.7]

(8) Una mujer de negocios quiere determinar la diferencia entre los costos de comprar y rentar un automóvil. Ella puede rentar un automóvil por $ 400 mensual (con una base anual). Bajo este plan el costo por milla (gasolina y aceite) es de $ 0.10. Si comprarse el carro, el gasto fijo anual sería de $ 3,000 más $ 0.18 por milla ¿Cuál es el menor número de millas que deberá conducir por año para que la renta no sea más cara que la compra?

Rpta. 22,500

(9) Un fabricante puede vender todas las unidades que produce al precio de \$ 30 cada una. Tiene costos fijos de \$ 12,000 al mes; y además, le cuesta \$ 22 producir artículo ¿Cuántas unidades debe producir y vender al mes la compañía para obtener utilidades?

Rpta. más de 1,500

(10) La comisión mensual de un agente de ventas es de 15% de las ventas por arriba de \$ 12,000. Si su objetivo es lograr una comisión de al menos \$ 3,000 por mes ¿Cuál es el volumen mínimo de ventas que debe alcanzar? **Rpta.** \$ 32,000

(11) El costo unitario de publicación de una revista es de \$ 0.65 se vende al distribuidor en \$ 0.60 cada una, y la cantidad que recibe por publicidad es el 10% de la recibida por todas las revistas vendidas arriba de las 10,000. Encuentre el menor número de revistas que pueden ser publicadas sin pérdida, esto es, que la utilidad ≥ 0 (suponga que toda la emisión será vendida) **Rpta.** 60,000

(12) Una empresa automotriz desea saber si le conviene fabricar sus propias correas para el ventilador, que ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$ 2.50 cada unidad. La fabricación de las correas por la empresa incrementará sus costos fijos en \$ 1,500 al mes, pero sólo le costará \$ 1.70 fabricar cada correa ¿Cuántas correas debe utilizar la empresa cada mes para justificar la fabricación de sus propias correas?

Rpta. más de 1,875

(13) Una compañía invierte \$ 30,000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5 y 6.75%. Desea una ganancia anual que no sea menor al 6.5% ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que debe invertir a la tasa de 6.75 por ciento? **Rpta.** \$ 25,714.29

(14) La fabricante de cierto artículo ha estimado que su ganancia en miles de dólares está dado por la expresión $-6x^2+30x-10$ donde x (miles) es el número de unidades producidas. ¿Qué nivel de producción el permitirá obtener una ganancia de al menos \$ 14,000?

Rpta. Entre 1,000 y 4,000 unidades

(15) Una pelota se lanza hacia arriba, de modo que su altura después de t segundo es $128t-16t^2+4$ pies. Determine el tiempo durante el cuál la pelota está arriba de una altura de 196 pies. **Rpta.** 4 segundos

(16) El costo de publicar cada ejemplar de la revista semanal compra y venta es de \$ 0.35. Los ingresos del representante de ventas son de \$ 0.30 por ejemplar y los ingresos de la publicidad corresponden al 20% de los ingresos obtenidos por ventas que exceden los 2,000 ejemplares ¿Cuántas copias deberá publicar y vender cada semana para obtener ingresos semanales del al menos \$ 1,000? **Rpta.** 112,000, o más

(17) Un fabricante tiene 2.500 unidades de un producto cuyo precio unitario es de \$ 4. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en \$ 0.50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2,500 unidades no sea menor que \$ 10,750 ¿Cuál es el número máximo de unidades que puede ser vendido este mes?

Rpta. 1,000

(18) Al precio de P por unidad, x unidades de cierto artículo pueden venderse al mes en el mercado, con P = 600 – 5x ¿Cuántas unidades deberán venderse cada mes con objeto de obtener ingresos por los menos de \$ 18,000? **Rpta.** 60 unidades

(19) Un fabricante puede vender todas las unidades de un producto a \$ 25 cada una. El costo C (en dólares) de producir x unidades cada semana está dado por $C = 3{,}000 + 20x - 0.1x^2$ ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana para obtener alguna utilidad? **Rpta.** más de 150

(20) Un granjero desea delimitar un terreno rectangular y tiene 200 yardas de cerco disponible. Encuentre las dimensiones posibles del terreno si su área debe ser de al menos 2,100 yardas cuadradas.

Rpta. $30 \le x \le 70$, si x yardas es la longitud de un lado del terreno.

(21) Un peluquero atiende en promedio a 120 clientes a la semana cobrándoles \$ 4 por corte por cada incremento de \$ 0.50 en el precio, el peluquero pierde 8 clientes. ¿Qué precio máximo deberá fijar para obtener ingresos semanales por lo menos \$ 520?

Rpta. \$ 6.50

(22) Un accionista invierte \$ 100 a un interés anual del R por ciento y otros \$ 100 al 2R por ciento anual. Si el valor de las dos inversiones debe ser de al menos \$ 224.80 después de 2 años ¿Qué restricciones deben establecerse sobre R? **Rpta.** $R \ge 4$

(23) Para producir 1 unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de $ 2.50 y el de mano de obra de $ 4. El gasto general, sin importar el volumen de ventas, es de $ 5,000. Si el precio para un mayorista es de $ 7.40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que debe ser vendido para que la compañía obtenga utilidades.

(24) El margen de ganancia para un auto usado era de al menos 30% de su precio total al por mayor. Si el auto fue vendido en $ 6,500 ¿Cuál fue el precio máximo al por mayor?

(25) t minutos después de introducir un bactericida experimental en cierto cultivo, el número de bacterias está dado por $\frac{10,000}{t^2+1}+2,000$. Determine el momento en que el número de bacterias esté por debajo de 4,000.

(26) Un editor puede vender 12,000 ejemplares de un libro al precio de $ 25 cada uno, por cada dólar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 ejemplares ¿Qué precio mínimo deberá fijarse a cada ejemplar con objetivo de lograr ingresos por lo menos de $ 300,000?

(27) Una fabrica de camisetas produce N camisetas a un costo de mano de obra total de $ 1.2N y un costo total por material de $ 0.3N. Los gastos generales para la planta son $ 6,000. Si cada camiseta se vende en $ 3 ¿Cuántas camisetas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

(28) Suponga que los consumidores comprarán q unidades de un producto al precio de $\frac{100}{q}+1$ dólares por unidad ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe ser vendido para que el ingreso por ventas sea mayor que $ 5,000?

(29) En cierto estanque se crían peces (se introducen n de ellos allí). Si se sabe que la ganancia de peso promedio de cada pez es de (600 – 3n) gramos. Determine las restricciones de n si la ganancia total en peso de todos los peces debe ser mayor que 28,800 gramos.

(30) Un supermercado se encuentra con grandes existencias de manzanas que debe vender rápidamente. El gerente sabe que si las manzanas se ofrecen a P centavos por libra, venderá x libras, con x = 1000 – 20P ¿Qué precio deberá fijar con el fin de obtener ingresos por lo menos de $ 120?

CAPITULO IV

RELACIONES Y FUNCIONES

4.1. INTRODUCCIÓN.-

a) PAR ORDENADO.-

Llamaremos "par ordenado" de números reales a la expresión (a,b) donde a es llamada la primera componente y b es llamada la segunda componente.

Ejemplo.- Son pares ordenados, (3,5), (-2,7), (etc).

b) IGUALDAD DE PARES ORDENADOS.-

Los pares ordenados (a,b) y (c,d) diremos que son iguales si sus correspondientes componentes son iguales, esto es:

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \ \wedge \ b = d$$

Ejemplo.- Los pares ordenados (5,6) y (5,4) no son iguales sus segundas componentes son diferentes.

Luego diremos que dos pares ordenados son diferentes si una de sus componentes correspondientes son diferentes esto es:

$$(a,b) \neq (c,d) \iff a \neq c \ \text{y/o} \ b \neq d$$

Ejemplo.- Determinar el valor de x e y de tal manera que $(5x+2y, -4) = (-1, 2x-y)$

Solución

Para calcular el valor de x e y aplicamos el concepto de igualdad de pares ordenados:

$$(5x + 2y, -4) = (-1, 2x - y) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 2x-y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \end{array}$$

c) PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS.-

Consideremos dos conjuntos A y B arbitrarios; llamaremos producto cartesiano de A y B, al conjunto formado por todos los pares ordenados (a,b) de tal manera que la primera componente a pertenece al conjunto A y la segunda componente b pertenece al conjunto B.

La notación del producto cartesiano de A y B es: AxB. Simbólicamente el producto cartesiano se representa:

$$A \times B = \{(a,b) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}$$

Nota: $(a,b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$

Ejemplo.- Sean $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4\}$ Entonces:

$$A \times B = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$$

También puede determinarse A x B mediante el método del "diagrama del árbol" el cual nos permite observar el conjunto de pares ordenados, este método consiste en disponer los elementos de A y B del modo siguiente

A	B	A x B
1	2	(1,2)
	4	(1,4)
3	2	(3,2)
	4	(3,4)
5	2	(5,2)
	4	(5,4)

OBSERVACIÓN.- Cuando los conjuntos A y B son finitos entonces:

$$n(A \times B) = n(A).n(B)$$

donde: n(A): es el número de elementos del conjunto A.

n(B): es el número de elementos del conjunto B.

n(A x B): es el número de elementos del conjunto A x B.

Ejemplo.- Si A={2,4} y B = {1,3,5} entonces: AxB={(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)}

De donde: n(A x B) = n(A).n(B) = (2)(3) = 6

Además se tiene:

B x A = {(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)} de donde se observa que $A \times B \neq B \times A$

d) PROPIEDADES DEL PRODUCTO CARTESIANO

① $A \times B \neq B \times A$, no siempre se cumple

② $A \times \phi = \phi \times A = \phi$

③ $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$

④ $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$

⑤ $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$

⑥ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

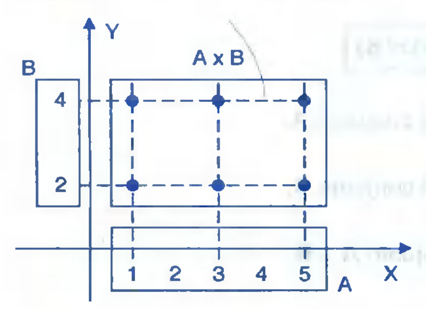
⑦ Sí $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C, \forall C$

⑧ Si $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow A \times B \subset C \times D$

e) REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO CARTESIANO.-

En el producto cartesiano A x B, a cada uno de los conjuntos A y B lo representaremos sobre dos rectas perpendiculares, en donde los elementos del conjunto A se representa sobre el eje horizontal y los elementos del conjunto B se representan sobre el eje vertical, de tal manera que las líneas verticales que pasan por los elementos de A y las líneas horizontales que pasan por los elementos de B al interceptarse se obtienen los pares ordenados de A x B.

Ejemplos.-



Sí $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4\}$ entonces:

$A \times B = \{(1,2),(1,4),(3,2)(3,4)(5,2)(5,4)\}$

A los elementos del conjunto A lo representaremos en el eje horizontal y a los elementos del conjunto B lo representaremos en el eje vertical.

OBSERVACIÓN

Como los conjuntos A y B son arbitrarios, entonces consideremos los siguientes casos:

1. Si A = B, el producto cartesiano denotaremos por $A \times B = A \times A = A^2$

2. Si $A = B = R$ entonces $A \times B = R \times R = R^2$ este producto nos representa al plano cartesiano.

f) DIAGONAL DE UN CONJUNTO.-

Dado un conjunto $A \neq \phi$, a la diagonal del producto cartesiano A x A denotaremos por I_A y es definido por:

$$I_A = \{(x,y) \in A \times A \,/\, y = x\}$$

Ejemplo.- Sí $A = \{1,3,5\}$ entonces:

$A \times A = \{(1,1),(1,3)(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

Entonces: $I_A = \{(1,1),(3,3),(5,5)\}$

g) EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1. Determinar los valores x e y, en cada caso:

a) $(4, 2x - 10) = (x - 1, y + 2)$

Solución

Mediante la igualdad de pares ordenados se tiene:

$$(4, 2x - 10) = (x - 1, y + 2) \Rightarrow \begin{cases} 4 = x - 1 \\ 2x - 10 = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

b) $(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$

Solución

Mediante la igualdad de pares ordenados se tiene:

$$(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2) \Rightarrow \begin{cases} y - 2 = x - 1 \\ 2x + 1 = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

(2) Dados los conjuntos $A = \{x \in z / -1 \leq x \leq 3\}$; $B = \{x \in z / 1 \leq x \leq 4\}$

$C = \{x \in z / 1 \leq x \leq 4\}$

Hallar los siguientes conjuntos y graficar:

a) A x B **b)** B x C **c)** (A – C) x B

Solución

Tabulando los conjuntos dados se tiene:

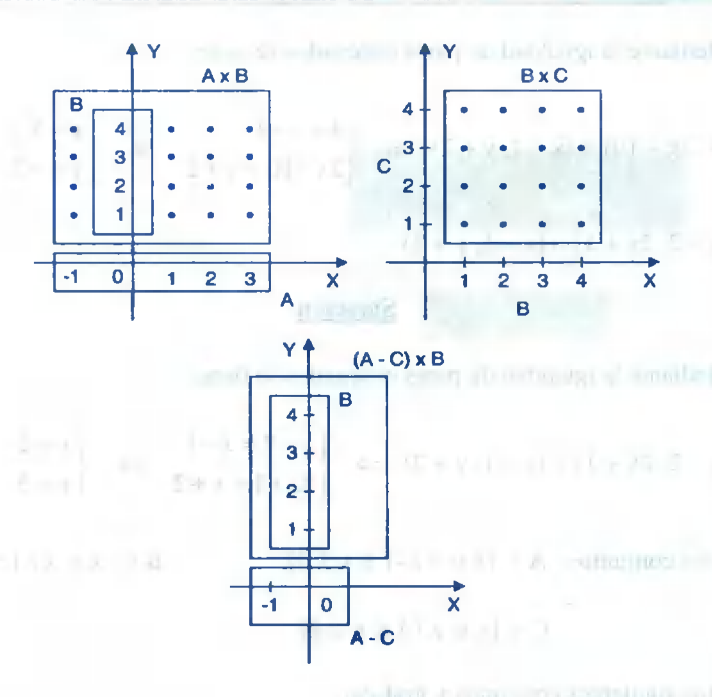
$A = \{-1,0,1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{1,2,3,4\}$

a) A x B = {(-1,1),(-1,2),(-1,3),(-1,4),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,1),(1,2),(1,3)(1,4),(2,1),
(2,2)(2,3) (2,4)(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)}

b) B x C = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2,),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),
(4,2),(4,3),(4,4)}

c) A – C = {-1,0}

(A – C) x B = {(-1,1),(-1,2),(-1,3),(-1,4),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)}



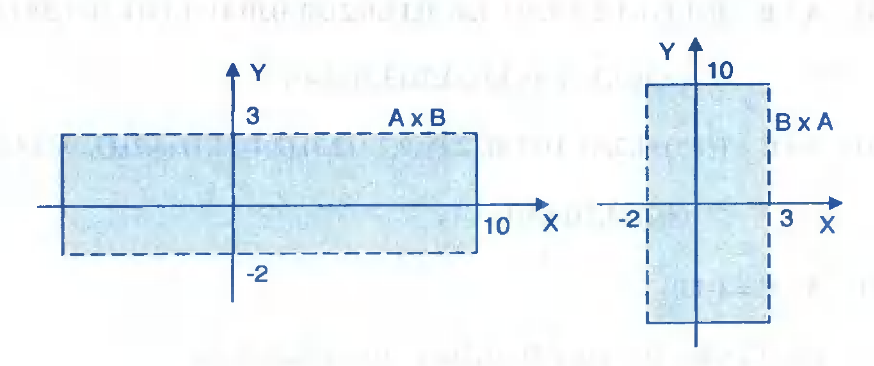
③ $A = \{x \in R / x - 3 < 7\}$, $B = \{y \in R / -2 < y < 3\}$. Graficar A x B, B x A

Solución

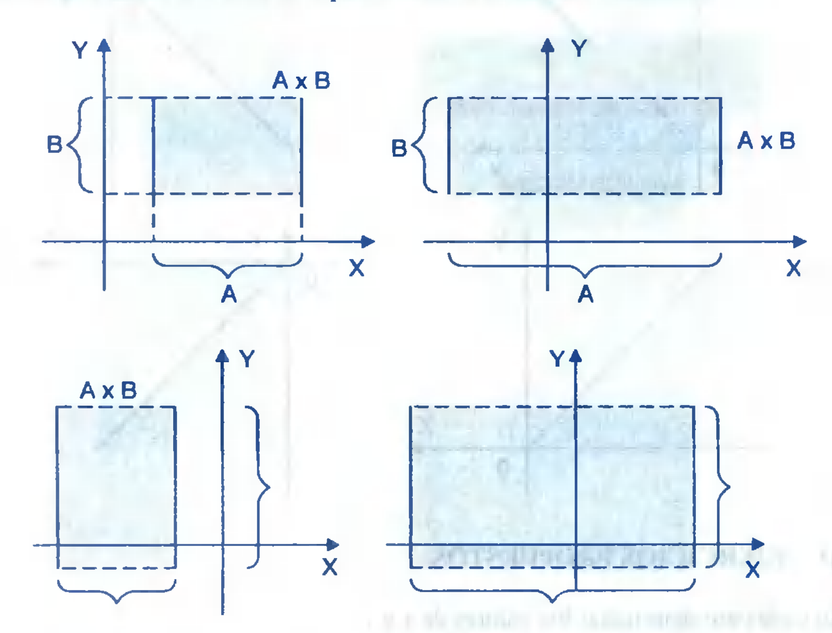
Como $x - 3 < 7 \Rightarrow x < 10$

$A \times B = \{(x,y) / x < 10 \ \wedge \ -2 < y < 3\}$

$B \times A = \{(x,y) / -2 < x < 3 \ \wedge \ y < 10\}$



④ Para A y B subconjuntos arbitrarios de R, geométricamente visualizar, como superficie, el producto cartesiano A x B en el espacio bidimensional R^2, entonces:



⑤ Que parte del plano cartesiano se obtiene si se representa gráficamente los siguientes productos cartesianos.

a) $<0,+\infty>$ x $<0,+\infty>$ **b)** $<-\infty,0>$ x $<-\infty,0>$

c) $<-\infty,0>$ x $<0,+\infty>$ **d)** $<0,+\infty>$ x $<-\infty,0>$

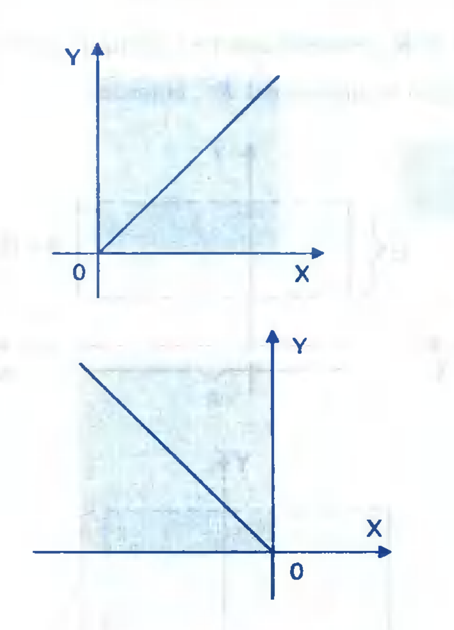
Solución

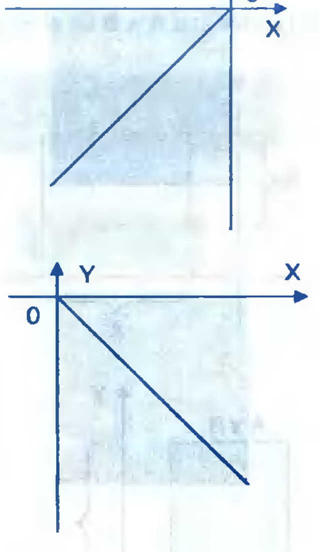
a) $<0,+\infty> \text{ x } <0,+\infty> \Rightarrow \{(x,y) / x > 0 \wedge y > 0\}$

b) $<-\infty,0> \text{ x } <-\infty,0> \Rightarrow \{(x,y) / x < 0 \wedge y < 0\}$

c) $<-\infty,0> \text{ x } <0,+\infty> \Rightarrow \{(x,y) / x < 0 \wedge y > 0\}$

d) $<0,+\infty> \text{ x } <-\infty,0> \Rightarrow \{(x,y) / x > 0 \wedge y < 0\}$





h) EJERCICIOS PROPUESTOS.

I. En cada caso determinar los valores de x e y.

① $(x,4) = (-2,y)$

② $(4, 2x - 10) = (x - 1, y + 2)$

③ $(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$

④ $(5x + 2y, -4) = (-1, 2x - y)$

⑤ $(x + 4, 6) = (10, y - x)$

⑥ $(x + 5, 3 - y) = (7,2)$

⑦ $(x + y, 3) = (5, y - x)$

⑧ $(x - 7y, 2x - 6y) = (15,-10)$

⑨ $(3x - 8y, 4x + 3y) = (4 - 2x - 10y, 2x + 4y + 7)$

⑩ $(5x + 2y, -4) = (-1, 2x - y)$

⑪ $(x^3 - 19, x^2y - 6) = (y^3, xy^2)$

⑫ $(2x - y, x + y + 3) = (x + y + 1, 2x + y)$

⑬ $(\frac{x+y}{2} - 1, \frac{x-y}{2} + 1) = (\frac{y-x}{2} + 2, \frac{x+y}{2} - 2)$

II. En cada caso hallar los conjuntos y graficar:

(1) Dado los conjuntos: $A = \{x \in z \,/\, -1 \le x \le 3\}$, $B = \{x \in z \,/\, 1 \le x \le 4\}$, $C = \{x \in z \,/\, 1 \le x \le 4\}$;

Hallar los conjuntos y graficar:

a) A x B b) B x C c) (A – C) x B

(2) Sea $A = \{x \in R \,/\, 1 \le x \le 3\}$ y $B = \{y \in R \,/\, 2 \le y \le 4\}$. Hallar A x B y graficar

(3) Sean $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ y $E = \{3,5,7,9\}$. Hallar $(A \times B) \cap (A \times E)$

(4) Representar al conjunto producto cartesiano: $\{x \in R \,/\, |x| \le 5\} \times \{x \in R \,/\, -2 \le x < 3\}$

Sombreando el área apropiada en el sistema bidimensional.

(5) Dado los conjuntos $A = \{x \in N \,/\, x = \frac{2k+1}{4},\ k \in N\}$, $B = \{x \in N \,/\, x^2 - 14x + 40 = 0\}$, $C = \{x \in N \,/\, x^2 - 1 = 0\}$, entonces el número de elementos del conjunto $[(A \cap B) \cup C] \times (B - C)$ es.

(6) Si $A = \{x \in R \,/\, 2 < x < 5\}$ y $B = \{x \in R \,/\, 1 < x < 4\}$. Graficar A x B, luego graficar BxA.

(7) Si $A = \{x \in R \,/\, 2 \le x \le 5\}$, $T = \{x \in R \,/\, 1 \le x < 4\}$. Graficar T x A, luego graficar AxT.

(8) Sí $A = \{\frac{x^3+2}{3} \,/\, (x-2)(x+3)(x-5) = 0\}$ y $B = \{\frac{x^2}{2} + 3 \,/\, x(x+2)(x-4) = 2\}\ \forall\ x \in R$

Hallar A x B, B x A y graficar.

(9) Si $A = \{x \in N \,/\, x = \frac{2k-1}{3},\ k \in N\}$, $B = \{x \in N \,/\, x^2 + 1 \le 12\}$. Hallar $(A \cap B) \times (B - A)$

(10) Sí $A = \{x^2 - 1 \,/\, 0 \le x \le 5,\ x \in z\}$, $B = \{x^2 + 1 \,/\, -5 \le x \le -3,\ x \in z\}$,

$C = \{x^3 + 4 \,/\, (x-1)(x+2)(x-3) = 0,\ x \in z\}$. Hallar A x B, A x C, B x C

(11) Si $A = \{\frac{1}{x} \,/\, x \in z\ \wedge\ -2 \le x < 4\}$, $B = \{x \in N \,/\, x \le 2\ \wedge\ x \in \{3,2,4,5\}\}$

Hallar y graficar A x B y B x A

(12) Si $A = \{3x + 1 / (x \in N \ \Lambda\ x \leq 3) \ V\ (x \in z \ \Lambda\ 0 \leq x < 5)\}$

Calcular la diagonal del producto A x A y luego grafique.

(13) Dado $A = \{x \in < / -12 < x + 6 < 20\}$ y $B = \{x \in z / 10 < x^2 < 400\}$

Cuantos elementos tiene A x B.

(14) Dados los conjuntos: $A = \{x \in N / x < 3\}$, $B = \{x \in N / x \text{ es par y } x < 5\}$,

$C = \{x \in N / x \text{ es impar y } x \leq 4\}$. Hallar el conjunto $(A \cap B) \times (C - A)$

(15) Sí $A = \{x \in z^+ / x = \frac{2k-1}{3},\ k \in z^+\}$ y $B = \{x \in z^+ / x^2 + 1 \leq 12\}$. Hallar $(A \cap B) \times (B - A)$

(16) Si A y B son dos conjuntos arbitrarios demostrar que: $A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \ V\ B = \phi$

(17) Demostrar que: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(18) Demostrar que: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(19) Demostrar que: $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

(20) Demostrar que: Sí $A \subset B$ entonces $A \times B \subset B \times B$

(21) Demostrar que: Sí $A \subset B$ entonces $A \times A \subset A \times B$

(22) Demostrar que: $A \times (E - B) = (A \times E) - (A \times B)$

(23) Demostrar que: $(A \cap B) \times (E \cap F) = (A \times E) \cap (B \times F)$

(24) Demostrar que: $(A \times E) \cup (B \times F) \subseteq (A \cup B) \times (E \cup F)$

(25) Demostrar que: $A \subset B$ y $E \subset D$ implica que $A \times E \subset B \times D$

4.2. RELACIONES BINARIAS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Consideremos dos conjuntos A y B no vacíos, llamaremos relación binaria de A en B o relación entre elementos de A y B a todo subconjunto R del producto cartesiano A x B, esto es:

R es una relación de A en B $\Leftrightarrow$ $R \subseteq A \times B$

Ejemplo.- Sean $A = \{2,4\}$ y $B = \{1,3,5\}$ entonces

$$A \times B = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$$

Los siguientes conjuntos de pares ordenados son relaciones de A a B:

$R_1 = \{(2,1),(2,5)\}$, $R_2 = \{(2,3),(4,1),(4,5)\}$, $R_3 = \{(2,1),(4,3),(2,3)\}$, $R_4 = A \times B$

Pero los siguientes conjuntos de pares ordenados no son relaciones de A en B:

$R_5 = \{(1,2),(4,1),(4,5)\}$, $R_6 = \{(2,1),(4,1),(3,4)\}$ puesto que $(1,2) \notin A \times B$, $(3,4) \notin A \times B$ por lo tanto $R_5 \not\subset A \times B$, $R_6 \not\subset A \times B$.

OBSERVACIÓN.-

1. Si A = B, entonces R es una relación en A o, R es una relación entre elementos de A.

2. La definición 1.1 establece una comparación entre elementos de pares ordenados, motivo por el cuál se le llama "relación binaria".

3. Si R es una relación entre elementos de A y B, al conjunto A le llamaremos conjunto de partida y al conjunto B le llamaremos conjunto de llegada.

4. Generalizando: una relación R, entre los elementos del conjunto de los números reales R, está determinado por una función proposicional P(x,y); esto es:

$$\boxed{E = \{(x,y) \in R \times R \,/\, P(x,y)\}}$$

5. Cuando el par ordenado (a,b) satisface a la función proposicional P(x,y) de la relación R, diremos que $(a,b) \in R$ en caso contrario $(a,b) \notin R$.

6. Si A tiene p elementos y B tiene q elementos entonces $\exists\ 2^n$ relaciones entre A y B donde n = pq.

Ejemplos.- Sí $A = \{1,3\}$ y $B = \{2,4\}$ entonces $A \times B = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)\}$

El número de relación que se obtendrá de A x B es $2^{2\times 2} = 2^4 = 16$ es decir: que se puede formar 16 relaciones:

{(1,2)}, {(1,2),(3,2)}, {(1,4)}, {(3,2)}, {(3,4)}, {(1,2),(1,4)}, {(1,4),(3,2)}, {(1,2),(3,4)}, {(1,4),(3,4)}, {(3,2),(3,4)}, {(1,2),(1,4),(3,2)}, {(1,2),(1,4),(3,4)}, {(1,4),(3,2),(3,4)}, {(1,2),(3,2),(3,4)}, {(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)}, ϕ

b) DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN BINARIA.

Consideremos una relación R de A en B: es decir que $R \subset A \times B$.

El dominio de la relación R denotado por D_R es el conjunto definido por:

$$D_R = \{a \in A / \exists\ b \in B\ \wedge\ (a,b) \in R\}$$

El rango de la relación R denotado por R_R es el conjunto definido por:

$$R_R = \{b \in B / \exists\ a \in A\ \wedge\ (a,b) \in R\}$$

Ejemplo.- Si $R = \{(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$ entonces $D_R = \{1,2\}$, $R_R = \{3,4,5\}$

OBSERVACIÓN.-

Para determinar el dominio de una relación, primero se despeja "y" enseguida se analiza los valores que pueden tomar "x" para que la variable "y" sea real.

Para determinar el rango de una relación se despeja "x", enseguida se analiza los valores que puedan tomar "y" para que la variable "x" sea real.

Ejemplo.- Determinar el rango y dominio de la siguiente relación:

$$R = \{(x,y) \in RxR / x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0\}$$

Solución

En primer lugar despejamos la variable "y" para obtener el dominio, es decir: $x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0$, completando cuadrado

$(y+5)^2 = 100 - x^2$ de donde $y = -5 \pm \sqrt{100 - x^2}$

Ahora analizaremos los valores que pueda tomar x para que "y" sea número real es decir: $100 - x^2 \geq 0$ de donde: $x^2 \leq 100 \Rightarrow -10 \leq x \leq 10 \qquad \therefore\ D_f = [-10,10]$

Ahora despejamos la variable "x" para obtener el rango, como $x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{75 - 10y - y^2}$ entonces analizando los valores que puede tomar "y" para que x sea número real se tiene: $75 - 10y - y^2 \geq 0$

donde $(y+5)^2 \leq 100 \quad \Rightarrow \quad -10 \leq y + 5 \leq 10 \quad \Rightarrow \quad -15 \leq y \leq 5 \qquad \therefore \; R_f = [-15,5]$

c) PROPIEDADES DE LA RELACIÓN BINARIA.-

Las relaciones binarias gozan de las siguientes propiedades:

(1) **PROPIEDAD REFLEXIVA.-** Una relación R en A, diremos que es reflexiva si (a,a) ∈ R para todo a ∈ A esto es:

R es reflexiva en A ⇔ ∀ a ∈ A, (a,a) ∈ R

(2) **PROPIEDAD SIMÉTRICA.-** Una relación R en A diremos que es simétrica si (a,b) ∈ R implica que (b,a) ∈ R, esto es:

R es simétrica ⇔ ∀ (a,b) ∈ R ⇒ (b,a) ∈ R

(3) **PROPIEDAD TRANSITIVA.-** Una relación R en A, diremos que es transitiva sí:

(a,b) ∈ R ∧ (b,c) ∈ R implica que (a,c) ∈ R, esto es:

R es transitiva ⇔ ∀ a,b,c ∈ A, [(a,b) ∈ R ∧ (b,c) ∈ R ⇒ (a,c) ∈ R]

(4) **PROPIEDAD ANTISIMÉTRICA.-** Una relación R en A, diremos que es antisimétrica sí:

∀ a,b ∈ A, (a,b) ∈ R y (b,a) ∈ R implica que: a = b, esto es:

R es antisimétrica ⇔ ∀ a,b ∈ A, [(a,b) ∈ R ∧ (b,a) ∈ R ⇒ a = b]

(5) **PROPIEDAD DE EQUIVALENCIA.-**

Una relación R en A, diremos que es de equivalencia si es: reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo.- Si A = {1,2,3,4,5,6} las relaciones en A.

a) $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ es reflexiva en A.

b) $R_2 = \{(1,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ no es reflexiva en A por que falta (2,2).

Ejemplo.- Si A = {2,3,5,7}, las relaciones en A

a) $R_1 = \{(5,3),(2,7),(3,5),(7,2),(2,2)\}$ es simétrica porque $(x,y)\in R_1 \Rightarrow (y,x)\in R_1$

b) $R_2 = \{(5,3),(2,7),(3,5),(2,2)\}$ no es simétrica porque falta (7,2).

Ejemplo.- Si A = {1,3,7,9} las relaciones en A.

a) $R_1 = \{(7,1),(2,2),(1,2)\}$ no es transitiva porque $(7,1)\in R_2 \wedge (1,2)\in R_2 \Rightarrow (7,2)\in R_2$

Ejemplo.- Si A = {1,2,3,4,5} la relación R en A dado por R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)} es una relación de equivalencia porque es reflexiva, simétrica y transitiva en A.

Ejemplo.- Sea Z = conjunto de los números enteros y la relación R definida sobre Z en R = {(x,y) ∈ Z x Z / x – y = 3m, m ∈ Z} es una relación de equivalencia. En efecto:

① R es reflexiva porque: $a - a = 0 = 0.3 \quad \forall\, a \in Z$ es decir: $(a,a) \in R,\ \forall\ a \in Z$

② R es simétrica porque: Sí $a - b = m.3 \Rightarrow b - a = -(a-b) = (-m).3$

$$\forall\, a,b \in Z \Rightarrow (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R\ ,$$

③ R es transitiva porque: Sí $a - b = m.3$ y $b - c = m'.3$ entonces

$$a - c = (a-b) + (b-c) = m.3 + m'.3$$

$$a - c = (m + m')3 \Rightarrow a - c = m.3,\ \forall\, a,b,c \in Z$$

es decir: $(a.b) \in R \ \wedge\ (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R,\ \forall\, a,b,c \in Z.$

Por lo tanto R es una relación de equivalencia.

d) DETERMINACIÓN DE UNA RELACIÓN BINARIA.

Teniendo en cuenta que una relación es un conjunto de pares ordenados, entonces a una relación determinaremos por extensión o por compresión.

1ra. POR EXTENSIÓN.-

Una relación queda determinada por extensión cuando se menciona cada uno de los pares ordenados de la relación.

Ejemplos.-

a) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$, $R_2 = \{(a,b),(c,d),(e,f)\}$

b) Si A = {2,3,6,9} y B = {1,4,5,6,12}

Expresa por extensión cada una de las relaciones:

(1) R = {(x,y) ∈ A x B / y = 2x}

Solución

R = {(2,4),(3,6),(6,12)}

(2) R = {(x,y) ∈ A x B / x + y = 12}

Solución

R = {6,6}

2da. POR COMPRENSIÓN.-

Una relación queda determinada por comprensión cuando se da una propiedad que caracteriza a todos los pares ordenados que conforman la relación.

Ejemplos.-

a) Si A = Z conjunto de los números enteros la relación R={(x,y)∈ Zx Z / y = x} es una relación expresada por comprensión.

b) Si U = {x ∈ N / x ≤ 7}. Determinar por comprensión la relación:

R = {(3,1),(4,2),(5,3),(6,4),(7,5)}

Solución

Se observa que la diferencia entre la primera componente y la segunda componente es dos unidades por lo tanto expresaremos por comprensión:

$$R = \{(x,y) \in U \times U / x - y = 2\}$$

e) RELACIÓN INVERSA.-

Si $R \subset A \times B$ es una relación de A en B; entonces a la relación inversa de R lo denotaremos por R^{-1} y está definido por:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A / (x, y) \in R\}$$

Ejemplo.- Sí R= {(3,2),(3,1),(4,2),(4,5),(6,8)} $\Rightarrow$ $R^{-1} = \{(2,3),(1,3),(2,4),(5,4),(8,6)\}$

Ejemplo.- Hallar la inversa de las siguientes relaciones.

a) $R = \{(x,y) \in R \times R / x + 3y = 12\}$

Solución

Para determinar la inversa de una relación se despeja x, es decir: $x = 12 - 3y$

Luego se permuta x por y es decir: $y = 12 - 3x$

$$\therefore\ R^{-1} = \{(x, y) \in RxR / y = 12 - 3x\}$$

b) $R = \{(x,y) \in R \times R / 3x + 4y = 5 \ \wedge\ 1 \le x \le 7\}$

Solución

Primeramente despejamos x de 3x + 4y = 5 es decir: $x = \dfrac{5-4y}{3}$, $1 \le x \le 7$

Ahora veremos como va variando y; como $1 \le x \le 7 \Rightarrow 1 \le \dfrac{5-4y}{3} \le 7$

$3 \le 5 - 4y \le 21 \Rightarrow -4 \le y \le \dfrac{1}{2}$

Luego $x = \frac{5-4y}{3}$, $-4 \le y \le \frac{1}{2}$, por lo tanto al permutar x por y se tiene:

$$y = \frac{5-4x}{3}, \quad -4 \le x \le \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad R^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = \frac{5-4x}{3}, \quad -4 \le x \le \frac{1}{2}\}$$

4.3. GRÁFICA DE UNA RELACIÓN DE R EN R.-

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos gráfica de una relación de R en R al conjunto de puntos P(x,y) cuyas coordenadas satisfagan a dicha relación, teniendo en cuenta que una relación puede estar expresada en una de las formas:

$$E(x,y) = 0 \;\vee\; E(x,y) < 0 \;\vee\; E(x,y) > 0 \;\vee\; E(x,y) \le 0 \;\vee\; E(x,y) \ge 0.$$

b) **DISCUSIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA RELACIÓN.-**

Para trazar la gráfica de una relación dada por la ecuación E(x,y) = 0, daremos el siguiente criterio.

1ra. Determinación de las intersecciones con los ejes coordenados.

- **Intersección con el eje X:** $E(x,y) \cap$ eje $x = \{(x, y) \in R^2 \,/\, y = 0\} = P$

  Es decir: para hallar el punto P de intersección con el eje X se hace y = 0 en la ecuación E(x,y) = 0, o sea que se resuelve la ecuación E(x,0) = 0

- **Intersección con el eje Y:** $E(x,y) \cap$ eje $y = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x = 0\} = Q$

  Es decir: para hallar el punto Q de intercesión con el eje Y se hace x = 0 en la ecuación E(x,y) = 0, o sea que se resuelve la ecuación E(0,y) = 0.

2da. Determinación de la simetría con respecto a los ejes coordenados.

- **Simetría con respecto al eje X.**

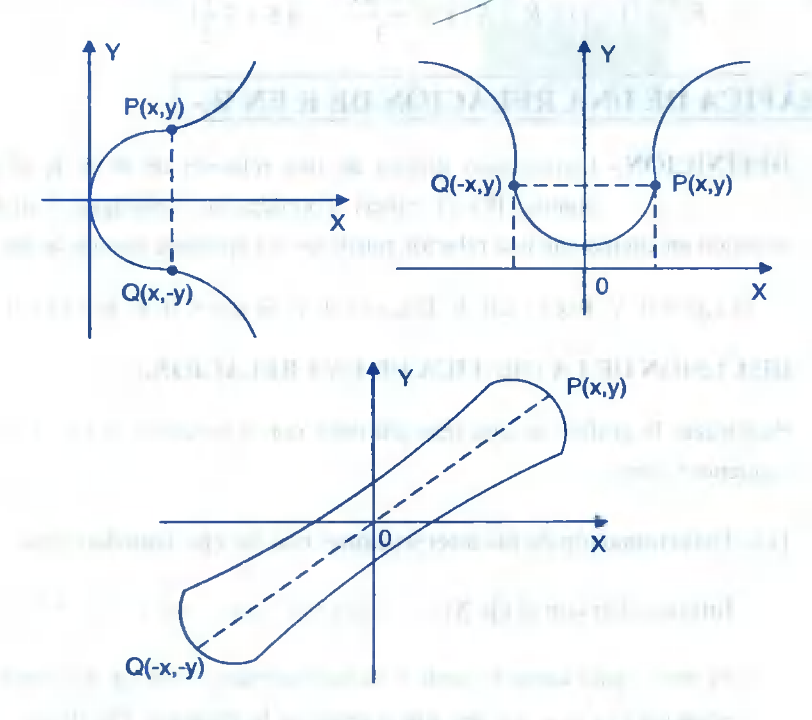
  Existe simetría con respecto a eje X si se cumple E(x,y) = E(x,-y). Fig. (a)

- **Simetría con respecto al eje Y.**

  Existe simetría con respecto al eje Y si se cumple E(x,y) = E(-x,y) Fig. (b)

- **Simetría con respecto al origen.**

  Existe simetría con respecto al origen si se cumple E(x,y) = E(-x,-y). Fig. (c)



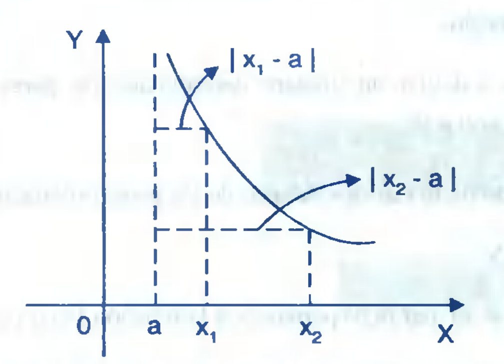
3ra. Determinación de la extensión de la curva.

Consiste en determinar el dominio y el rango de la relación.

4ta. Determinación de las Ecuaciones de las Asíntotas.

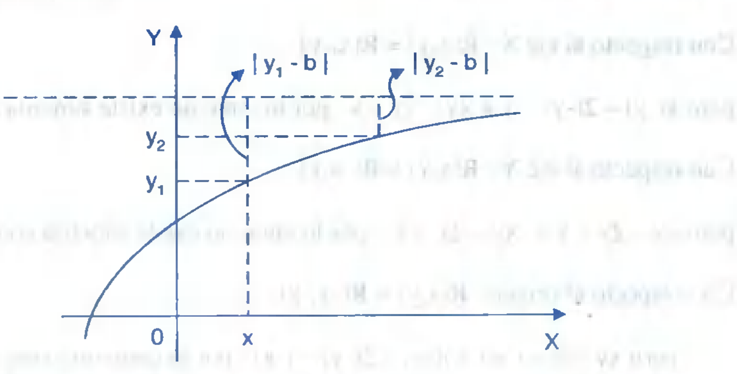
Trataremos solamente de las asíntotas verticales y horizontales.

- **Asíntotas Verticales.-** La recta x=a, es una asíntota vertical de la relación E(x,y) = 0, si para cada (x,y) ∈ E(x,y), se tiene que para "y" bastante grande la distancia de "x""a""a" es decir |x–a| es muy pequeño.



Para calcular las asíntotas verticales se despeja la variable y de la ecuación E(x,y) = 0 es decir: $y = \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$ de donde f y g son expresiones solamente de x, entonces las asíntotas verticales se obtienen de la ecuación g(x) = 0, es decir haciendo el denominador igual a cero.

- **Asíntotas Horizontales.-** La recta y = b es una asíntota horizontal de la relación E(x,y) = 0 sí para cada (x,y) ∈ E(x,y) sé tiene que para "x" bastante grande la distancia de "y" a "b" es decir |y – b| es muy pequeña.



Para calcular las asíntotas horizontales se despeja la variable x de la ecuación E(x.y) = 0, es decir: $x = \frac{f_{(y)}}{g_{(y)}}$ donde f y g son expresiones solamente de y. entonces las asíntotas horizontales se obtienen de la ecuación g(y) = 0 es decir haciendo el denominador igual a cero.

5ta. Tabulación.

Consiste en calcular un número determinado de pares ordenados a partir de la ecuación E(x,y) = 0.

6ta. Trazado de la curva.- Mapeo de los pares ordenados.

OBSERVACIÓN

(1) Diremos que el par (a,b) pertenece a la relación E(x,y) = 0 sí y sólo sí E(a,b) = 0.

Ejemplo.- Discutir y graficar la relación: $R = \{(x,y) \in R \times R \,/\, xy - 2y - x = 0\}$

Solución

A la relación dada escribiremos en la forma: $R(x,y) = xy - 2y - x = 0$

1° Intersección con los ejes coordenados:

- Con el eje X; hacemos, y = 0 ; $R(x,0) = 0 - 0 - x = 0 \Rightarrow x = 0$

- Con el eje Y; hacemos, x = 0; $R(0,y) = 0 - 2y - 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

2° Simetrías:

- Con respecto al eje X: R(x,y) = R(x,-y)

pero $x(-y) - 2(-y) - x \neq xy - 2y - x$, por lo tanto no existe simetría con el eje X.

- Con respecto al eje Y: R(x,y) = R(-x,y)

pero $xy - 2y - x \neq -xy - 2y + x$, por lo tanto no existe simetría con el eje Y.

- Con respecto al origen: R(x,y) = R(-x,-y)

pero $xy - 2y - x \neq (-x)(-y) - 2(-y) - (-x)$, por lo tanto no existe simetría con el origen.

3° Extensión:

- Calculamos el dominio, para esto despejamos y es decir: $y = \dfrac{x}{x-2}$.

Luego $D_R = R - \{2\}$

- Calculamos el rango, para esto despejamos x es decir: $x = \dfrac{2y}{y-1}$

  Luego $R_R = R - \{1\}$

4° Asíntotas:

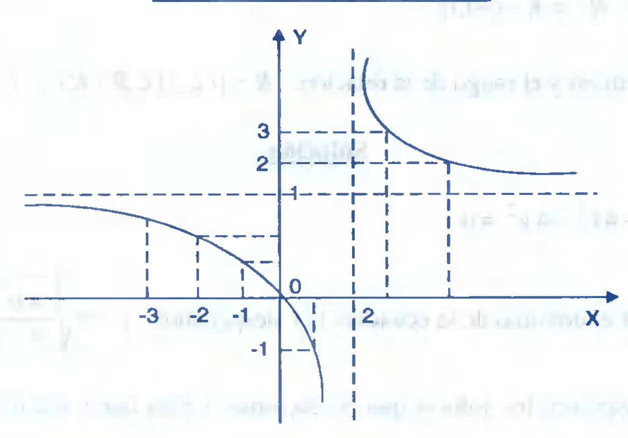
- **Asíntota Vertical:** se despeja y: $y = \dfrac{x}{x-2}$ la ecuación de la asíntota vertical es x=2

- **Asíntota horizontal:** se despeja x:

  $x = \dfrac{2y}{y-1}$, la ecuación de la asíntota horizontal es y = 1.

5° Tabulación:

X	0	1	3	4	-1	-2
Y	0	-1	3	2	0.3	0.5



4.4. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Hallar el dominio y rango de la relación: $R = \{(x,y) \in RxR \,/\, xy^2 - x + 3y^2 + 1 = 0\}$

<u>Solución</u>

Calculando el dominio de la relación R, para esto despejamos y de la ecuación

$$xy^2 - x + 3y^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (x+3)y^2 = x-1 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$$

Analizando los valores que pueda tomar x para que y sea real, en este caso debe cumplirse: $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$.

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -3 & & 1 & \end{array}$$

Luego $D_R = <-\infty,-3> U[1,+\infty>$

Ahora calculamos el rango de la relación R.

Para esto despejamos x de la ecuación: $xy^2 - x + 3y^2 + 1 = 0$

$$x(y^2-1) = -3y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3y^2+1}{y^2-1}$$

Luego los valores que puede tomar y para x sea real es que y ≠ ± 1

Por lo tanto $R_R = R - \{-1,1\}$

(2) Hallar el dominio y el rango de la relación: $R = \{(x, y) \in R\, x\, R \,/\, x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0\}$

Solución

Sea $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$ **... (1)**

Para calcular el dominio de la ecuación (1) despejamos $y = \pm\sqrt{\frac{4x^2}{x^2-4}}$

Ahora analizaremos los valores que pueda tomar x para que y sea real, en este caso debe cumplir: $\frac{x^2}{x^2-4} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2-4} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)(x-2)} \geq 0$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -2 & & 2 & \end{array}$$

La solución es x ∈ <-∞,-2> ∪ <2,+∞>

Para x = 0 también se verifica. Por lo tanto: $D_R = <-\infty,-2> \cup <2,+\infty> \cup \{0\}$

Ahora calculamos el rango de la relación para esto despejamos x de la ecuación (1)

$x=\pm\sqrt{\dfrac{4y^2}{y^2-4}}$, analizando los valores que pueda tomar y para que x sea real, en este caso

se tiene $\dfrac{4y^2}{y^2-4}\geq 0$

$\forall\ y\in R,\ \ y^2\geq 0\ \ \Rightarrow\ \ y=0$ se cumple, $\dfrac{4y^2}{y^2-4}\geq 0\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{(y-2)(y+2)}\geq 0$

+ -2 - 2 +

La solución es y ∈ <-∞,-2> ∪ <2,+∞>

Por lo tanto: $R_R=<-\infty,-2>\cup<2,+\infty>\cup\{0\}$

(3) Sí A = {2,3,6,9,11} y B = {1,4,5,6,12,14}

Expresar por extensión cada una de las siguientes relaciones:

a) R = {(x,y) ∈ A x B / y = 3x}

Solución

R = {(2,6)}

b) R = {(x,y) ∈ A x B / x + y = 12}

Solución

R = {(6,6),(11,1)}

c) R = {(x,y) ∈ A x B / y = x}

Solución

R = {(6,6)}

(4) Si el universo es $U = \{1,2,3,4,5\}$ determinar por comprensión cada una de las relaciones:

a) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

Solución

$$R = \{(x,y) \in U \times U \,/\, y = x\}$$

b) $R = \{(3,1),(4,2),(5,3)\}$

Solución

$$R = \{(x,y) \in U \times U \,/\, y = x - 2\}$$

(5) La relación $R = \{(x,y) \in Z \times Z \,/\, x - y = 2k,\ k \in Z\}$. Es una relación de equivalencia

Solución

a) Reflexiva: Si $x = y \Rightarrow y - x = 0$

$$\Rightarrow x - x = 2(0),\ 0 \in Z$$

Luego $\forall (x,x) \in R \quad \therefore$ R es reflexiva.

b) Simetría: Como $x - y = 2k$, multiplicando por -1 se tiene: $y - x = 2(-k)$, $-k \in Z$

Luego $(y,x) \in R \quad \therefore$ R es simétrica

c) Transitiva: Sí $(x,y) \in R \Rightarrow x - y = 2k_1,\ k_1 \in Z$

$$(y,z) \in R \Rightarrow y - z = 2k_2,\ k_2 \in Z$$

$$x - z = 2(k_1 + k_2),\ k_1 + k_2 \in Z$$

Luego $(x,z) \in R \quad \therefore$ R es transitiva. Por lo tanto R es de equivalencia.

(6) La relación R definida por: $R = \{(x,y) \in R \times R \,/\, |x - y| \le 4\}$, R es de equivalencia.

Solución

a) Reflexiva: $\forall x \in R, |x - x| = 0 \le 4 \Rightarrow (x,x) \in R \qquad \therefore$ R es reflexiva

b) Simétrica: $(x,y) \in R \Rightarrow |x - y| \leq 4$

$\Rightarrow |y - x| \leq 4 \Rightarrow (y,x) \in R$ $\therefore$ R es simétrica.

c) R no es transitiva: para esto tomemos dos pares ordenados

$(7,4) \in R \Rightarrow |7 - 4| = 3 \leq 4$

$(4,1) \in R \Rightarrow |4 - 1| = 3 \leq 4$

$(7,1) \in R \Rightarrow |7 - 1| = 6 \not\leq 4$, luego R no es transitiva.

Por lo tanto R no es de equivalencia.

(7) Determinar sí la relación: $R = \{(x, y) / \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x, y \in R^+\}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Solución

a) Reflexiva: Sí $x \in R^+ \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x} \neq 1, \quad x \neq \frac{1}{4}$.

Luego $(x,x) \notin R \Rightarrow$ R no es reflexiva.

b) Simétrica: Sí $(x,y) \in R \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

$\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1 \Rightarrow (y,x) \in R$

Por lo tanto R es simétrica.

c) Transitiva: Sí $(x,y) \in R$ entonces: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

$(y,z) \in R$ entonces $\sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$

$$\sqrt{x} + \sqrt{z} = 2(1 - \sqrt{y}) \neq 1$$

$\Rightarrow (x,z) \notin R$, por lo tanto no es transitiva.

(8) Discutir y graficar la relación: $R = \{(x, y) \in RxR / x^2 y - 4y + x = 0\}$

Solución

La relación dada también se escribe así: $R(x, y) = x^2 y - 4y + x = 0$

Ahora haremos la discusión correspondiente:

1ra. Intersección con los ejes coordenados

- Con el eje X, hacemos y = 0; R(x,0) = 0 – 0 + x = 0 $\Rightarrow$ x = 0

- Con el eje Y, hacemos x = 0; R(0,y) = 0 – 4y + 0 = 0 $\Rightarrow$ y = 0

2da. Simetrías

- Con respecto al eje X: R(x,y) = R(x,-y).

  Pero $x^2(-y) - 4(-y) + x \neq x^2 y - 4y + x$, por lo tanto no existe simetría en el eje X.

- Con respecto al eje Y: R(x,y) = R(-x,y)

  Pero $x^2 y - 4y + x \neq (-x)^2 y - 4y - x$, por lo tanto no existe simetría con el eje Y.

- Con respecto al origen: R(x,y) = R(-x,-y)

  $x^2 y - 4y + x = (-x)^2 - 4(-y) - x$, por lo tanto si existe en el origen.

3ra. Extensión.

- Calculamos el dominio, para esto despejamos y, $y = \dfrac{-x}{x^2 - 4}$

  el dominio es: R = {-2,2}

- Calculamos el rango, para esto despejamos x

  $$x^2 y - 4y + x = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16y^2}}{2y};\ y \neq 0$$

  el rango es todos los reales R, puesto que y = 0, x = 0, la ecuación se verifica.

4ta. Asíntotas

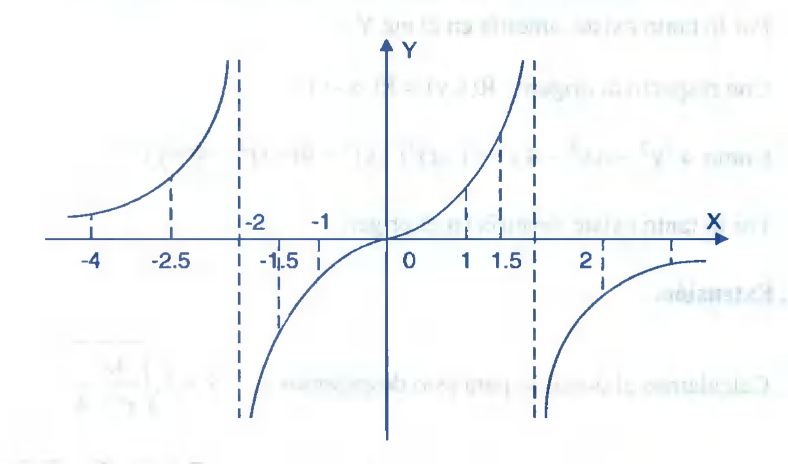
- Asíntotas Verticales: se despeja y, $y = \frac{-x}{x^2 - 4}$, las ecuaciones de las asíntotas verticales se obtienen de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ de donde x = -2, x = +2 es decir: x = ± 2 son las asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales, se despeja x, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16y^2}}{2y}$

  La ecuación de la asíntota horizontal es y = 0

5ta. Tabulación.

x	-4	-2.5	-1.5	-1	0	1	1.5	2.5	4
y	0.3	1.1	-0.9	-0.3	0	0.3	0.9	1.1	-0.3



(9) Discutir y graficar la relación: $R = \{(x, y) \in RxR \,/\, x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0\}$

Solución

A la relación dada escribiremos en la forma: $R(x, y) = x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$

Ahora haremos la discusión correspondiente.

1ra. Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X, hacemos y = 0 de donde $R(x,0)=0-4x^2-0=0 \Rightarrow x=0$

- Con el eje Y, hacemos x = 0 de donde $R(0,y)=0-0-4y^2=0 \Rightarrow y=0$

2da. Simetrías:

- Con respecto al eje X: R(x,y) = R(x,-y)

  Como $x^2y^2-4x^2-4y^2=x^2(-y)^2-4x^2-4(-y)^2$

  Por lo tanto existe simetría en el eje X.

- Con respecto al eje Y: R(x,y) = R(-x,y)

  Como $x^2y^2-4x^2-4y^2=(-x)^2y^2-4(-x)^2-4y^2$

  Por lo tanto existe simetría en el eje Y.

- Con respecto al origen: R(x,y) = R(-x,-y)

  Como $x^2y^2-4x^2-4y^2=(-x)^2(-y)^2-4(-x)^2-4(-y)^2$

  Por lo tanto existe simetría en el origen.

3ra. Extensión.

- Calculamos el dominio para esto despejamos y, $y=\pm\sqrt{\frac{4x^2}{x^2-4}}$

  y es real sí $\frac{4x^2}{x^2-4}\geq 0 \Rightarrow \frac{1}{(x-2)(x+2)}\geq 0$

  + −2 − 2 +

  $x \in \langle-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$ por lo tanto $\therefore \quad D_R=\langle-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle \cup \{0\}$

- Calculamos el rango, para esto despejamos x, $x=\pm\sqrt{\frac{4y^2}{y^2-4}}$

x es real si $\frac{4y^2}{y^2-4} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{(y-2)(y+2)} \geq 0$

+ -2 - 2 +

$y \in \langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$. Por lo tanto $\therefore R_R = \langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle \cup \{0\}$

4ta. Asíntotas.

- **Asíntotas verticales:** se despeja $y = \pm\sqrt{\frac{4x^2}{x^2-4}}$

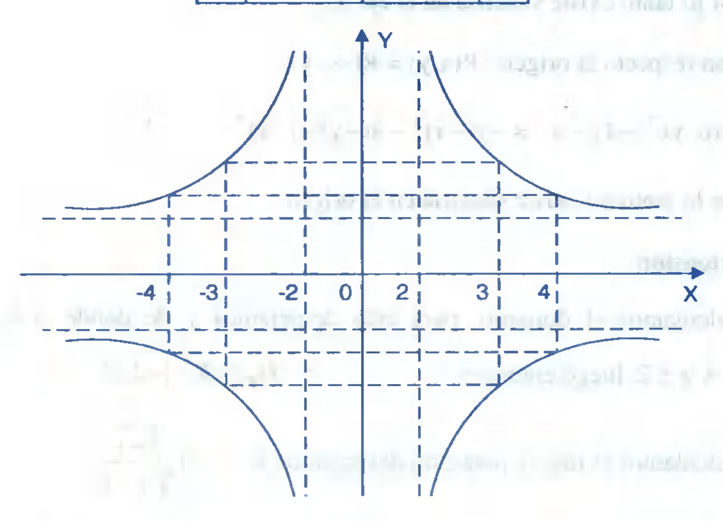
  Las asíntotas verticales se obtiene de la ecuación $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

- **Asíntotas horizontales:** se despeja $x = \pm\sqrt{\frac{4y^2}{y^2-4}}$

  Las asíntotas horizontales se obtienen de la ecuación $y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$

5ta. Tabulación.

x	± 3	± 4	0
y	$\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}$	$\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$	0



(10) Discutir y graficar la relación. $R = \{(x, y) \in RxR \,/\, yx^2 - 4y - x^2 = 0\}$

Solución

A la relación dada escribiremos en la forma: $R(x,y) = yx^2 - 4y - x^2 = 0$

Ahora haremos la discusión correspondiente

1ra. Intersección con los ejes coordenados.

- Con el eje X, hacemos y = 0, de donde $R(x,0) = 0 - 0 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

- Con el eje Y, hacemos x = 0, de donde $R(0,y) = 0 - 4y - 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

2da. Simetrías

- Con respecto al eje X: R(x,y) = R(x,-y)

  pero $yx^2 - 4y - x^2 \neq -yx^2 - 4(-y) - x^2$

  por lo tanto no existe simetría en el eje X.

- Con respecto al eje Y: R(x,y) = R(-x,y)

  como $yx^2 - 4y - x^2 = y(-x)^2 - 4y - (-x)^2$

  por lo tanto existe simetría en el eje Y.

- Con respecto al origen: R(x,y) = R(-x,-y)

  pero $yx^2 - 4y - x^2 \neq -y(-x)^2 - 4(-y) - (-x)^2$

  por lo tanto no existe simetría en el origen.

3ra. Extensión.

- Calculamos el dominio, para esto despejamos y de donde $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$, y es real si $x \neq \pm 2$, luego entonces $\therefore D_R = R - \{-2,2\}$

- Calculamos el rango, para esto despejamos x., $x = \pm\sqrt{\frac{4y}{y-1}}$

  x es real sí: $\frac{4y}{y-1} \geq 0$

  + (0) - (1) +

$y \in \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, +\infty \rangle$, $\quad \therefore \quad R_R = \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, +\infty \rangle$

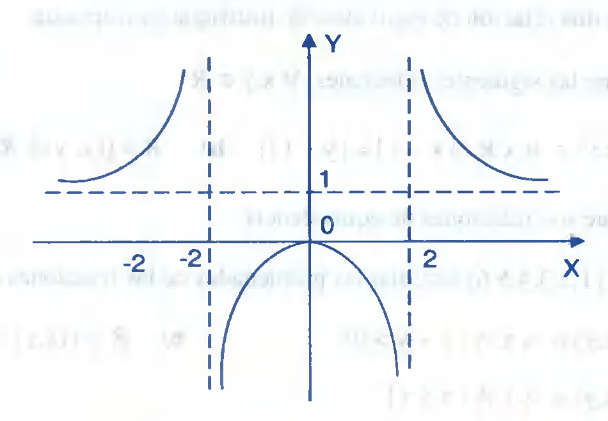
4ta. Asíntotas

- **Asíntotas verticales,** se despeja y, $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$, las asíntotas verticales se obtienen de la ecuación $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

- **Asíntotas horizontales,** se despeja x, $x = \pm\sqrt{\dfrac{4y}{y-1}}$, las asíntotas horizontales se obtienen de la ecuación $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$.

5ta. Tabulación.

x	0	±1	±1.5	±2.5	±3
y	0	-0.3	-1.2	2.7	1.8



4.5. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Hallar el dominio y rango de las relaciones.

a) $R = \{(x, y) \in RxR \,/\, y = x^2 - 4x,\ y \le 0\}$

b) $R = \{(x, y) \in RxR \,/\, y = \sqrt{4 - x^2}\}$

c) $R = \{(x, y) \in RxR \,/\, x^2 = y - 1\}$

d) $R = \{(x,y) \in RxR \,/\, xy - 2y - x = 0\}$

e) $R = \{(x, y) \in RxR \,/\, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1\}$

f) $R = \{(x, y) \in RxR \,/\, x^2 y^2 + xy = 5\}$

g) $R=\{(x,y)\in RxR\,/\,y=\dfrac{1}{2x^2-3x-5}\}$ h) $R=\{(x,y)\in RxR\,/(x^2-4)y=y^2\}$

i) $R=\{(x,y)\in RxR\,/\,x^2y^2-2x+y^2-4=0\}$

j) $R=\{(x,y)\in RxR\,/(x^2-6x+5)y^2=4y-1\}$

(2) Sí $U=\{x\in Z^+\,/\,x$ impar $\wedge$ $x\le 8\}$. Tabular las siguientes relaciones en U

a) $R=\{(x,y)\in U\times U\,/\,x=3 \vee y=5\}$ b) $R=\{(x,y)\in U\times U\,/\,x+y=8\}$

c) $R=\{(x,y)\in U\times U\,/\,xy=21\}$ d) R={(x,y)∈UxU / x divide a 20}

(3) En el conjunto de los naturales N se define una relación R de la siguiente forma:

$R=\{(x,y)\in NxN\,/\,x^2+x=y^2+y\}$

es decir si es una relación de equivalencia, justifique su respuesta.

(4) En R se define las siguientes relaciones, ∀ x,y ∈ R

a) $R=\{(x,y)\in R\times R\,/\,|x-1|=|y-1|\}$ b) $R=\{(x,y)\in RxR\,/\,x^2-x=y^2-y\}$.

Demostrar que son relaciones de equivalencia.

(5) Siendo A = {1,2,3,4,5,6} estudiar las propiedades de las relaciones binarias.

a) $R=\{(x,y)\in A\times A\,/\,x+y>0\}$ b) $R=\{(x,y)\in A\times A\,/\,x-y<2\}$

c) $R=\{(x,y)\in A\times A\,/\,x\le y\}$

Rpta. a y c es de equivalencia, b) es reflexiva

(6) En A = {1,2,3,4} se considera la relación $R=\{(x,y)\in A\times A\,/\,x=y \vee x+y=3\}$

Es de equivalencia. **Rpta.** Si

(7) En Z define la relación R: $R=\{(x,y)\in ZxZ\,/\,x^2+x=y^2+y\}$. Graficar R.

(8) Clasificar la relación R definida en Z x Z mediante $(a,b)R(a',b')\iff ab'=ba'$

Rpta. R es de equivalencia.

(9) Definimos en el conjunto Z x (Z – 0) la siguiente relación (a,b) R (c,d) ⇔ ad = bc

Es una relación de equivalencia **Rpta.** R es una relación de equivalencia

(10) Demostrar que la relación dada por: R = {(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)}

En el conjunto A = {a,b,c,d} es una relación de equivalencia.

(11) Discutir y graficar las relaciones siguientes:

a) $xy^2 - 3y^2 - 1 = 0$ **b)** $y^2(x^2 - 4) = x + 2$

c) $y^2 = \dfrac{x^2}{3-x}$ **d)** $y = \dfrac{1}{2x^2 - 3x - 5}$

e) $x^2y^2 - x^2 + y^2 + 1 = 0$ **f)** $x^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = 0$

g) $xy - 2x - y - 2 = 0$ **h)** $y^2(x+1) = 4$

(12) Discutir y graficar las relaciones siguientes:

a) $xy^2 + xy - 6x - 3 = 0$ **b)** $y = \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{x^2}$

c) $y^2 = \dfrac{4x^2}{x^2 - 4}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 5x + 2}$

e) $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ **f)** $y = \dfrac{x(x+3)}{(x+2)(x-2)}$

g) $yx^2 - 25y - x = 0$ **h)** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$

(13) Discutir y graficar las relaciones siguientes:

a) $y = \dfrac{x^2 - 25}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{4x - 5}{2(x^2 - 1)}$

c) $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$ **d)** $xy^2 - 4x^2 - 3y^2 + 12x = 0$

(14) Discutir y graficar la relación R definida por: $R = \{(x, y) \in RxR / y = \dfrac{(2x-1)^2 - 4}{x^2 - 7x + 10}\}$

4.6. FUNCIONES.-

Se va a introducir el concepto de función, hablando libremente una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla (procedimiento o mecanismo) que nos transporta de un conjunto a otro de manera que asociamos cada elemento de A un único elemento en B.

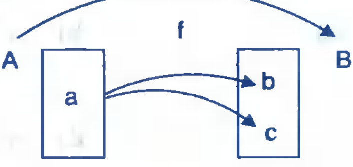
a) **DEFINICIÓN.-** Consideremos dos conjuntos cualquiera A y B, a la relación binaria f de A en B le llamaremos función de A en B, si y sólo si, verifica:

> **i)** $f \subseteq A \times B$
>
> **ii)** $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c$

esto quiere decir, que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.



Gráficamente:



f es función, sí b = c

OBSERVACIONES:

(1) Una función f de A en B denotaremos por: f: A $\longrightarrow$ B; o $A \xrightarrow{f} B$ y se lee “f es una función de A en B”, donde el conjunto A le llamaremos conjunto de partida y el conjunto B le llamaremos conjunto de llegada.

(2) Si el par (a,b) ∈ f, escribiremos b = f(a) y se dice que b es la imagen de “a” por f o también, que b = f(a) es el valor de f en el punto a.

(3) Sí A = B = R, a la función f: R $\longrightarrow$ R, se denomina función real de variable real.

(4) Teniendo en cuenta la parte 2) se tiene la siguiente notación:

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x,y) \in f$$

donde y = f(x) se lee "y es función de x" ó "y es la imagen de x por f".

(x,y) ∈ f se lee "el par (x,y) pertenece a f".

Ejemplo.- f(1) = 3 ⇔ (1,3) ∈ f

(5) De la parte 4), a la función f se puede escribir en la forma:

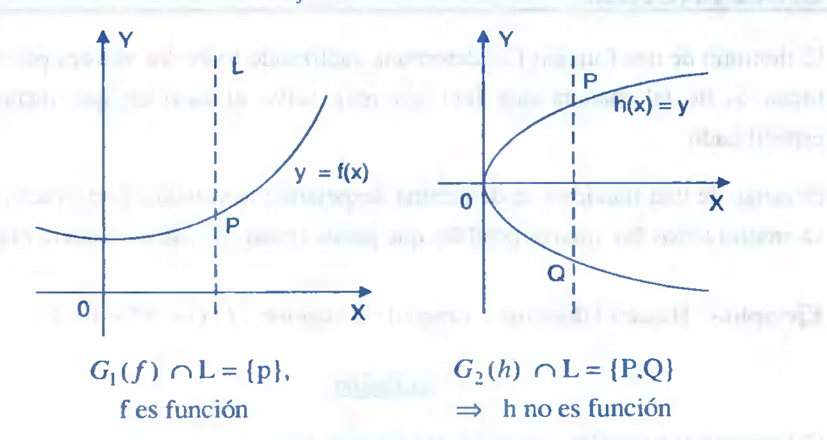
$$f = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = f(x)\}$$

donde la ecuación y = f(x) es llamada regla de correspondencia.

OBSERVACIÓN.- Una consecuencia inmediata de la definición a), es que toda función es una relación pero no toda relación es una función.

Ejemplo.- La relación: R = {(1,2),(2,3),(3,4),(2,5)} no es una función, puesto que para el elemento 2 existen dos elementos 3 y 5 tales que (2,3),(2,5) ∈ R, que contradice a la definición de función.

b) DEFINICIÓN GEOMÉTRICA.- f es una función ⇔ cualquier recta perpendicular al eje X corta a la gráfica de f en un sólo punto. Es decir: $G_f(f) \cap L = \{punto\}$



$G_1(f) \cap L = \{p\}$, f es función

$G_2(h) \cap L = \{P,Q\}$ ⇒ h no es función

4.7. DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN.-

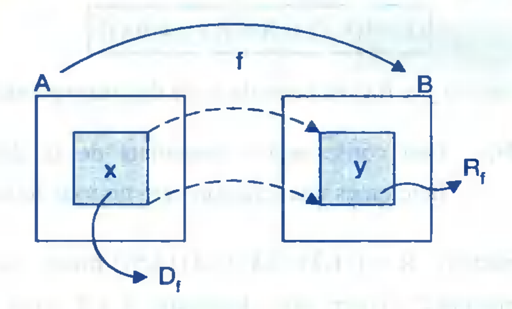
Sea f: A ⟶ B una función de A en B, llamaremos dominio de la función f, al conjunto de todas sus primeras componentes, al cual denotaremos por D_f, es decir:

$$D_f = \{x \in A \,/\, \exists\ y \in B\ \wedge\ (x,y) \in f\} \subseteq A$$

y llamaremos rango de la función f al conjunto de las imágenes de todos los elementos de A, mediante f al cual denotaremos por R_f es decir:



$$R_f = \{y \in B \,/\, \exists\ x \in A\ \wedge\ (x,y) \in f\} \subseteq B$$



Ejemplo.- Sea f = {(1,2),(3,4),(5,6),(7,8)} su dominio y rango es: $D_f = \{1,3,5,7\}$; $R_f = \{2,4,6,8\}$

4.8. CRITERIO PARA EL CÁLCULO DEL DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN.

El dominio de una función f se determina analizando todos los valores posibles que pueda tomar x, de tal manera que f(x) sea real, salvo el caso en que dicho dominio sea especificado.

El rango de una función f se determina despejando la variable x en función de "y", luego se analiza todos los valores posibles que pueda tomar "y", de tal manera que x sea real.

Ejemplo.- Hallar el dominio y rango de la función $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$

Solución

Calculando el dominio: como y = f(x,) entonces:

$y = \sqrt{2 + x - x^2}$ luego "y" es real si, $2 + x - x^2 \geq 0$, de donde

$x^2 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) \leq 0$

+ - +
-1 2

Luego el dominio es: $\therefore\ D_f = [-1,2]$

Calculando el rango: como $y = \sqrt{2+x-x^2}$, $y \geq 0$

$y^2 = 2+x-x^2$, despejamos x, es decir: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9-4y^2}}{2}$

Luego x es real si $9-4y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \dfrac{9}{4} \Rightarrow -\dfrac{3}{2} \leq y \leq \dfrac{3}{2}$

Por lo tanto $R_f = [0,+\infty> \cap [-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}] = [0,\dfrac{3}{2}]$ de donde $\therefore\ R_f = [0,\dfrac{3}{2}]$

Ejemplo.- Hallar el rango de la función: $f(x) = x^2 - 4x + 7$, $x \in [2,3]$

Solución

En este caso el dominio esta especificado $x \in [2,3]$ ahora calculando el rango: como

$y = f(x) = x^2 - 4x + 7$. Despejamos x es decir: $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4y-12}}{2} = 2 \pm \sqrt{y-3}$

$x = 2 \pm \sqrt{y-3} \in [2,3] \Rightarrow 2 \leq 2 \pm \sqrt{y-3} \leq 3$

$0 \leq \pm\sqrt{y-3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{y-3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y-3 \leq 1$

$3 \leq y \leq 4 \Rightarrow y \in [3,4]$ por lo tanto $\therefore\ R_f = [3,4]$

4.9. APLICACIONES DE A EN B.-

A una función f, le llamaremos aplicación de A en B, si y sólo si: $D_f = A$.

EN FORMA SIMBÓLICA: Un conjunto $f \subseteq AxB$ es una aplicación de A en B $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A, \exists y \in B$, tal que $y = f(x)$.

OBSERVACIÓN.- Una aplicación es un caso particular de una función, luego toda aplicación es una función, pero toda función no siempre es una aplicación.

NOTA.- Algunos autores consideran a la función y aplicaciones como sinónimos, en estos apuntes, a las aplicaciones las consideraremos como casos particulares de las funciones.

Ejemplo.- Sean A = {1,3,5}, B = {2,4,6}, calculando A x B

A x B = {(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)}

a) El conjunto f = {(1,4),(3,2)} es función donde $D_f = \{1,3\}$ y $R_f = \{4,2\}$ pero f no es una aplicación de A en B puesto que $D_f \neq A$.

b) El conjunto f = {(1,2),(3,4),(5,6)} es una función donde: $D_f = \{1,3,5\}$ y $R_f = \{2,4,6\}$ como $D_f = A$ entonces f es una aplicación de A en B.

4.10. FUNCIONES ESPECIALES.-

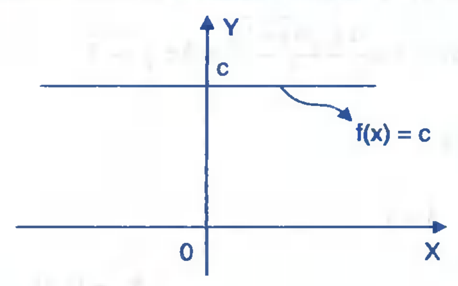
① **FUNCIÓN CONSTANTE.-** A la función f, le llamaremos función constante, si su regla de correspondencia es:

f(x) = c, donde c es una constante.

También a la función constante, se puede definir por:

f = {(x,y) ∈ R x R / y = c, c constante}

donde su dominio es $D_f = R$, su rango es $R_f = \{c\}$ y su gráfica es:



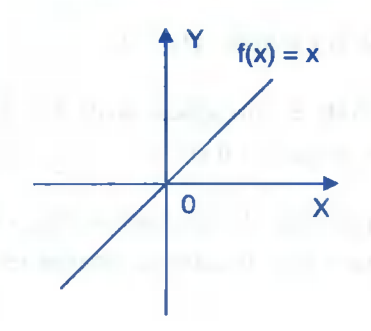
② **FUNCIÓN IDENTIDAD.-** A la función f, le llamaremos función identidad, si su regla de correspondencia es:

f(x) = x

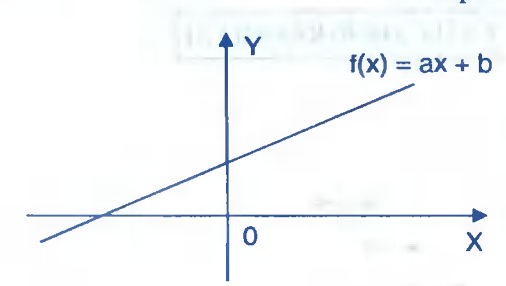
También a la función identidad se define:

f = {(x,y) ∈ R x R / y = x}, donde $D_f = R$, $R_f = R$

y su gráfica es:



③ **FUNCIÓN LINEAL.-** A la función f, le llamaremos función lineal, si su regla de correspondencia es:

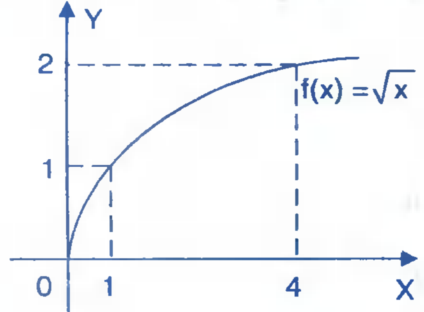


$$f(x) = ax + b$$

donde a,b son constantes y $a \neq 0$. También a la función lineal se puede expresar en la forma:

$f = \{(x,y) \in R x R / y = ax + b\}$, donde $D_f = R$ y $R_f = R$; $a,b \in R$ y $a \neq 0$, cuya gráfica es:

④ **FUNCIÓN RAIZ CUADRADA.-** A la función f, le llamaremos función raíz cuadrada, si su regla de correspondencia es:



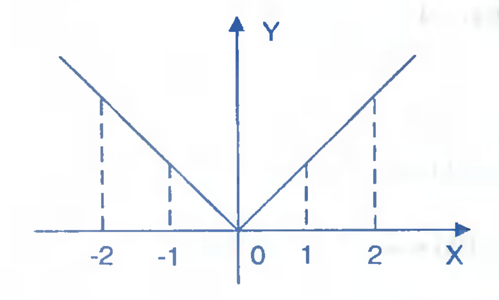
$$f(x) = \sqrt{x}$$

También se puede expresar en la forma:

$$f = \{(x,y) \in RxR / y = \sqrt{x}\}$$

donde $D_f = R^+$ y $R_f = [0,+\infty>$

⑤ **FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.-** A la función f, le llamaremos función valor absoluto, si su regla de correspondencia es:



$$f(x) = |x|, \text{ donde } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

También se puede expresar en la forma:

$$f = \{(x,y) \in R \times R / y = |x|\}$$

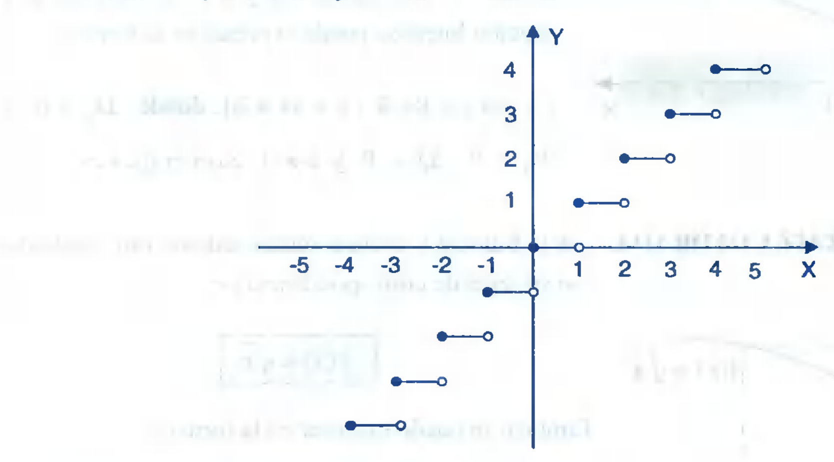
Donde $D_f = R$ y $R_f = [0,+\infty>$ y su gráfica es:

⑥ **FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO.-** A la función f, le llamaremos función máximo entero, si su regla de correspondencia es:

$$f(x)=[|x|] \quad \text{donde} \quad [|x|]=n \iff n \le x < n+1,\ n \in Z$$

También se puede expresar en la forma: $f=\{(x,y)\in RxR\,/\,y=[|x|]\}$

donde $D_f = R$ y $R_f = Z$



Si $x \in [0,1> \iff f(x)=[|x|]=0 \Rightarrow f(x)=0$

Si $x \in [1,2> \iff f(x)=[|x|]=1 \Rightarrow f(x)=1$

Si $x \in [2,3> \iff f(x)=[|x|]=2 \Rightarrow f(x)=2$

Si $x \in [3,4> \iff f(x)=[|x|]=3 \Rightarrow f(x)=3$

. . .
. . .
. . .

Si $x \in [-1,0> \iff f(x)=[|x|]=-1 \Rightarrow f(x)=-1$

Si $x \in [-2,-1> \iff f(x)=[|x|]=-2 \Rightarrow f(x)=-2$

Si $x \in [-3,-2> \iff f(x)=[|x|]=-3 \Rightarrow f(x)=-3$

. . .
. . .
. . .

⑦ **FUNCIÓN SIGNO.-**

A la función f, le llamaremos función signo, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = sig(x), \text{ donde } sig(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

También puede expresar en la forma:

$$f = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = sig(x)\}$$

Donde $D_f = R$, $R_f = \{-1,0,1\}$ y su gráfica es:

⑧ **FUNCIÓN CUADRÁTICA.-**

A la función f, le llamaremos función cuadrática, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,,\ a,b,c \in R,\ a \neq 0$$

También a la ecuación cuadrática se expresa así:

$$f = \{(x,y) \in RxR \,/\, y = ax^2 + bx + c,\ \ a,b,c \in R,\ a \neq 0\}$$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola con eje perpendicular al eje X en el cual se presenta dos casos.

Si $a > 0$ la gráfica se abre hacia arriba.

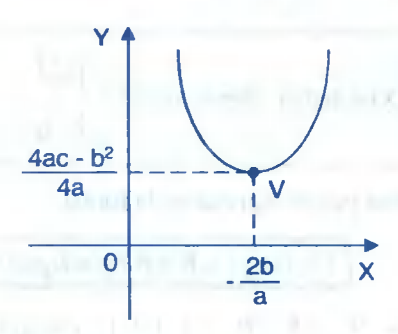
Si $a < 0$ la gráfica se abre hacia abajo.

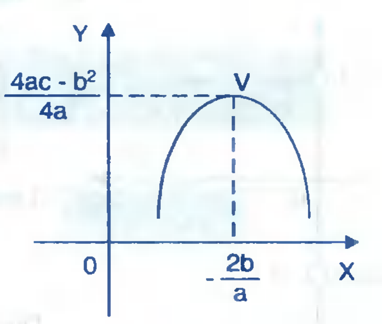
El dominio de la función cuadrática es: $D_f = R$, El rango se determina completando cuadrados.

Como $f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad f(x) = a(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}) + c - \dfrac{b^2}{4a}$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Luego el vértice de la parábola es: $V(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$





Si a > 0 se tiene: $D_f = R$, $R_f = [\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty >$

Si a < 0, se tiene: $D_f = R$, $R_f = < -\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$

⑨ FUNCIÓN POLINOMIAL.-

A la función f, le llamaremos función polinomial, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \ x \in R$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son números reales, $a_n \neq 0$.

Ejemplo.- $f(x) = 5x^5 + 7x^4 + 3x + 6$, es una función polinomial.

⑩ FUNCIÓN RACIONAL.-

A la función f, le llamaremos función racional, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}; \quad n, m \in Z^+$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_m$ son constantes reales y $b_m \neq 0$

Ejemplo.- La función $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 17}{x^2 - 5x + 6}$, es una función racional cuyo dominio es el conjunto de todas las x, de tal manera que el denominador no se anule, es decir: $D_f = \{x \in R / x^2 - 5x + 6 \neq 0\} = R - \{2,3\}$

4.11. EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN.-

Consideremos una función f con regla de correspondencia.

$$y = f(x), \quad x \in D_f$$

Si x toma valores específicos, por ejemplo: $x = x_0$, entonces $y_0 = f(x_0)$ se dice que la función ha sido evaluada, en otras palabras es:

Cuando $x = x_0$ el valor de la función es $f(x_0)$

Ejemplo.- Si $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$, el valor de f en el punto x = 2 es f(2) es decir:

$$f(2) = 2(2)^3 + (2)^2 + 2 + 2 = 16 + 4 + 2 + 2 = 24$$

Ejemplo.- Si $f(x) = x^2 + x + 1$ entonces $f(z) = z^2 + z + 1$

$$f(\sqrt{y}) = y + \sqrt{y} + 1$$

Ejemplo.- Si $f(x) = 5^x$, probar que f(x + y) = f(x).f(y)

Solución

$$f(x+y) = 5^{x+y} = 5^x.5^y = f(x).f(y)$$

$$\therefore \ f(x + y) = f(x).f(y)$$

4.12. FUNCIONES DEFINIDAS CON VARIAS REGLAS DE CORRESPONDENCIA.

En las funciones definidas con dos o más reglas de correspondencia, su dominio y rango se determinan de la siguiente forma:

Suponiendo que la función f es definida por:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_{f_1} \\ f_2(x), & x \in D_{f_2} \end{cases}, \text{ donde } D_{f_1} \cap D_{f_2} = \phi$$

el dominio de f(x) se determinan así: $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$

el rango de la función f(x) se calcula por: $\boxed{R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2}}$

Esta forma de calcular dominio y rango de una función con dos reglas de correspondencia, también se extiende a funciones de tres o más reglas de correspondencia.

Ejemplo.- Calcular el dominio y rango de la función: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x\geq 1 \\ x^2-2 & si \quad x<0 \end{cases}$

Solución

Calculando su dominio se tiene: $\begin{cases} f_1(x)=2x+1, & si \quad x\geq 1 \\ f_2(x)=x^2-2, & si \quad x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{f_1} = [1,+\infty> \\ D_{f_2} = <-\infty,0> \end{cases}$

Luego su dominio de f(x) es: $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = [1,+\infty> \cup <-\infty,0>$

$\therefore \ D_f = <-\infty,0> \cup [1,+\infty>$

Ahora calcularemos el rango:

Si $x \geq 1 \Rightarrow y = 2x+1$ despejamos x: $x=\dfrac{y-1}{2}\geq 1 \Rightarrow y\geq 3$ de donde: $y\in [3,+\infty>$

Si $x<0 \Rightarrow y=x^2-2$, despejando x se tiene: $x=-\sqrt{y+2}<0 \Rightarrow \sqrt{y+2}>0 \Rightarrow y>-2$

de donde: $y\in <-2,+\infty>$

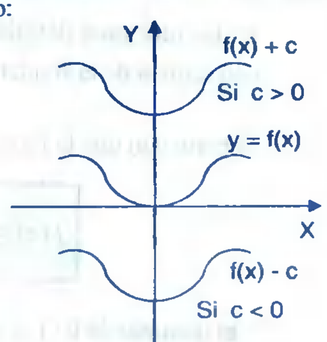
Luego el rango de la función f es dada por: $R_f = <-2,+\infty> \cup [3,+\infty> = <-2,+\infty>$

4.13. TRAZADO DE GRÁFICOS ESPECIALES.-

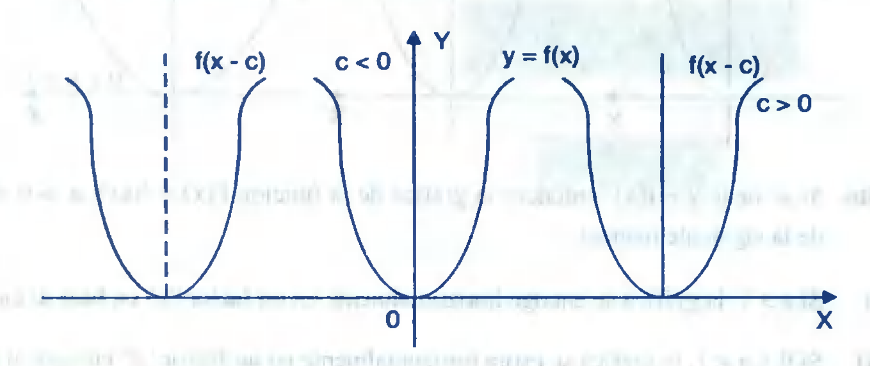
Cuando se conoce una función y = f(x), en base a esta función, se puede construir otra función en una forma rápida mediante el siguiente criterio:

1er. Si se tiene la gráfica de y = f(x) entonces la gráfica de la función:

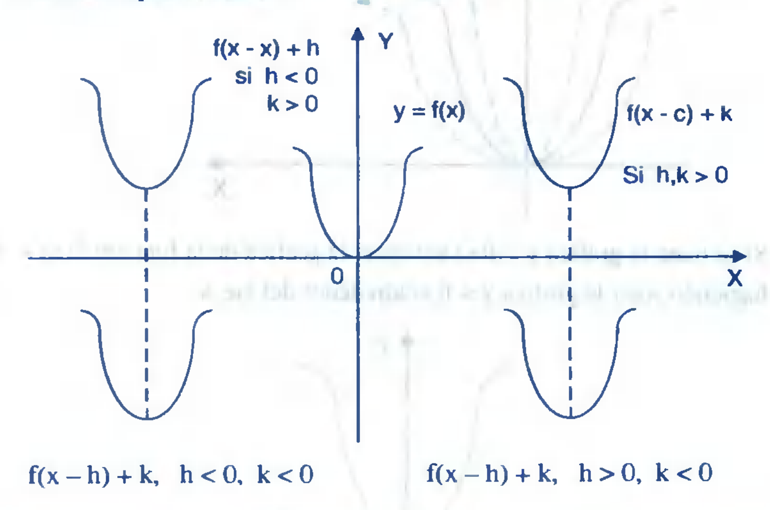
F(x) = f(x) + c se obtiene desplazando verticalmente la gráfica de y = f(x) en c unidades, siendo hacia arriba si c > 0 y hacia abajo si c < 0.



2do. Si se tiene la gráfica de $y = f(x)$ entonces la gráfica de la función $F(x) = f(x - c)$ se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ en c unidades, siendo hacia la derecha si $c > 0$ y hacia la izquierda si $c < 0$.



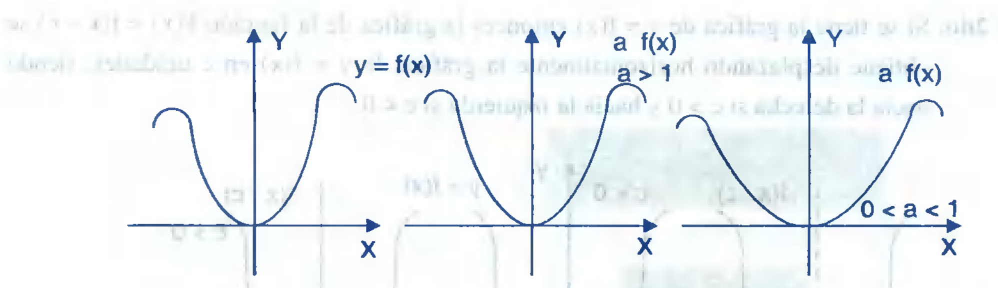
3er. Si se tiene la gráfica de $y = f(x)$ entonces la gráfica de la función $F(x) = f(x - h) + k$ se obtiene desplazando horizontal y verticalmente la gráfica $y = f(x)$ en h y k unidades respectivamente.



4ta. Si se tiene la gráfica $y = f(x)$ entonces la gráfica de la función $F(x) = af(x)$, $a > 0$ se obtiene de la siguiente manera:

i) Si $a > 1$ la gráfica está estirándose verticalmente en un factor a en base al eje X.

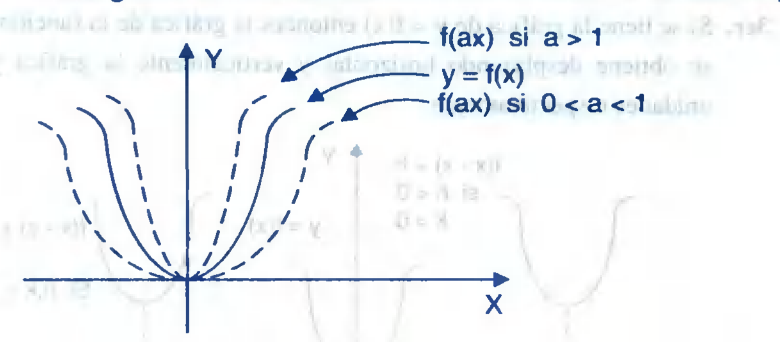
ii) Si $0 < a < 1$, la gráfica está encogiéndose verticalmente en su factor a.



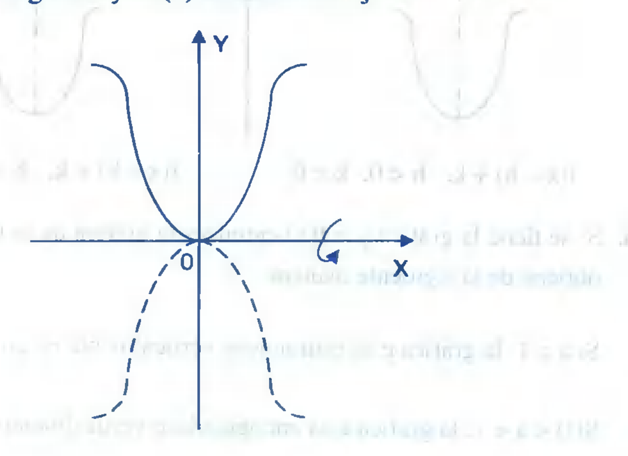
5ta. Si se tiene y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = f(ax), a > 0 se obtiene de la siguiente manera:

i) Si a > 1, la gráfica se encoge horizontalmente en un factor "a" en base al eje Y.

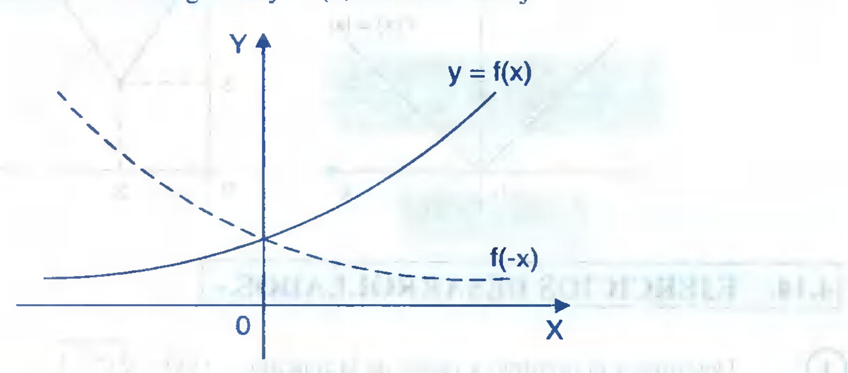
ii) Si 0 < a < 1, la gráfica se estira horizontalmente en un factor "a" en base al eje Y.



6ta. Si se tiene la gráfica y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = -f(x) se obtiene haciendo rotar la gráfica y = f(x) alrededor del eje X.



7ma. Si se tiene la gráfica y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = f(-x) se obtiene haciendo rotar la gráfica y = f(x) alrededor del eje Y.

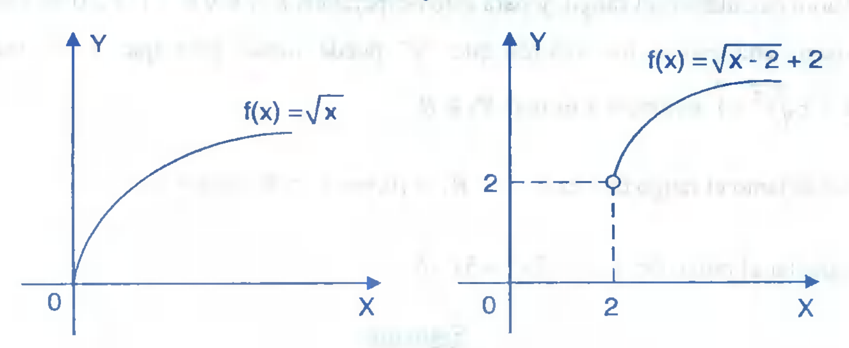


8va. Si se tiene la gráfica y = f (x) entonces la gráfica de la función F(x) = -f(-x) se obtiene haciendo rotar la gráfica y = f(x) alrededor del eje X y el eje Y.

Ejemplo.- Graficar la función $F(x)=\sqrt{x-2}+2$

Solución

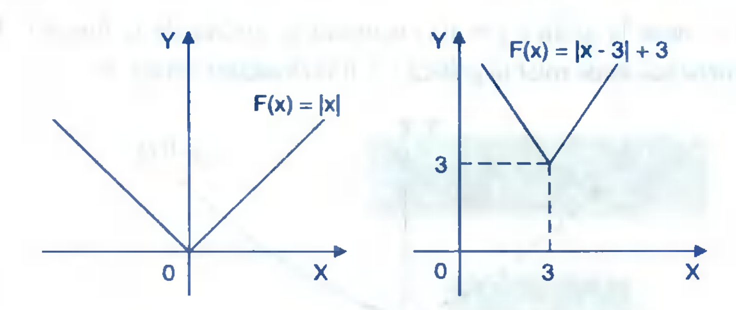
La gráfica de $F(x)=\sqrt{x-2}+2$ se construye a partir de la función $f(x)=\sqrt{x}$, trasladando a la derecha 2 dos unidades y hacia arriba dos unidades.



Ejemplo.- Graficar la función F(x) = | x – 3 | +3

Solución

La gráfica de F(x) = | x – 3 | + 3 se construye a partir de la función f(x) = | x |, trasladando a la derecha 3 unidades y hacia arriba 3 unidades.



4.14. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Determinar el dominio y rango de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

Solución

Como $y=f(x)=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y=\sqrt{x^2-1}$. Luego analizamos los valores que x puede tomar para que "y" sea real, y como $y=\sqrt{x^2-1}$ entonces "y" es real si $x^2-1\geq 0$ $\Rightarrow x^2\geq 1 \Rightarrow x\leq -1 \vee x\geq 1$ por lo tanto el dominio es: $D_f = <-\infty,-1]\cup[1,\infty>$

Ahora calculamos el rango, y para esto despejamos x $y=\sqrt{x^2-1},\ y\geq 0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y^2+1}$, Luego analizamos los valores que "y" puede tomar para que x sea real y como $x=\pm\sqrt{y^2+1}$ entonces x es real $\forall y\in R$.

Por lo tanto el rango de f es : $R_f = [0,+\infty> \cap R = [0,+\infty>$

(2) Calcular el rango de $f(x)=2x^2+5x-6$

Solución

Como $y=f(x) \Rightarrow y=2x^2+5x-6$ es una función cuadrática en estos casos el rango se determina completando cuadrados:

$y+6=2(x^2+\frac{5}{2}x\frac{25}{16})-\frac{25}{8}$ de donde $y+\frac{73}{8}=2(x+\frac{5}{4})^2$

Luego $V(-\frac{5}{4},-\frac{73}{8})$ por lo tanto el rango de f es: $R_f=[-\frac{73}{8},+\infty>$

(3) Determinar dominio, rango y construir la gráfica de la función $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x+1}$

Solución

Factorizando y simplificando se tiene: $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x+1}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{2x+1}=2x-1,\quad x\neq-\frac{1}{2}$

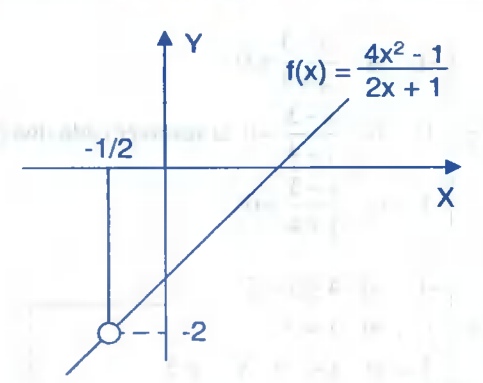
Luego como f(x) = 2x-1 , $x\neq-\frac{1}{2}$ su dominio es: $D_f=R-\{-\frac{1}{2}\}$

Ahora calculando el rango, para esto despejamos x: $y=2x-1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{2}$

como $x\in<-\infty,-\frac{1}{2}>\cup<-\frac{1}{2},\infty>$ entonces $\frac{y+1}{2}\in<-\infty,-\frac{1}{2}>\cup<-\frac{1}{2},\infty>$

$-\infty<\frac{y+1}{2}<-\frac{1}{2}$ V $-\frac{1}{2}<\frac{y+1}{2}<\infty$ entonces $-\infty<y<-2$ v $-2<y<\infty$

Por lo tanto $R_f=<-\infty,-2>\cup<-2,\infty>$



(4) Determinar el dominio y rango de la función $f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x^2-4}}$

Solución

La función f(x) está bien definida si:

$\frac{2x}{x^2-4} \geq 0$ entonces $\frac{x}{(x+2)(x-2)} \geq 0$, ahora resolvemos la inecuación.

- + - +

-2 0 2

Luego $D_f = \langle -2,0] \cup \langle 2,+\infty \rangle$

Para determinar el rango despejamos x, como y = f(x)

Entonces $y = \sqrt{\frac{2x}{x^2-4}}$, $y \geq 0 \Rightarrow y^2 = \frac{2x}{x^2-4}$ de donde $y^2x^2 - 2x - 4y^2 = 0$, $y \geq 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+16y^4}}{2y^2}$, $y \geq 0$ racionalizando $x = \frac{-16y^4}{2y^2(2+\sqrt{4+16y^4})} = \frac{-8y^2}{2+\sqrt{4+16y^4}}$, $y \geq 0$

x es real si y solo si $y \in R$. Luego $R_f = [0,+\infty \rangle \wedge R = [0,+\infty \rangle$

(5) Determinar dominio, rango y graficar la función: $f(x) = sig(\frac{x-3}{x+4})$

Solución

Aplicando la definición de la función signo se tiene:

$$f(x) = sig(\frac{x-3}{x+4}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{x-3}{x+4} < 0 \\ 0 & \text{si } \frac{x-3}{x+4} = 0 \\ 1 & \text{si } \frac{x-3}{x+4} > 0 \end{cases}$$

al resolver cada una de las inecuaciones se tiene:

$$f(x) = sig(\frac{x-3}{x+4}) = \begin{cases} -1 \text{ , si } -4 < x < 3 \\ 0 \text{ , si } x = 3 \\ 1 \text{ , si } x < -4 \vee x > 3 \end{cases}$$

Y

-4 0 3 X

Su dominio es: $D_f = \langle -\infty,-4 \rangle \cup \langle -4,\infty \rangle$

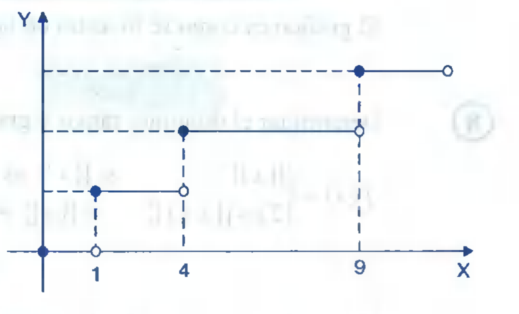
Su rango es $R_f = \{-1,0,1\}$

(6) Determinar el dominio rango y graficar la función: $f(x)=[|\sqrt{x}|]$

Solución

Calculando su dominio se tiene: f(x) está definida si $x \geq 0$, luego $D_f=[0,\infty>$

Por lo tanto su rango es: $R_f = Z_0^+ = \{0,1,2,...\}$



Sí $[|\sqrt{x}|] = 0 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$

Si $[|\sqrt{x}|]=1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow 1 \leq x < 4$

Si $[|\sqrt{x}|]=2 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 4 \leq x < 9$

(7) Determinar el dominio y graficar la función: f(x) = | x | + | x – 1 |

Solución

Por definición del valor absoluto se tiene:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}, \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & si\ x \geq 1 \\ -x+1 & si\ x < 1 \end{cases}$$

+ 0 - 1 +

Ahora calculando las reglas de correspondencia de f(x)

Si x < 0 ⇒ | x | = -x, | x – 1 | = 1 – x

como f(x) = | x | + | x – 1 | ⇒ f(x) = -x + 1 – x = 1 – 2x, , para x < 0

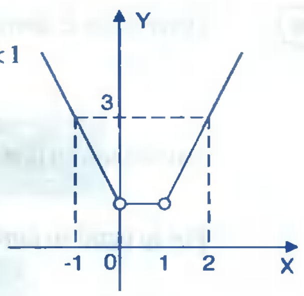
Si 0 ≤ x < 1 ⇒ | x | = x, | x – 1 | = 1 – x

Como f(x) = | x | + | x – 1 | = x + 1 – x = 1 ⇒ f(x) = 1, , para $0 \leq x < 1$

Si x ≥ 1 ⇒ | x | = x, | x – 1 | = x – 1

Como f(x) = | x | + | x – 1 | = x + x – 1 = 2x – 1 ⇒ f(x) = 2x – 1, para x ≥ 1

Luego la función toma la forma: $f(x)=\begin{cases}1-2x & si\ x<0\\ 1 & si\ 0\le x<1\\ 2x-1 & si\ x\ge 1\end{cases}$



Su dominio $D_f=R$, y su rango es $R_f=[1,+\infty>$

El gráfico es como se muestra en la figura:

8 Determinar el dominio, rango y graficar la función:

$$f(x)=\begin{cases}[|x|] & si\ [|x|]\ es\ par\\ 2x-[|x+1|] & si\ [|x|]\ es\ impar\end{cases}$$

Solución

Si x ∈ [0,1> $\Rightarrow$ $[|x|]=0$ es par $\Rightarrow$ f(x) = 0

Si x ∈ [1,2> $\Rightarrow$ $[|x|]=1$ es impar $\Rightarrow$ f(x) = 2x - 2

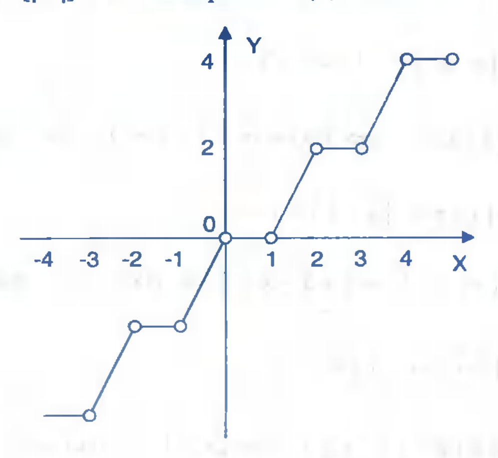
Si x ∈ [2,3> $\Rightarrow$ $[|x|]=2$ es par $\Rightarrow$ f(x) = 2

Si x ∈ [3,4> $\Rightarrow$ $[|x|]=3$ es impar $\Rightarrow$ f(x) = 2x - 4

Si x ∈ [-1,0> $\Rightarrow$ $[|x|]=-1$ es impar $\Rightarrow$ f(x) = 2x

Si x ∈ [-2,-1> $\Rightarrow$ $[|x|]=-2$ es par $\Rightarrow$ f(x) = -2

Si x ∈ [-3,-2> $\Rightarrow$ $[|x|]=-3$ es impar $\Rightarrow$ f(x) = 2x + 2



(9) Determinar el dominio, rango y graficar la función: $f(x)=\sqrt{x-[|x|]}$

Solución

Calculando el dominio de la función f es decir: f(x), está definida si $x-[|x|]\geq 0$ de donde $x\geq [|x|]$ que por definición de máximo entero se cumple $\forall x\in R$. Luego $D_f = R$

Como $[|x|]=n \Leftrightarrow n\leq x<n+1,\ n\in Z$

Entonces $f(x)=\sqrt{x-n}$, $\forall\ x\in[n\ ,n+1>,\ n\in Z$

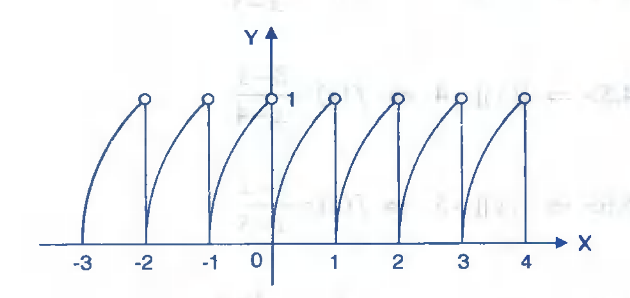
Si $x\in[0,1> \Rightarrow [|x|]=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$

$x\in[2,3> \Rightarrow [|x|]=1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-1}$

$x\in[2,3> \Rightarrow [|x|]=2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-2}$

$x\in[-1,0> \Rightarrow [|x|]=-1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+1}$

$x\in[-2,-1> \Rightarrow [|x|]=-2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+2}$



Luego el rango es: $R_f=[0,1>$

(10) Hallar dominio, rango y graficar la función f definida por $f(x)=\dfrac{3-x}{|x|-[|x|]}$

Solución

Calculando el dominio de la función, es decir:

f(x) es definida si $x-[|x|]\neq 0$ es decir: $D_f=R-\{x/|x|-[|x|]=0\}$

Como $|x|=[|x|]$ $\Rightarrow$ $x\in N$ puesto que $|x|\geq 0$. Por lo tanto $D_f=R-Z$

Como $|x|=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$, analizamos en la forma

Si $x\geq 0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{x-[|x|]}$

$x\in \langle 0,1\rangle \Rightarrow [|x|]=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{x}=\dfrac{3}{x}-1$

$x\in [1,2\rangle \Rightarrow [|x|]=1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$

$x\in [2,3\rangle \Rightarrow [|x|]=2 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$

$x\in [3,4\rangle \Rightarrow [|x|]=3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{x-3}=-1$

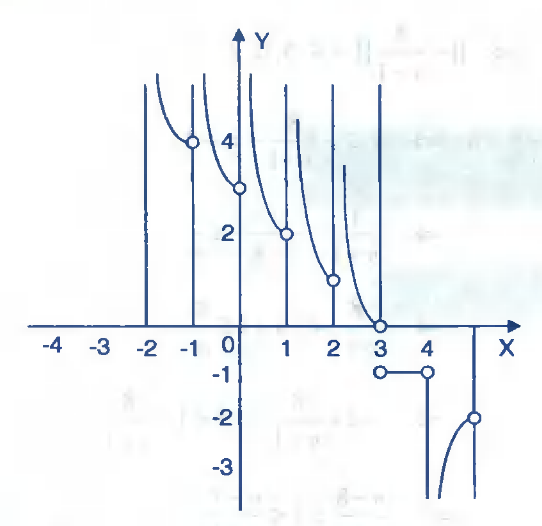
$x\in [4,5\rangle \Rightarrow [|x|]=4 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{x-4}$

$x\in [5,6\rangle \Rightarrow [|x|]=5 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{x-5}$

$x\in [-1,0\rangle \Rightarrow [|x|]=-1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{-x+1}$

$x\in [-2,-1\rangle \Rightarrow [|x|]=-2 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{-x+2}$

$x\in [-3,-2\rangle \Rightarrow [|x|]=-3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{-x+3}$



Luego el rango es : $R_f = <-\infty,-2> \cup \{-1\} \cup <0,+\infty>$

(11) Determinar el rango y graficar la función definida por

$$f(x) = [| \frac{7x-15}{x-1} |] + 2x \,, \quad \text{si } x \in <-1,0>$$

Solución

Por la propiedad $[| x+n |] = n + [| x |]$, $n \in Z$

$$f(x) = [| \frac{7x-15}{x-1} |] + 2x = [| \frac{7(x-1)}{x-1} - \frac{8}{x-1} |] = [| 7 - \frac{8}{x-1} |] + 2x$$

$$f(x) = 7 + [| -\frac{8}{x-1} |] + 2x$$

Ahora definimos $[| -\frac{8}{x-1} |]$ es decir:

Como $x \in <-1,0> \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow -2 < x-1 < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow -8 < \frac{8}{x-1} < -4 \Rightarrow 4 < -\frac{8}{x-1} < 8$$

$$\Rightarrow \quad [\![-\frac{8}{x-1}]\!] = 4, 5, 6, 7$$

Además $[\![-\frac{8}{x-1}]\!] = n \quad \Rightarrow \quad n \le -\frac{8}{x-1} < n+1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < -\frac{x-1}{8} \le \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{n+1} < -x+1 \le \frac{8}{n}$$

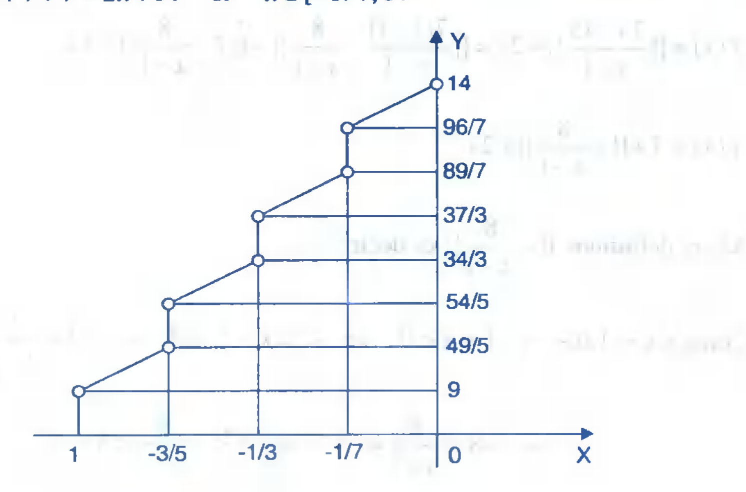
$$\Rightarrow \quad -1+\frac{8}{n+1} < -x < 1-\frac{8}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n-8}{n} \le x < \frac{n-7}{n+1}$$

$x \in [\frac{n-8}{n}, \frac{n-7}{n}>$ entonces $x \in <-1,0>$ para n = 4, 5, 6, 7

Luego f(x) = 7 + n + 2x, n = 4, 5, 6, 7. Ahora definimos f para cada valor de n

$$f(x) = \begin{cases} 2x+7+4 = 2x+11 & si \quad x \in <-1,-3/5> \\ 2x+7+5 = 2x+12 & si \quad x \in <-3/5,-1/3> \\ 2x+7+6 = 2x+13 & si \quad x \in [-1/3,-1/7> \\ 2x+7+7 = 2x+14 & si \quad x \in [-1/7,0> \end{cases}$$, Graficando la función f se tiene:



$$R_f = \langle 9, \frac{49}{5} \rangle \cup [\frac{54}{5}, \frac{34}{3} \rangle \cup [\frac{37}{3}, \frac{89}{7} \rangle \cup [\frac{96}{7}, 14 \rangle$$

(12) Hallar el dominio, rango y graficar la función f(x) definida por: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } x \le 1 \\ 2 + x^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución

El dominio se determina en la forma siguiente: $D_f = \langle -\infty, 1] \cup \langle 1, +\infty \rangle = R$

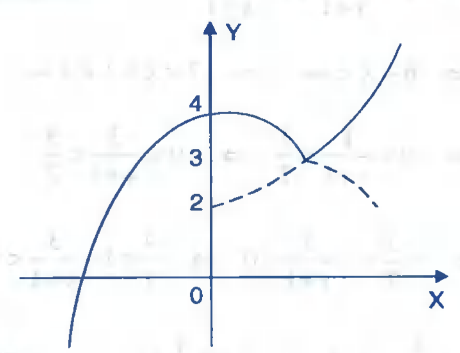
Ahora calculamos el rango:

Si $x \le 1 \Rightarrow y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y$

$x^2 = -(y-4) \Rightarrow$ V(0, 4) de acuerdo al criterio de la función cuadrática.

Para $x > 1 \Rightarrow y = 2 + x^2$, de donde $y - 2 = x^2 \Rightarrow$ V(0, 2)

Ahora graficando se tiene:



Luego $R_f = \langle -\infty, 4] \cup \langle 3, +\infty \rangle = R$

(13) Hallar el rango y graficar la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 12, & si \quad x \in [-4, 6] \\ \dfrac{x-2}{x+1}, & si \quad x \in \langle 6, +\infty \rangle \end{cases}$

Solución

Calculando el rango de la función

Sí $x \in [-4, 6] \Rightarrow y = x^2 - x - 12 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{49}{4}$

$x \in [-4, 6] \Rightarrow -4 \le x \le 6$

$$\Rightarrow -\frac{9}{2} \le x - \frac{1}{2} < \frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \le (x - \frac{1}{2})^2 < \frac{121}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{49}{4} \le (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{49}{4} < \frac{121}{4} - \frac{49}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{49}{4} \le (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{49}{4} < 18$$

$$\Rightarrow -\frac{49}{4} \le y < 18 \Rightarrow y \in [-\frac{49}{4}, 18>$$

Si $x \in <6, +\infty> \Rightarrow y = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$

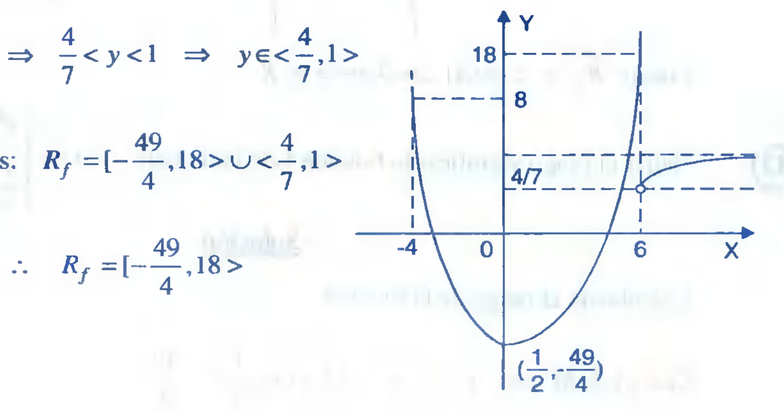
$x \in <6, +\infty> \Rightarrow 6 < x < +\infty \Rightarrow 7 < x + 1 < +\infty$

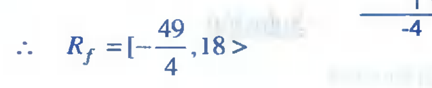
$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{7} \Rightarrow 0 < \frac{3}{x+1} < \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{7} < -\frac{3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{4}{7} < 1 - \frac{3}{x+1} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{7} < y < 1 \Rightarrow y \in <\frac{4}{7}, 1>$$

Luego el rango es: $R_f = [-\frac{49}{4}, 18> \cup <\frac{4}{7}, 1>$





$$\therefore \quad R_f = [-\frac{49}{4}, 18>$$

(14) Hallar el dominio, rango y graficar la función: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{|x+1|}$

Solución

Calculando el dominio de la función f(x) es decir, f(x) está definida si $x \neq -1$

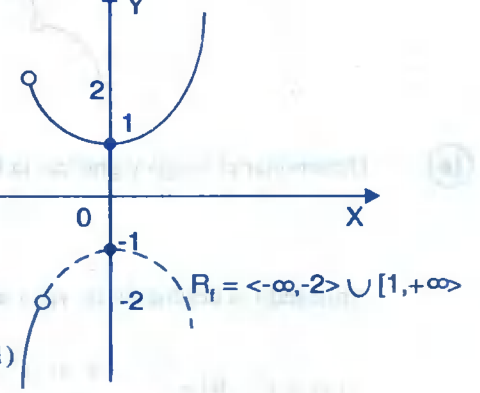
Luego el $D_f = R-\{-1\}$

Ahora a la función expresaremos en la forma:

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{|x+1|}=\frac{(x^2+1)(x+1)}{|x+1|}, \text{ como } |x+1|=\begin{cases} x+1, & \text{si } x\geq -1 \\ -x-1, & \text{si } x<-1 \end{cases}$$

Por lo tanto la función f(x) es dada por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x>-1 \\ -x^2-1 & si\ x<-1 \end{cases}$$



Ahora graficando se tiene:

Si $x>-1 \Rightarrow y=x^2+1 \Rightarrow y-1=x^2$, V(0,1)

$x<-1 \Rightarrow y=-x^2-1 \Rightarrow y+1=-x^2$, V(0,-1)

(15) Hallar el dominio, rango y graficar la función: $f(x)=[|x|]+\sqrt{x-[|x|]}$

Solución

La función f(x) está definida si $x-[|x|]\geq 0$

De donde $x\geq [|x|]$ es valida $\forall$ x ∈ R, luego $D_f = R$

Si $x\in [0,1> \;\Rightarrow\; [|x|]=0 \;\Rightarrow\; f(x)=\sqrt{x}$

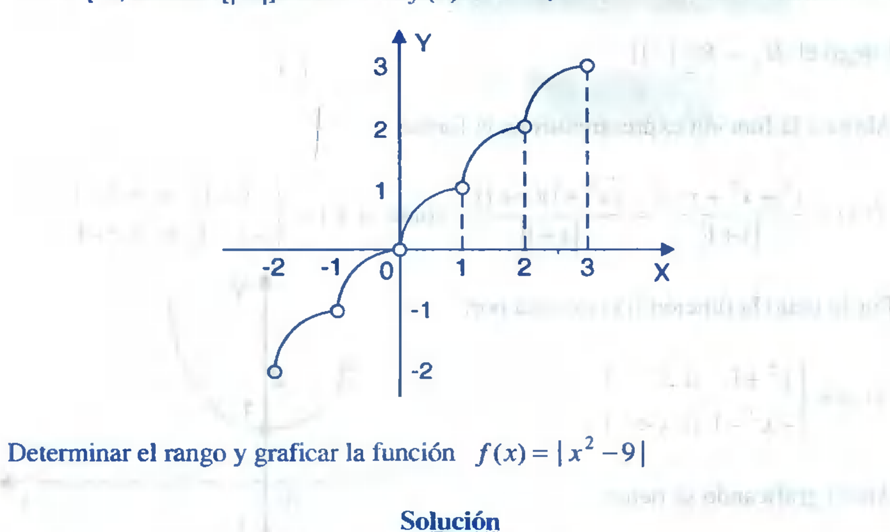
$x\in [1,2> \;\Rightarrow\; [|x|]=1 \;\Rightarrow\; f(x)=1+\sqrt{x-1}$

$x\in [2,3> \;\Rightarrow\; [|x|]=2 \;\Rightarrow\; f(x)=2+\sqrt{x-2}$

$x \in [3,4> \Rightarrow [|x|] = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + \sqrt{x-3}$

$x \in [-1,0> \Rightarrow [|x|] = -1 \Rightarrow f(x) = -1 + \sqrt{1+x}$

$x \in [-2,-1> \Rightarrow [|x|] = -2 \Rightarrow f(x) = -2 + \sqrt{2+x}$



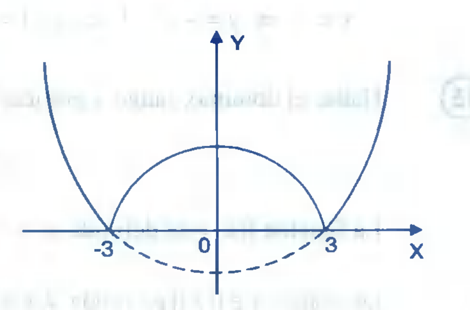
(16) Determinar el rango y graficar la función $f(x) = |x^2 - 9|$

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto a la función f(x) expresamos:

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{si } x^2 \geq 9 \\ 9 - x^2, & \text{si } x^2 < 9 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{si } x \in <-\infty,-3] \cup [3,+\infty> \\ 9 - x^2, & \text{si } x \in <-3,3> \end{cases}$$



El rango de la función f(x) es $R_f = [0,+\infty>$

La gráfica es como se muestra en la figura

(17) Construir la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} |x + [|x|]| & si \ [|x|] \ es \ par \\ |x + [|x-1|]| & si \ [|x|] \ es \ impar \end{cases}$

Solución

Si $x \in [0,1> \Rightarrow [|x|]=0$ es par $\Rightarrow f(x)=|x|=x$

$x \in [1,2> \Rightarrow [|x|]=1$ es impar $\Rightarrow f(x)=|x|=x$

$x \in [2,3> \Rightarrow [|x|]=2$ es par $\Rightarrow f(x)=|x+2|=x+2$

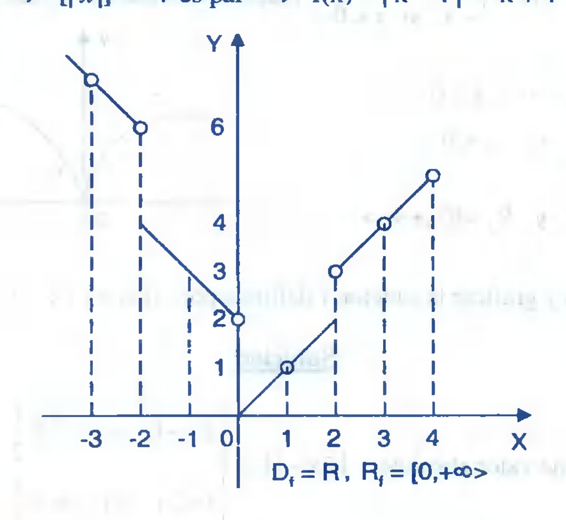
$x \in [3,4> \Rightarrow [|x|]=3$ es impar $\Rightarrow f(x)=|x+2|=x+2$

$x \in [-1,0> \Rightarrow [|x|]=-1$ es impar $\Rightarrow f(x)=|x-2|=2-x$

$x \in [-2,-1> \Rightarrow [|x|]=-2$ es par $\Rightarrow f(x)=|x-2|=-x+2$

$x \in [-3,-2> \Rightarrow [|x|]=-3$ es impar $\Rightarrow f(x)=|x-4|=-x+4$

$x \in [-4,-3> \Rightarrow [|x|]=-4$ es par $\Rightarrow f(x)=|x-4|=-x+4$



18 Hallar la gráfica de $f(x)=(x-[|x|])^2$

Solución

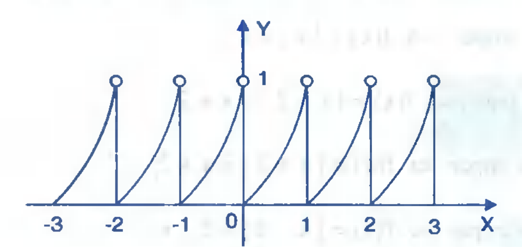
$x \in [0,1> \Rightarrow [|x|]=0 \Rightarrow f(x)=x^2$

$x \in [1,2> \Rightarrow [|x|]=1 \Rightarrow f(x)=(x-1)^2$

$x \in [2,3> \Rightarrow [|x|]=2 \Rightarrow f(x)=(x-2)^2$

$x \in [-1,0> \Rightarrow [|x|]=-1 \Rightarrow f(x)=(x+1)^2$

$x \in [-2,-1> \Rightarrow \; [|\,x\,|] = -2 \;\Rightarrow\; f(x) = (x+2)^2$



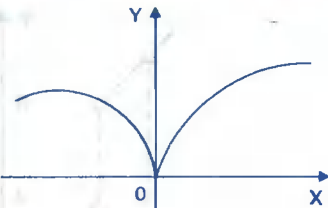
$D_f = R\,,\;\; R_f = [0,1>$

(19) Graficar la función $f(x) = \sqrt{|\,x\,|}$

Solución

Por definición $|\,x\,| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, luego la función f(x) queda expresado así:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$




donde $D_f = \text{R}$ y $R_f = [0,+\infty>$

(20) Hallar el rango y graficar la función f definida por: f(x) = | 2x – 1 | – x

Solución

Por definición de valor absoluto $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & si \;\; x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & si \;\; x < \frac{1}{2} \end{cases}$

Sí $x < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; |2x-1| = 1-2x \;\Rightarrow\; f(x) = 1-3x$

$x \geq \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; |2x-1| = 2x-1 \;\Rightarrow\; f(x) = x-1$

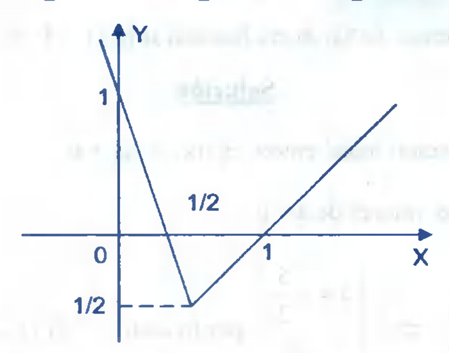
Ahora la función dada se expresa así: $f(x) = \begin{cases} 1-3x & si \;\; x < \frac{1}{2} \\ x-1 & si \;\; x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

calculando el rango de la función f(x)

si $x < \frac{1}{2} \Rightarrow$ y = 1 − 3x, despejando x $\Rightarrow x = \frac{1-y}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 - 2y < 3 \Rightarrow y > -\frac{1}{2}$

Si $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ y = x − 1, despejando x $\Rightarrow x = y + 1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y \geq -\frac{1}{2}$

Por lo tanto $R_f = \langle -\frac{1}{2}, +\infty \rangle \cup [-\frac{1}{2}, +\infty \rangle = [-\frac{1}{2}, +\infty \rangle$. Su gráfica es:



(21) Hallar el rango y graficar la función f(x) dado por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ si } x \in [1,2\rangle \\ [|x|] + \sqrt{x - [|x|]} & , \text{ si } x \in [-1,1\rangle \\ -\sqrt{-x} & , \text{ si } x \in [-4,-1\rangle \end{cases}$$

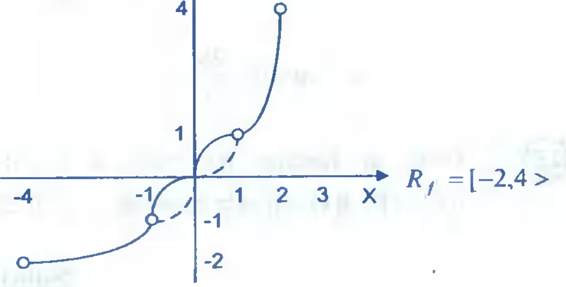
<u>Solución</u>

x ∈ [-1,0⟩ $\Rightarrow [|x|] = -1 \Rightarrow f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$

x ∈ [0,1⟩ $\Rightarrow [|x|] = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$

Ahora expresaremos a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & , \text{ si } x \in [-4,-1\rangle \\ -1 + \sqrt{x+1} & , \text{ si } x \in [-1,0\rangle \\ \sqrt{x} & , \text{ si } x \in [0,1\rangle \\ x^2 & , \text{ si } x \in [1,2\rangle \end{cases}$$



Graficando cada parte de la función

(22) Si $f(x)=a^x$, Demostrar que f(x + y) = f(x) f(y)

Solución

Como $f(x)=a^2 \Rightarrow f(x+y)=a^{x+y}=a^x.\,a^y=f(x).f(y)$

$\therefore$ f(x + y) = f(x).f(y)

(23) La función f(x) es lineal, hallar dicha función sí f(-1) = 2 , f(2) = -3

Solución

Como f(x) es una función lineal entonces f(x) = ax + b

Ahora calculamos los valores de a y b

$$\begin{cases} f(-1)=-a+b=2 \\ f(2)=2a+b=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{5}{3} \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases}, \text{ por lo tanto } \quad f(x)=\frac{-5x}{3}+\frac{1}{3}$$

(24) Dada la función f(x) = mx + b, ∀ x∈R, si se sabe que f(3) = 11, f(-3) = 6. Hallar m + b

Solución

Calculando los valores de m y b

$$\begin{cases} f(3)=3m+b=11 \\ f(-3)=-3m+b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{5}{6} \\ b=\dfrac{51}{6} \end{cases}, \text{ entonces: } \quad m+b=\frac{5}{6}+\frac{51}{6}=\frac{56}{6}=\frac{28}{3}$$

$$\therefore \quad m+b=\frac{28}{3}$$

(25) Dada la función f(x) = ax + b, x ∈ R, donde a y b son constantes reales, si f(x + y) = f(x) + f(y) ∀ x, y ∈ R , y sí f(-2) = -6. Hallar a y b

Solución

Como f(x + y) = f(x) + f(y)

$a(x + y) + b = ax + b + ay + b$

$a(x + y) + b = a(x + y) + 2b \Rightarrow b = 0$

Luego $f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = ax$

$f(-2) = -2a = -6 \Rightarrow a = 3$ $\therefore\ a = 3,\ b = 0$

(26) Si $f(x+4) = x^2 + 3x$, Hallar f(a + 1)

Solución

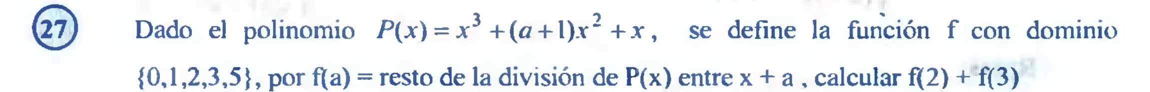
Definiremos la función f(x) para esto se hace una sustitución $z = x + 4 \Rightarrow x = z - 4$

Ahora se sustituye en $f(x+4) = x^2 + 3x \Rightarrow f(z) = (z-4)^2 + 3(z-4) = z^2 - 5z + 4$

Luego la función f(x) es dado por: $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Calculando f(a + 1) es decir: $f(a+1) = (a+1)^2 - 5(a+1) + 4 = a^2 - 3a - 4$

$$\therefore\ f(a+1) = a^2 - 3a - 4$$



(27) Dado el polinomio $P(x) = x^3 + (a+1)x^2 + x$, se define la función f con dominio {0,1,2,3,5}, por f(a) = resto de la división de P(x) entre x + a , calcular f(2) + f(3)

Solución

Calculando el resto de la división de P(x) entre x + a

$x^3 + (a+1)x^2 + x$ | x + a

$-x^3 - ax^2$

$x^2 + x$

$-x^2 - ax$

$(1 - a)x$

$-(1 - a)x - a(1 - a)$

$a^2 - a$ = resto

Como $f(a) = a^2 - a$

$f(2) = 4 - 2 = 2$

$f(3) = 9 - 3 = 6$

Luego $f(2) + f(3) = 8$

4.15. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

① Hallar el dominio de cada una de las funciones

a) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

b) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}$

d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}}$

e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+3x}}$

f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x^2-4)(x^2-9)}{-x^4+17x^2-16}}$

g) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

h) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$

i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$

j) $f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$

k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4}{(x+1)^2}+\dfrac{x-3}{x+1}-49}$

l) $f(x)=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{21}-\sqrt{x^2-4}}}$

Rptas:

a) $D_f=\langle-\infty,1]\cup[3,+\infty\rangle$

b) $D_f=[-1,1]$

c) $D_f=\langle-\infty,-2\rangle\cup[0,2\rangle$

d) $D_f=[1,2\rangle\cup\langle3,\infty\rangle$

e) $D_f=\langle-\infty,-3\rangle\cup[-\frac{1}{2},0\rangle\cup[1,+\infty\rangle$

f) $D_f=[-3,3\rangle-\{-1,\pm2\}$

g) $D_f=\langle-1,1]\cup[2,3\rangle$

h) $D_f=\phi$

i) $D_f=\phi$

j) $D_f=\{1\}$

k) $[-\frac{4}{3},-1\rangle\cup\langle-1,-\frac{3}{4}]$

l) $\langle-5,-2]\cup[4,5\rangle$

(2) Halle el dominio de la función $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-16}}{x[|x+4|]-x}$ **Rpta.** $D_f=\langle-\infty,-4]\cup[4,+\infty\rangle$

(3) Hallar el dominio de la función $f(x)=\sqrt{|x^2-x-2|-|1-x^2|-|x+1|}+\sqrt[3]{x}$

Rpta. $D_f=\langle-\infty,1]$

(4) Hallar el dominio de la función $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{|x+1|}{|x|+1}-\dfrac{|x+2|}{|x|+3}}+\sqrt{7-x}$

Rpta. $D_f=[\sqrt{3}-1,7]$

(5) Hallar el dominio de la función $f(x)\sqrt{x^2sig(|x|+1)-1}^{\,-1}+\sqrt[4]{4-x}$

Rpta. $D_f=\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle1,4]$

(6) Dadas las funciones $f(x)=x^2-5x+5$, $g(x)=-2x+\dfrac{5}{3}$, hallar el dominio de

$F(x)=\dfrac{f^3(x)-4g(x)}{f(x)+3g(x)}$ **Rpta.** $D_f=R-\{1,10\}$

(7) Determinar el dominio, rango y graficar la función: $f(x)=\begin{cases}x^2-9 & si \quad x<4\\ 5x-2 & si \quad x\geq 4\end{cases}$

Rpta. $D_f=R$, $R_f=[-9,+\infty\rangle$

(8) Hallar el dominio de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-[|x|]}$ b) $f(x)=\dfrac{x}{2x-[|x|]}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-[|x|]}$

d) $f(x)=[|\dfrac{1}{x}|]$ e) $f(x)=[|\dfrac{1}{x-3}|]$ f) $f(x)=[|x^2|]$

g) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}$ h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4-x}{|x|-1}}$ i) $f(x)=\sqrt{x-x^3}$

j) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{4-x^2}}$ k) $f(x)=1-\sqrt{8-x^2-2x}$

l) $f(x)=\sqrt[4]{x^2+4x-12}+\dfrac{3x^2}{\sqrt[4]{x+20-x^2}}$

9 Determinar el dominio, rango y graficar cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<1 \\ -x^3 & si\ x\geq 1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 3x-2 & si\ -4\leq x\leq 4 \\ x & si\ 4<x<6 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-2} & si\ x\geq 2 \\ x^2+2x-3 & si\ x\in <-1,1> \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si\ x<3 \\ 2x-1 & si\ x\geq 3 \end{cases}$

10 Hallar el dominio, rango y graficar la función:

a) $f(x)=\begin{cases} |x+2|-x & si\ x\in <-4,0> \\ \sqrt{4-x} & si\ x\in <0,4> \\ 2x-8 & si\ x\in <4,\infty> \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ 4<x\leq 7 \\ |x| & si\ x\leq 4 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 2[|x|]+2 & si\ -5\leq x\leq 1 \\ \sqrt{x} & si\ 1<x\leq 4 \\ 6 & si\ -7<x<-5 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} [|x-1|] & si\ 4\leq x<7 \\ \sqrt{|x|} & si\ x<4 \end{cases}$

e) $f(x)=|x-1|+|x+1|$ f) $f(x)=(x^2+4)[|2x+3|]$

g) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{4-x^2}+2 & si\ -2<x\leq 2 \\ [|x|] & si\ x<2 \\ 2 & si\ x<-2 \end{cases}$ h) $f(x)=\begin{cases} [|2x|] & si\ x\in [0,3] \\ 2[|x|] & si\ x\in <3,5] \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} 2[|x|] & si\ x\in <-5,1] \\ \sqrt{x} & si\ x\in <1,4] \\ x^2+3 & si\ x\in <-7,-5] \end{cases}$ j) $f(x)=\begin{cases} |x+3| & si\ x<0 \\ 2(x-1)^2 & si\ x\in [0,1> \\ 2-|x-4| & si\ x\in [2,+\infty> \end{cases}$

(11) Hallar dominio, rango y graficar cada una de las funciones siguientes.

a) $f(x) = |x+1| + |x-1| - 2|x|$

b) $f(x) = [|x|] - |x|$

c) $f(x) = |x+2| + |2x-2| + |-x+5|$

d) $f(x) = |x||x-1|$

e) $f(x) = |x-2| + |x+1|$

f) $f(x) = |x+2| + |x-2| - |x| - 1$

g) $f(x) = \sqrt{2[|2x+5|] - 4[|x|]}$

h) $f(x) = \sqrt{[|x-2|] - [|x|]}$

i) $f(x) = |x| - [|x|]$

j) $f(x) = \begin{cases} |x+3|, x < 0 \\ 2(x-1)^2, x \in [0,2> \\ 2-|x-4|, x \in [2,\infty> \end{cases}$

k) $f(x) = -x^2 \left[\left|\dfrac{|x+1|-1}{x+3}\right|\right]$, $-3 \le x \le 4$

l) $f(x) = -\sqrt{2x - \sqrt{x}}$, si $x \in [1,9]$

(12) Determinar dominio, rango y gráficar cada una de las funciones siguientes.

a) $f(x) = 2[|x|] - 2x$

b) $f(x) = \sqrt{5 - |x-3|}$

c) $f(x) = [|2-3x|]$

d) $f(x) = \dfrac{[|2x|]}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{2-x}{x - \sqrt{[|x|]}}$

f) $f(x) = \dfrac{|x|}{[|x|]+1}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{[|x-3|] - [|x|]}$

h) $f(x) = \dfrac{|x|}{[|x|]+1}$

i) $f(x) = \dfrac{|x| - [|x|]}{\sqrt{2 - [|x|]}}$

j) $f(x) = [|x|] + \sqrt{|x| - [|x|]}$

(13) Construir la gráfica de las funciones siguientes.

a) $f(x) = sig\ (|x^2 - 1| - 1)$

b) $f(x) = [|\sqrt{4 - x^2}|]$

c) $f(x) = sig\ (x+1) - sig(x-1)$

d) $f(x) = sig\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)$

(14) En cada una de las funciones dadas, hallar el dominio, rango y hacer su gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{(x+1)(x^2+3x-10)}{x^2+6x+5}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-10x-1}{[|x^2|]-2x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$ d) $f(x)=\dfrac{(x^2+3x-4)(x^2-5x+6)}{(x^2-3x+2)(x-3)}$

e) $f(x)=[|x|]+|x|+x+2$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x-[|x|]}$

g) $f(x)=\dfrac{|x|}{|x|-1}$ h) $f(x)=sig([|x-1|]-1)+sig([|x+1|]-1)$

i) $f(x)=\dfrac{[|x|]}{|x|-x+1}$ j) $f(x)=sig(\dfrac{x^2+x-6}{x+1})$

(15) Graficar las funciones siguientes.

a) $f(x)=[|-x^2|]$ b) $f(x)=[|-x^2+1|]$

c) $f(x)=\sqrt{|x|}$ d) $f(x)=\sqrt{[|x|]}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-[|x|]}}{x[|2x-1|]-2x}$ f) $f(x)=\dfrac{|x+3|-|x+5|}{|x+1|-4}$, $x\in\langle -5,2]$

(16) En cada función, hallar el dominio, rango y hacer la gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{x}{[|x+1|]}$ b) $f(x)=\dfrac{2-x}{|x|-[|2x|]}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|2x|-2[|x|]}}$ d) $f(x)=\dfrac{|x|}{[|x|]}$

e) $f(x)=[|\dfrac{3}{1+x^2}|]$ f) $f(x)=(x-[|x|])^2$

g) $f(x)=x-[||x||]$ h) $f(x)=[|x|]+(x-[|x|])^2$

(17) Hallar el rango de la función $f(x) = x - |x - 2|,\ x \in R$

(18) Graficar la función $f(x) = (x^2 + 4)[|2x + 3|]$, $D_f = [-1,1]$

(19) Hallar el rango de $f(x) = |x + 2| - 2|3 - x|,\ x \in [-4,10>$ graficar la función f.

(20) Sea $f(x) = |x| + \sqrt{-x - [|x|]}$, $0 \le x \le 2$ Hallar el rango de f.

(21) Hallar el rango de $f(x) = \frac{1}{2}[[2|x+1|]](|x|-1)$ para $x \in <-5/2, 2>$, graficar f.

(22) Hallar el dominio, rango y graficar la función

a) $f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{|x|-2}{3-x}\right| & si \quad -1 < x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x} & si \quad 1 \le x < 2 \\ \dfrac{2}{x+1} & si \quad -2 < x \le -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 5 - x & , \quad x \in <-2, 3> \\ x + \left[\left|\dfrac{2}{1-x}\right|\right], & x \in [3, 5] \end{cases}$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

c) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{[|x|] + 1} - \sqrt{1 - x}$

h) $f(x) = |6 + x - x^2|$

g) $f(x) = x^2 + |x| - x + 1$

(23) Hallar dominio, rango y graficar la función

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|6-x|-1}{x+3} & si \quad -1 < x < 8 \\ \dfrac{|16-x^2|}{|6x|} & si \quad -5 < x < -3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \quad -3 \le x < 0 \\ x - |x-2| & , \quad 0 \le x < 8 \\ 2 + \sqrt{x-4}, & 4 \le x < 8 \end{cases}$

(24) Hallar el dominio, rango y graficar la función: $f(x) = \begin{cases} [|\dfrac{4}{x^2+1}|] & , \quad si \quad x < 3 \\ [|\dfrac{4}{x^2-1}|] + 3x & , \quad si \quad 4 < x \le 6 \\ [|\dfrac{3(x-6)^2}{5} - 4|] & , \quad si \quad 8 \le x < 9 \end{cases}$

(25) Hallar el rango de $f(x)=\dfrac{|x+1|-3}{1+|x-3|}$ sí x ∈ [-2,4>

(26) Hallar el rango de $f(x)=\dfrac{x^2[|\frac{2-x}{2}|]+3x-1}{|5x-1|-15+6|x+2|}$ sí $x\in<-2,\frac{1}{5}>$

(27) Determinar dominio, rango y graficar: $f(x)=\sqrt{9-x^2}\ sig\ (\dfrac{\sqrt{2+x}}{x-1})+[|\dfrac{2x+5}{x+3}|]-1$

(28) Hallar el dominio, rango y graficar: $f(x)=\begin{cases}|x-[|x|]| & ,\ si\ [|x|]\ es\ par\\ |x-[|x+1|]|, & si\ [|x|]\ es\ impar\end{cases}$

(29) Construir la gráfica y hallar el rango de:

$$f(x)=\begin{cases}[|x-2|] & ,\ si\ [|x|]\ es\ par\\ 3x-[|x+1|]|, & si\ [|x|]\ es\ impar\end{cases}\ ,\ \forall\ x\in[-3,4]$$

Rpta. $R_f=[-7,-4]\cup[-3,0]\cup[1,4]\cup[5,8>$

(30) Sea f: [-2,4> → R / $f(x)=\dfrac{|x+1|-3}{1+|x-3|}$ Hallar el rango de f. **Rpta.** $R_f=[-\frac{3}{5},1]$

(31) Dadas las funciones $f(x)=-x^2+3x+1$, $g(x)=3x^2+2x+1$ Hallar $R_f\wedge R_g$

Rpta. $[\frac{2}{3},\frac{13}{4}]$

(32) Hallar los valores de a y b para que cada uno de los conjuntos de pares ordenados sea una función y determinar la función en cada caso.

$$f=\{(1,8),(2,-3),(1,a^2+b^2),(-1,a+b),(a^2+b,b),(b+a^2,b)\}$$

$$g=\{(4,3)(-5,-3)(4,a^2-b^2),(-5,a+b),(a^2+b,a),(a^2+b^2,b)\}$$

Rpta: **a)** a = 2 , b = 2 **b)** a = -2 , b = -1

(33) Hallar el rango de la función f(x) = | x – 2 | + | x – 1 | + 1, si x ∈ <1,3].

Rpta. $R_f=[2,4>$

(34) Hallar el rango de la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 \ , & x\in<1,2] \\ x^2+1 \ , & x\in<2,7> \end{cases}$ **Rpta.** $R_f=<1,3]\cup<5,50>$

(35) Sea f: R ⟶ R una función definida por: $f(x)=\begin{cases} sig(-9) \ , & 0\leq x\leq 1 \\ [|x|] \ , & 1<x\leq 2 \end{cases}$, determine el rango de la función. **Rpta.** $R_f=\{-1,1,2\}$

(36) Sí $f(x)=x^2[|\frac{x}{2}|]-4x[|\frac{x}{3}|]$, x ∈ <0,6]. Hallar el rango y graficar

(37) Hallar dominio, rango y graficar la función $f(x)=\dfrac{x|x-|x||}{|x|-[|x|]}$

(38) Determinar el rango y graficar la función: $f(x)=|x^2[|\frac{5-x}{2}|]-4|$, x ∈ <1,3]

(39) Sí $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(-1)+f(\frac{1}{2})=\frac{15}{4}$, f(-1) = 0 y f(1) = 8. Hallar f(5)

Rpta. a = 3 , b = 4 , c = 1, f(5) = 96

(40) Determinar las siguientes funciones lineales

a) f(1) = 1 y f(3) = 3 b) f(1) = 3 y f(3) = 1

c) f(7) = 0 y f(8) = 42

(41) Si f es una función real es de variable real tal que $f(x+2)=x^2+x$.

Calcular $\dfrac{f(a+3)-f(a-3)}{2a-3}$, $a\neq\frac{3}{2}$ **Rpta.** 6

(42) Si f es una función real de variable real tal que $f(x+1)=x^2+3$

Calcular $\dfrac{f(a+1)-f(1)}{a}$, a ≠ 0 **Rpta.** a

(43) Sea f una función real de variable real definida por f(x) = mx + b tal que :

2f(2) + f(4) = 21 y f(-3) – f(1) = -16 Hallar el valor de $\frac{1}{3}f(1)$ **Rpta.** $\frac{2}{3}$

(44) Sea $f(x)=\ln(\frac{1+x}{1-x})$, demostrar que: $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$

(45) Sea f(n) la suma de n miembros de una progresión aritmética, demostrar que:

f(n + 3) – 3f(n + 2) + 3f(n + 1) – f(n) = 0

(46) Sea $\varphi(x)=\frac{1}{2}(ax+a^{-x})$ y $\psi(x)=\frac{1}{2}(a-a^{-x})$

Demostrar que: $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y)$ y

$$\psi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x)$$

(47) Demostrar que, si f(x) es una función exponencial, es decir $f(x)=a^x$ (a < 0) y los números x_1, x_2, x_3 constituyen una progresión aritmética, los números $f(x_1), f(x_2)$ y $f(x_3)$ forman una progresión geométrica.

(48) Hallar analíticamente el rango de la función $f(x)=4x-x^2-1$, $x \in [0,10]$.

(49) Determinar el rango de la función $f(x)=\sqrt{2x-\sqrt{x}}$, sí $x \in [1,9]$

(50) Determinar el dominio, rango y graficar la función $f(x)=x^2+|x|-x+1$.

(51) Hallar el dominio, rango y graficar las funciones dadas.

a) $f(x)=[|1-x^2|]$ b) $g(x)=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-5}$

(52) Sí $f(x)=\begin{cases} 1-2x & , -1\le x<0 \\ [|3+\cos x|] & , x\ge 0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^2 & , x<0 \\ \operatorname{sen} x & , 0\le x\le \pi \end{cases}$

Hallar dominio, rango y graficar f + g.

(53) Halle el dominio, rango y dibujar la gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{[|x^2-16|]}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{[|1-x|]}$

c) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{|x|-[|x|]}$

d) $f(x)=[|\,|1-2x|\,|]$

e) $f(x)=[|x^2-2x-3|]$

f) $f(x)=\sqrt{[|x|]-3x}$

g) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-9} & , \quad x\in\ <-5,-3] \\ |x+3|-2 & , \quad x\in\ <-3,5] \\ x^2-10x+26 & , \quad x\in\ <5,7]\end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & , \quad x\in[-3,0> \\ x-|x-2| & , \quad x\in[0,4> \\ 2+\sqrt{x-4}, & \quad x\in[4,8>\end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases}5-x & , \quad x\in\ <-2,3> \\ x+\left[\left|\dfrac{2}{1-x}\right|\right], & \quad x\in[3,5]\end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases}|x|+2 & , \quad x\in[-7,-2] \\ [|\dfrac{x}{2}|]+x, & \quad |x|<2 \\ \dfrac{1-|x+1|}{2x-1}, & \quad x\in[2,5]\end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases}[|\,|x-1|-2\,|]x^2-2x & , \quad x\in\ <-1,2> \\ |x-4| & , \quad x\in[2,9>\end{cases}$

l) $f(x)=\begin{cases}3x-[|1+x|] & \text{si } [|x|] \text{ es impar} \\ [|-x|] & \text{si } [|x|] \text{ es par} \quad \forall\ x\in[-2,4]\end{cases}$

ll) $f(x)=\begin{cases}\left[\left|\dfrac{25-x}{7-x}\right|\right] & , \quad x\in[-5,\dfrac{5}{27}] \\ \sqrt{|x-3|} & , \quad x\in[\dfrac{5}{2},4>\end{cases}$

(54) Determinar una función polinómica de segundo grado f(x) tal que f(0)=-5,f(-1)=1, f(1)=-7

(55) Hallar el rango de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+2}$ sí x ∈ [-1,10]

(56) Hallar el rango de la función $f(x)=\dfrac{[|1-x|]+[|x-1|]}{2-\sqrt{|x|-[|x|]}}$, sí x ∈ <0,1>

(57) Hallar el rango de la función $f(x)=8x[|\frac{5x-15}{x-4}|]+x^2[|\frac{2x-5}{x+2}|]$ donde $D_f =<-1,1]$

(58) Hallar el rango de la función $f(x)=\frac{2|x+1|-5}{2|x-2|+1}$ sí x ∈ <-3,5>

(59) Si $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ y $D_f =[4,20]$, Hallar R_f

(60) Hallar el rango de la función $f(x)=\frac{x^2}{4x^2+1}$, sí x ∈ [1,10]

(61) Dado $f(x)=4-\sqrt{(x+6)^2-9}$, x ∈ <-∞,-11>. Hallar R_f

(62) Determinar le rango y graficar la función $f(x)=|4-x^2[|\frac{7-x}{3}|]|$

(63) Determinar él domino, rango y graficar la función $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x>1 \\ \cos\pi, & -1\le x\le 1 \\ x-x^2, & x<-1 \end{cases}$

(64) Hallar el rango y graficar las funciones:

a) $f(x)=[|\frac{x^2-2x-1}{2}|]$, x ∈ [-1,3]

b) $f(x)=\sqrt{|x|-\frac{1}{2}[|x|]}$, x ∈ [-2,1>

(65) Calcular el rango y graficar las funciones dadas:

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{x+5}{x-2}, & si \quad |x-2|>3 \\ \sqrt{x^2+4x-1}, & si \quad 0<x<1 \\ 2+|2x-5|, & si \quad 2\le x\le 3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-9}-2, & -5<x\le -3 \\ |x+2|-3, & 0<x\le 5 \\ \frac{3x-16}{x-5}, & x>6 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} |x+3|, & si \quad -4\le x\le 0 \\ 3-x^2, & si \quad 0<x\le 4 \\ -2, & si \quad |x|>4 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -|x+4|, & si \quad -8\le x\le 2 \\ x^2-4x-2, & si \quad 2<x\le 5 \\ -x^2+10x-22, & si \quad 5<x\le 8 \\ -3, & si \quad |x|>8 \end{cases}$

4.16. OPERACIONES CON FUNCIONES.-

Consideremos dos funciones reales de variable real, f,g: R → R si $D_f \cap D_g \neq \phi$, Entonces:

a) IGUALDAD DE FUNCIONES.-

Diremos que las funciones f y g son iguales sí y sólo sí

i)	$D_f = D_g$
ii)	$f(x) = g(x) \Rightarrow \forall\, x \in D_f = D_g$

Ejemplo.- Las funciones $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^3 - 1$

Son iguales porque $D_f = D_g = R$ y f(x) = g(x).

Ejemplo.- Las funciones $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-6)}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-6}$ no son iguales puesto que $D_f = \langle -\infty, 1] \cup [6, +\infty\rangle$ y $D_g = [6, +\infty\rangle$ de donde $D_f \neq D_g$

Ejemplo.- Las funciones $f(x) = 2x^2 - 7x$, x ∈ <0,5] y $g(x) = 2x^2 - 7x$, x ∈ [1,9] no son iguales a pesar de tener la misma regla de correspondencia, debido a que sus dominios no coinciden.

b) SUMA DE FUNCIONES.-

Teniendo en cuenta que una función está definida cuando se indica su dominio y su regla de correspondencia

DEFINICIÓN.- Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente, entonces a la suma de f y g denotado por f + g se define:

i)	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
ii)	$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$

Ejemplo.- Hallar f + g si: f={(-1,2),(0,0),(2,4),(3,-1),(4,3)}, g= {(2,0),(3,4),(4,7),(6,2)}

Solución

Primero calculamos el dominio de f y g.

$D_f = \{-1,0,2,3,4\}$, $D_g = \{2,3,4,6\}$

Luego calculamos el dominio de la suma: $D_{f+g} = D_f \wedge D_g = \{2,3,4\}$

ahora calculamos los pares ordenados que pertenecen a f + g.

$$\begin{cases} (f+g)(2) = f(2)+g(2) = 4+0 = 4 & (2,4) \in f+g \\ (f+g)(3) = f(3)+g(3) = -1+4 = 3 \quad \Rightarrow & (3,3) \in f+g \\ (f+g)(4) = f(4)+g(4) = 3+7 = 10 & (4,10) \in f+g \end{cases}$$

Luego la suma de f y g es: f + g = {(2,4),(3,3),(4,10)}

Ejemplo.- Calcular (f + g)(x) sí: $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - 2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{si } x \leq 8 \\ 2x^3, & \text{si } x > 10 \end{cases}$

Solución

Primero calculamos el dominio de f y g

$D_f = <-\infty,0> \cup [1,+\infty>$, $D_g = <-\infty,8] \cup <10,+\infty>$

Luego calculamos el dominio de la suma f + g es: $D_{f+g} = D_f \cap D_g$



$D_{f+g} = D_f \cap D_g = <-\infty,0> \cup [1,8] \cup <10,+\infty>$

Ahora definimos la suma en cada intervalo

Si x < 0, $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x^2 - 2 + 3x + 1 = x^2 + 3x - 1$

Si $1 \leq x \leq 8$, (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + 3x + 1 = 5x + 2

Si x < 10, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + 2x^3 = 2x^3 + 2x + 1$

Luego la suma (f + g)(x) es: $(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & si \quad x < 0 \\ 5x + 2 & si \quad 1 \le x \le 8 \\ 2x^3 + 2x + 1 & si \quad x > 10 \end{cases}$

c) DIFERENCIA DE FUNCIONES.-

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente entonces a la diferencia de f y g denotada por f – g se define:

> **i)** $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
>
> **ii)** (f – g)(x) = f(x) – g(x) , $\forall \quad x \in D_f \cap D_g$

Ejemplo.- Hallar f – g sí f = {(1,2),(2,5),(3,4),(4,1)} y g = {(0,2),(1,0),(2,1),(-1,3)}

Solución

Primeramente calculamos el dominio D_f y D_g: $D_f = \{1,2,3,4\}$, $D_g = \{-1,0,1,2\}$

Ahora calculamos el dominio de la diferencia $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1, 2\}$

Calculando los pares ordenados que pertenecen a f – g

$$\begin{cases} (f-g)(1) = f(1) - g(1) = 2 - 0 = 2 \\ (f-g)(2) = f(2) - g(2) = 5 - 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,2) \in f - g \\ (2,4) \in f - g \end{cases}$$

Luego la diferencia f – g es: f – g = {(1,2),(2,4)}

d) MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES.-

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente, entonces a la multiplicación de f y g denotado por f.g se define:

> **i)** $D_{f.g} = D_f \cap D_g$
>
> **ii)** (f.g)(x) = f(x).g(x), $\forall \quad x \in D_f \cap D_g$

Ejemplo.- Hallar f.g si: f = {(1,4),(4,5)(2,3),(3,2)} y g = {(0,2),(1,2),(2,-1),(3,0),(5,2)}

Solución

Primeramente calculamos el dominio D_f y D_g: $D_f = \{1,2,3,4\}$, $D_g = \{0,1,2,3,5\}$

Ahora calculamos el dominio del producto: $D_{f.g} = D_f \wedge D_g = \{1,2,3\}$

Calculamos los pares ordenados que pertenecen a f.g

$$\begin{cases} (f.g)(1) = f(1)+g(1) = 4.2 = 8 \\ (f.g)(2) = f(2)+g(2) = 3.(-1) = -3 \\ (f.g)(3) = f(3)+g(3) = 2.(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,8) \in f.g \\ (2,-3) \in f.g \\ (3,0) \in f.g \end{cases}$$

Luego el producto f.g es: f.g = {(1,8),(2,-3),(3,0)}

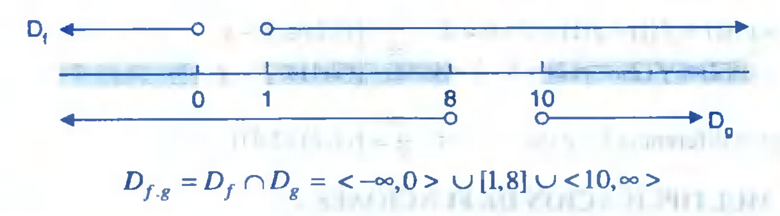
Ejemplo.- Hallar (f.g)(x) donde: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \ , \ x \geq 1 \\ x^2 - 2 \ , \ x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x+1 \ , \ x \leq 8 \\ 2x^3 \ , \ x > 10 \end{cases}$

Solución

Primeramente calculamos los dominios de f y g:

$D_f = <-\infty,0> \cup [1,+\infty>$, $D_g = <-\infty,8] \cup <10,+\infty>$

Ahora calculamos el dominio del producto f.g



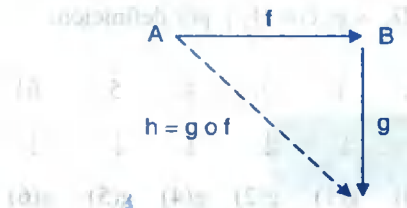
$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = <-\infty,0> \cup [1,8] \cup <10,\infty>$$

Ahora definimos el producto en cada intervalo

Si x < 0, $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2-2).(3x+1) = 3x^3 + x^2 - 6x - 2$

Si 1 ≤ x ≤ 8, $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x+1)(3x+1) = 6x^2 + 5x + 1$

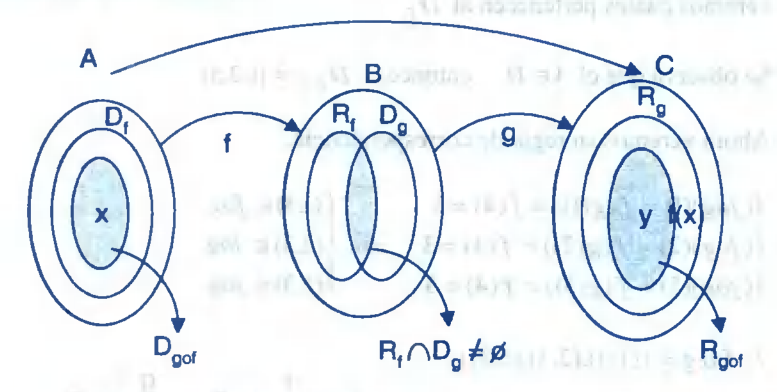
Si x > 10, $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x+1)2x^3 = 4x^4 + 2x^3$



OBSERVACIÓN. Para que exista la composición de funciones g o f es necesario que:

$$R_f \cap D_g \neq \phi.$$

ILUSTRACIÓN GRÁFICA



En esta representación gráfica se tiene:

i)	$D_{gof} \subseteq D_f \subseteq A$
ii)	$R_{gof} \subseteq R_g \subseteq C$

Ejemplo.- Sean f = {(0,1),(1,2),(2,3),(4,3),(5,2)} y g= {(6,7),(5,4),(4,3),(2,4),(1.4),(0,7)}

Hallar D_{gof} , D_{gof} , así como f o g y g o f.

<u>**Solución**</u>

i) Calculando D_{gof} ; $\begin{cases} (-3,3) \in f - g \\ (2,-3) \in f - g \\ (7,6) \in f - g \end{cases}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \,/\, x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$ por definición:

$$\begin{array}{ccccccc} D_g = \{ & 0, & 1, & 2, & 4, & 5, & 6\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & g(0) & g(1) & g(2) & g(4) & g(5) & g(6) \\ & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ & 7 & 4 & 4 & 3 & 4 & 7 \end{array}$$

veremos cuales pertenecen al D_f

Se observa que el $4 \in D_f$ entonces $D_{fog} = \{1,2,5\}$

Ahora veremos su regla de correspondencia.

$$\begin{cases} (fog)(1) = f(g(1)) = f(4) = 3 \\ (fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = 3 \\ (fog)(5) = f(g(5)) = f(4) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,3) \in fog \\ (2,3) \in fog \\ (5,3) \in fog \end{cases}$$

$\therefore$ f o g = {(1,3),(2,3),(5,3)}

ii) Calculando D_{gof} ;



$D_{gof} = \{x \in D_f \,/\, x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$ por definición.

$$\begin{array}{cccccc} D_f = \{ & 0, & 1, & 2, & 4, & 5\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & f(0) & f(1) & f(2) & f(4) & f(5) \\ & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}$$

Veremos cuáles de estos elementos pertenecen al D_g, entonces $1 \in D_g$, $2 \in D_g$ luego: $D_{gof} = \{0,1,5\}$

Luego el producto (f.g)(x) es: $(f.g)(x)=\begin{cases}3x^3+x^2-6x-2, & \text{si } x<0\\ 6x^2+5x+1, & \text{si } 1\le x\le 8\\ 4x^4+2x^3, & \text{si } x>10\end{cases}$

e) COCIENTE DE FUNCIONES.-

Si f y g son dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente entonces el cociente de f y g denotado por f/g se define

i) $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g \,/\, g(x)=0\}$

ii) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x\in D_{f/g}$

Ejemplo.- Hallar f/g si:

f ={(-2,3), (0,3), (4,0), (5,-3), (6,3)} y g ={(0,-2), (-2,5), (3,2), (5,0), (8,-2)}

Solución

Primeramente calculamos el dominio de f y g: $D_f=\{-2,0,4,5.6\}$, $D_g=\{-2,0,3,5,8\}$

Ahora calculamos el dominio del cociente f/g

$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g \,/\, g(x)=0\}$

$=\{-2,0,4,5,6\}\cap\{-2,0,3,5,8\}-\{5\in D_g \,/\, g(5)=0\}$ = {-2,0,5} – {5} = {-2,0}

Calculando los pares ordenados que pertenecen a f/g

$$\begin{cases}(\frac{f}{g})(-2)=\frac{f(-2)}{g(-2)}=\frac{3}{5}\\ (\frac{f}{g})(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-2,\frac{3}{5})\in\frac{f}{g}\\ (0,-\frac{3}{2})\in\frac{f}{g}\end{cases}$$

Luego el cociente $\frac{f}{g}$ es: $\frac{f}{g}=\{(-2,\frac{3}{5}),(0,-\frac{3}{2})\}$

Ejemplo.- Hallar $(\frac{f}{g})(x)$ sí: $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{si } x\in[-3,0>\\ x+2, & \text{si } x\in[0,4]\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{si } x\in[-2,2]\\ x-4, & \text{si } x\in<2,5]\end{cases}$

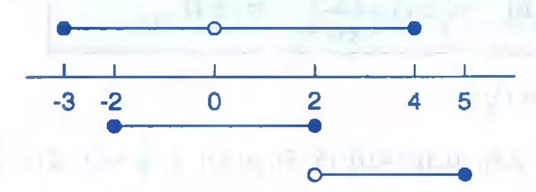
Solución

Calculando los dominios de f y g: $D_f=[-3,0>\cup[0,4]$, $D_g=[-2,2]\cup<2,5]$

Ahora calculamos el conjunto $\{x\in D_g\ /\ g(x)=0\}$

a) Si x ∈ [-2,2] ⇒ $g(x)=x^2+1=0$ ⇒ ∄ x tal que g(x) = 0

b) Si x ∈ <2,5] ⇒ g(x) = x − 4 = 0 ⇒ x = 4 entonces: x ∈ <2,4> ∪ <4,5]



$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{4\}=[-2,0>\cup<0,2]\cup<2,4]-\{4\}=[-2,0>\cup<0,2]\cup<2,4>$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x^2+1}, & \text{si } x\in[-2,0>\\[2mm] \dfrac{x+2}{x^2+1}, & \text{si } x\in<0,2]\\[2mm] \dfrac{x+2}{x+4}, & \text{si } x\in<2,4>\end{cases}$$

4.17. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.-

DEFINICIÓN.- Dadas dos funciones f y g, tales que: f: A ⟶ B ; g: B ⟶ C y que $R_f\cap D_g\neq\phi$, entonces la función compuesta "g o f" es aquella función definida por:

i)	$D_{gof}=\{x/x\in D_f\ \wedge\ f(x)\in D_g\}$
ii)	(gof)(x) = g(f(x)) es la regla de correspondencia.

Ahora veremos su regla de correspondencia.

$$\begin{cases}(gof)(0)=g(f(0))=g(1)=4\\(gof)(1)=g(f(1))=g(2)=4\\(gof)(5)=f(g(5))=g(2)=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(0,4)\in gof\\(1,4)\in gof\\(5,4)\in gof\end{cases}$$

$\therefore\ \ g\ o\ f=\{(0,4),(1,4),(5,4)\}$

Ejemplo.- Sean f, g: $R \longrightarrow R$ tal que: $f(x)=x^2+2x+3$, $g(x)=x-5$

Hallar $\left[\frac{(gof)(1)+(fog)(2).(fog)(3)-(gog)(2)}{(fog)(2)}\right]^{-2}$

Solución

Calculando cada una de las operaciones

(gof)(1) = (g(f(1)) = g(6) = 1 ; (fog)(2) = (f(g(2)) = f(-3) = 6

(fog)(3) = f(g(3)) = f(-2) = 3 ; (gog)(2) = g(g(2) = g(-3) = -8

Ahora reemplazamos en la expresión dada:

$$\left[\frac{(gof)(1)+(fog)(2).(fog)(3)-(gog)(2)}{(fog)(2)}\right]^{-2}=\left[\frac{1+(6)(3)-(-8)}{6}\right]^{-2}=\left(\frac{27}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{9}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{81}$$

Ejemplo.- Sea $g(x)=\begin{cases}-3x^2+1 & si\ \ x\geq 1\\ x-1 & si\ \ x<1\end{cases}$. Hallar $\frac{(gog)(1)+2g(-1)}{(gog)(-1)+g^2(1)}$

Solución

Calculando cada operación se tiene: $\begin{cases}(gog)(1)=g(g(1))=g(-2)=-3\\(gog)(-1)=g(g(-1))=g(-2)=-3\\g(-1)=-2,\ g(1)=-2\end{cases}$

Ahora reemplazamos en la expresión: $\frac{(gog)(1)+2g(-1)}{(gog)(-1)+g^2(1)}=\frac{-3+2(-2)}{-3+(-2)^2}=\frac{-3-4}{-3+4}=-7$

Ejemplo.- Si $f(x)=x^2$ encontrar dos funciones g para los cuales $(fog)(x)=4x^2-12x+9$

Solución

$(fog)(x)=f(g(x))=4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

$g^2(x)=(2x-3)^2 \Rightarrow g(x)=\pm(2x-3)$

$\therefore\ g_1(x)=2x-3 \quad , \quad g_2(x)=-2x+3$

Ejemplo.- Dadas las funciones f(x) = 3x – 2 sí x ∈ < 0 ,+∞> ; $g(x)=x^2$ sí x ∈ <-3,5>

a) Hallar fog (la función f composición g)

b) Hallar gof (la función g composición f)

Solución

a) 1ro. calculamos el dominio de f o g: $D_{fog}=\{x\in D_g\ /\ x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$

$x\in D_g \wedge g(x)\in D_f$

$x\in <-3,5> \wedge x^2 \in <0,\infty>$ entonces x ∈ <-3,5> Λ <-∞,0> ∪ <0,∞>

x ∈ <-3,0> ∪ <0,5>

2do. Calculando la regla de correspondencia de f o g

$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2)=3x^2-2$

Por lo tanto: $(fog)(x)=3x^2-2$ para x ∈ <-3,0> ∪ <0,5>

b) 1ro. Calculamos el dominio de g o f: $D_{gof}=\{x\in D_f\ /\ x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}$

$x\in D_f \wedge f(x)\in D_g$

x ∈ <0,∞> Λ 3x – 2 ∈ <-3,5> entonces x ∈ <0,∞> Λ -3 < 3x – 2 < 5

x ∈ <0,∞> Λ -1 < 3x < 7 entonces $x \in <0,\infty> \wedge -\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3} \Rightarrow x \in <0,\frac{7}{3}>$

2do. Calculando la regla de correspondencia de g o f

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

Por lo tanto: $(gof)(x) = 9x^2 - 12x + 4$, para: $x \in <0,\frac{7}{3}>$

Ejemplo.- Hallar fog si f(x) = 3x + 2, x ∈ <-∞,3>, $g(x) = \begin{cases} 2x & si \ \ x < 0 \\ -3x & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$

Solución

$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = 2x & si \ \ x < 0 \\ g_2(x) = -3x & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$, donde $D_g = D_{g_1} \cup D_{g_2}$ dominio de la función g

Ahora calculamos el dominio de f o g

$$D_{fog} = \{x \in D_g \ / \ x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x \in D_g \ / \ x \in D_{g_1} \cup D_{g_2} \wedge g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) D_f\} \cup \{x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_f\} = D_{fog_1} \cup D_{fog_2}$$

Luego: $(fog)(x) = \begin{cases} (fog_1)(x) & si \ \ x \in D_{fog_1} \\ (fog_2)(x) & si \ \ x \in D_{fog_2} \end{cases}$

Ahora calculando D_{fog_1} y D_{fog_2}

$$D_{fog_1} = \{x \in D_{g_1} \ / \ x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_f\}$$

x ∈ <-∞,0> Λ 2x ∈ <-∞,3>

x ∈ <-∞,0> Λ x ∈ <-∞,3/2> entonces x ∈ <-∞,0> por lo tanto $D_{fog_1} = <-\infty,0>$

$$D_{fog_2} = \{x \in D_{g_2} \ / \ x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_f\}$$

x ∈ [1,∞> Λ -3x ∈ <-∞,3> entonces x ∈ [1,∞> Λ x ∈ <-1,∞> entonces x ∈ [1,∞>

$D_{fog_2} = [1, \infty >$

$(fog_1)(x) = f(g_1(x)) = f(2x) = 3(2x) + 2 = 6x + 2$

$(fog_2)(x) = f(g_2(x)) = f(-3x) = 3(-3x) + 2 = -9x + 2$

$$\therefore \quad (fog)(x) = \begin{cases} 6x + 2 \quad si \quad x \in <-\infty, 0> \\ -9x + 2\, si \quad x \in [1, \infty> \end{cases}$$

Ejemplo.- Hallar (f o g)(x) sí: $f(x) = \begin{cases} x^2 \quad si \quad x < 1 \\ -x^3 \; si \quad x \geq 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x \quad si \quad x < 2 \\ 2x \quad si \quad x \geq 4 \end{cases}$

Solución

Veremos el caso cuando las funciones tienen dos reglas de correspondencia.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \quad si \quad x \in D_{f_1} \\ f_2(x) \quad si \quad x \in D_{f_2} \end{cases} , \quad g(x) = \begin{cases} g(x) \quad si \quad x \in D_{g_1} \\ g_2(x) \quad si \quad x \in D_{g_2} \end{cases}$$

el dominio de f o g se obtiene siguiendo el mismo criterio del ejemplo anterior, es decir:

i) $D_{f_1og_1} = \{x \in D_{g_1} \; / \; x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_{f_1}\}$

x ∈<-∞,2> Λ -x ∈ <-∞,1> entonces x ∈<-∞,2> Λ x ∈ <-1,∞> de donde x ∈<-1,2>

ii) $D_{f_1og_2} = \{x \in D_{g_2} \; / \; x \in_{g_2} \wedge g_2(x) \in f_1\}$

x ∈ [4,∞> Λ 2x ∈ <-∞,1> entonces x ∈ [4-∞> Λ x ∈ <-∞,1/2> ⇒ x ∈ ϕ

iii) $D_{f_2og1} = \{x \in D_{g_1} \; / \; x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_{f_2}\}$

x ∈<-∞,2> Λ -x ∈ [2,∞> entonces x ∈<-∞,2> Λ ∈ <-∞,-2> de donde x ∈<-∞,-2]

iv) $D_{f_2og_2} = \{x \in D_{g_2} \; / \; x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_{f_2}\}$

x ∈[4,∞> Λ 2x ∈ [2,∞> entonces x ∈[4,∞> Λ x ∈ [1,∞> de donde x ∈[4,∞>

Luego de i) , iii) , iv), la regla de correspondencia es:

$(f_1og_1)(x)=f_1(g_1(x))=f_1(-x)=x^2$

$(f_2og_1)(x)=f_2(g_1(x))=f_2(-x)=x^3$

$(f_2og_2)(x)=f_2(g_2(x))=f_2(2x)=-8x^3$, luego

$$(fog)(x)=\begin{cases}(f_1og_1)(x) & , si \quad x\in<-1,2> \\ (f_2og_1)(x) & , si \quad x\in<-\infty,-2] \\ (f_2og_2)(x) & , si \quad x\in[4,\infty>\end{cases} \quad \therefore\ (fog)(x)=\begin{cases}x^3 & , si \ x\in<-\infty,-2] \\ x^2 & , si \ x\in<-1,2> \\ -8x^3 & , si \ x\in[4,\infty>\end{cases}$$

4.18. PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.-

Consideremos las funciones f, g, h, I (identidad)

1. f o g ≠ g o f no es conmutativa
2. (fog) o h = fo(goh) asociativa
3. (f + g) o h = (foh) + (goh) distributiva
4. (fg) o h = (f o h).(g o h)
5. f o I = f , I o f = f , ∀ f
6. $I^n o I^m = I^{nm}, n,m\in Z^+$
7. $I^{1/n} o I^n = I^n \ o \ I^{1/n} = I$, $n\in z^+$, n impar
8. $I^n = \underbrace{I.I.I...I}_{n-veces}$

4.19. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1. Dada las funciones f = {(2,1),(-2,3),(1,5),(-3,4),(7,8)}; g = {(3,-2),(7,2),(-3,1),(2,4)}

Calcular f + g, f – g, f.g , f/g

Solución

Calculando el dominio de cada función: $D_f=\{-3,-2,1,2,7\}$; $D_g=\{-3,2,3,7\}$

Como $D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap D_g=\{-3,2,7\}$

$$\begin{cases}(f+g)(-3)=f(-3)+g(-3)=4+1=5 \\ (f+g)(2)=f(2)+g(2)=1+4=5 \\ (f+g)(7)=f(7)+g(7)=8+2=10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(-3,5)\in f+g \\ (2,5)\in f+g \\ (7,10)\in f+g\end{cases}$$

∴ f + g = {(-3,5),(2,5),(7,10)}

$$\begin{cases}(f-g)(-3)=f(-3)-g(-3)=4-1=3\\(f-g)(2)=f(2)-g(2)=1-4=-3\\(f-g)(7)=f(7)-g(7)=8-2=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-3,3)\in f-g\\(2,-3)\in f-g\\(7,6)\in f-g\end{cases}$$

$\therefore$ f – g = {(-3,3),(2,-3),(7,6)}

$$\begin{cases}(f.g)(-3)=f(-3).g(-3)=4(1)=4\\(f.g)(2)=f(2).g(2)=1(4)=4\\(f.g)(7)=f(7).g(7)=8(2)=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-3,4)\in f.g\\(2,4)\in f.g\\(7,16)\in f.g\end{cases}$$

$\therefore$ f . g = {(-3,4),(2,4),(7,16)}

Calculando el dominio de f/g: $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x/g(x)=0\}=\{-3,2,7\}$

$$\begin{cases}(\frac{f}{g})(-3)=\frac{f(-3)}{g(-3)}=\frac{4}{1}=4\\(\frac{f}{g})(2)=\frac{f(2)}{g(2)}=\frac{1}{4}\\(\frac{f}{g})(7)=\frac{f(7)}{g(7)}=\frac{8}{2}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-3,4)\in\frac{f}{g}\\(2,\frac{1}{4})\in\frac{f}{g}\\(7,4)\in\frac{f}{g}\end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{f}{g}=\{(-3,4),(2,\frac{1}{4}),(7,4)\}$$

(2) Sean f = {(1,3),(3,5),(2,4),(4,6)}; g = {(4,1),(0,-3),(3,2),(1,0)}. Hallar f/g

Solución

Calculando el dominio de cada función: $D_f=\{1,2,3,4\}$, $D_g=\{0,1,3,4\}$

Calculando el dominio de f/g: $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x/g(x)=0\}=\{1,3,4\}-\{1\}=\{3,4\}$

$$\begin{cases}(\frac{f}{g})(3)=\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{5}{2}\\(\frac{f}{g})(4)=\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{6}{1}=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3,\frac{5}{2})\in\frac{f}{g}\\(4,6)\in\frac{f}{g}\end{cases}\Rightarrow\ \frac{f}{g}=\{(3,\frac{5}{2}),(4,6)\}$$

(3) Sí $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x-3, & -1\le x<4 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -2x, & -4<x<3 \\ -4, & x\ge 3 \end{cases}$. Calculando f + g

Solución

Calculando el dominio de cada función:

$D_f = <-\infty,-1> \cup [-1,4>$; $D_g = <-4,3> \cup [3,\infty>$

Ahora interceptamos los dominios

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = <-4,-1> \ \cup \ [-1,3> \ \cup \ [3,4>$

Si $x \in <-4,-1>$, $f(x)+g(x) = x+4-2x = -x+4$

$x \in [-1,3>$, $f(x)+g(x) = x-3-2x = -x-3$

$x \in [3,4>$, $f(x)+g(x) = x-3-4 = x-7$

de donde $(f+g)(x)=\begin{cases} -x+4 & si\ \ x\in <-4,-1> \\ -x-3 & si\ \ x\in [-1,3> \\ x-7 & si\ \ x\in [3,4> \end{cases}$


Hallar (f + g)(x) si f y g están definidas por:

$f(x)=\begin{cases} |x-1| & , si\ |x-1|\le 1 \\ 3x & , si\ |x-1|>1 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} [\![|x|]\!] & , si\ \ -3\le x<1 \\ -2 & , si\ \ 1\le x\le 2 \\ 1-2x & , si\ \ x<2 \end{cases}$

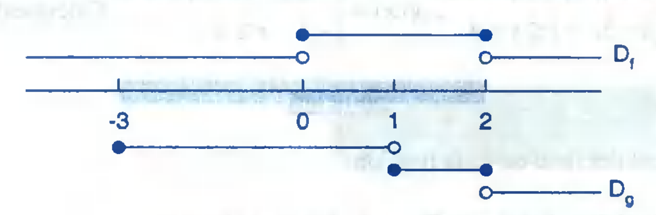
Solución

$|x-1|\le 1 \Rightarrow -1\le x-1\le 1 \Rightarrow 0\le x\le 2$

$|x-1|>1 \Rightarrow x-1>1 \ \vee \ x-1<-1 \Rightarrow x>2 \ \vee \ x<0$

Ahora a la función f(x) expresamos así: $f(x)=\begin{cases} |x-1| & si\ 0\le x\le 2 \\ 3x & si\ x\in <-\infty,0> \cup <2,+\infty> \end{cases}$

Dibujando los dominios de cada función en una recta horizontal.



$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-3,0>\cup[0,1>\cup[1,2]\cup<2,\infty>$

Calculando la suma en cada intervalo

x ∈ [-3,0> $\Rightarrow$ $f(x)+g(x)=3x+[|x|]$

x ∈ [0,1> $\Rightarrow$ $f(x)+g(x)=|x-1|+[|x|]$

x ∈ [1,2] $\Rightarrow$ $f(x)+g(x)=|x-1|-2$

x ∈ <2,∞> $\Rightarrow$ f(x) + g(x) = 3x + 1 – 2x = x + 1

NOTA.- Se efectúa la operación en sus propias reglas de correspondencia

$$(f+g)(x)=\begin{cases}3x+[|x|] & , \text{ si } x\in[-3,0> \\ |x-1|+[|x|], & \text{si } x\in[0,1> \\ |x-1|-2 & , \text{ si } x\in[1,2] \\ x+1 & , \text{ si } x\in<2,+\infty>\end{cases}$$

(5) Sí f(x) = | x – 2 | + | x + 2 | , $g(x)=\begin{cases}3x+2, & si\ x<0\\ 1-x, & si\ x\geq 0\end{cases}$ y H(x) = f(x) + g(x) , $D_H=[-2,3>$. Hallar la gráfica y el rango de H.

Solución

Primero definiremos los valores absolutos

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & , si \quad x\geq 2\\ 2-x & , si \quad x<2\end{cases} \quad ; \quad |x+2|=\begin{cases}x+2 & , si \quad x\geq -2\\ -x-2 & , si \quad x<-2\end{cases}$$

+ - +
-2 2

Ahora definiremos f(x) en cada intervalo

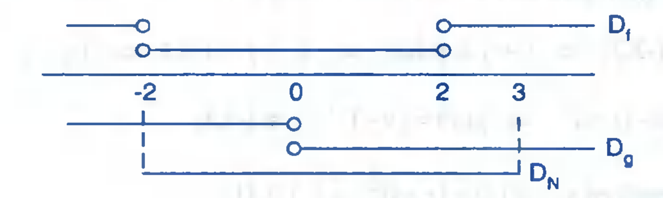
Si $x < -2$, $f(x) = (2 - x) + (-x - 2) = -2x$

$-2 \le x < 2$, $f(x) = 2 - x + x + 2 = 4$

$x \ge 2$, $f(x) = x - 2 + x + 2 = 2x$

por lo tanto $f(x) = \begin{cases} -2x & , \ si \ \ x < -2 \\ 4 & , \ si \ \ -2 \le x < 2 \\ 2x & , \ si \ \ x \ge 2 \end{cases}$

Ahora calculemos los dominios de cada función



$D_H = [-2,3> = [-2,0> \cup [0,2> \cup [2,3>$

Definiremos a la función H(x) en cada intervalo

$x \in [-2,0> \Rightarrow H(x) = 4 + 3x + 2 = 3x + 6$

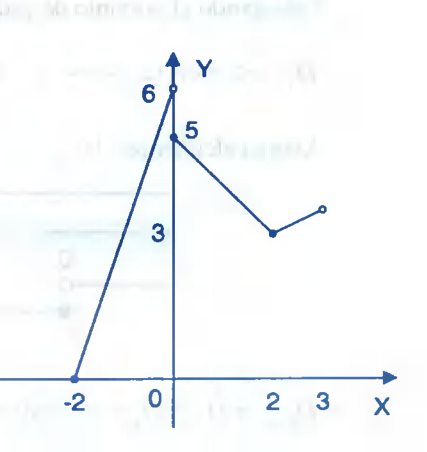
$x \in [0,2> \Rightarrow H(x) = 4 + 1 - x = 5 - x$

$x \in [2,3> \Rightarrow H(x) = 2x + 1 - x = x + 1$

Por lo tanto la función H(x) queda definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 3x+6 & si \ \ -2 \le x < 0 \\ 5 - x & si \ \ 0 \le x < 2 \\ x + 1 & si \ \ 2 \le x < 3 \end{cases}$$

Graficando la función H(x) se tiene:



$R_H = [0,6>$

6) Si se tiene que $f(x+2)=x^2$ sí x ∈ <-5,5] y $g(x-1)=x^2$ sí x ∈[-2,2]. Calcular f(x) y g(x)

Solución

Calculando f(x), para esto x + 2 = y ⇒ x = y − 2

Como x ∈ <-5,5] ⇒ y−2 ∈ <-5,5] de donde -5< y− 2 ≤ 5 ⇒ -3 < y ≤ 7 ⇒ y ∈ <-3,7]

Luego $f(x+2)=x^2 \Rightarrow f(y)=(y-2)^2$, y ∈ <-3,7]

Ahora evaluamos en x: $f(x)=(x-2)^2$, x ∈ <-3,7]

Calculando g(x), para esto x − 1 = y ⇒ x = y + 1

Como x ∈ [-2,2] ⇒ y + 1 ∈ [-2,2] ⇒ -2 ≤ y + 1 ≤ 2 ⇒ -3 ≤ y ≤ 1 ⇒ y ∈ [-3,1]

Luego $g(x-1)=x^2 \Rightarrow g(y)=(y+1)^2$, y ∈ [-3,1]

Ahora veremos en x: $g(x)=(x+1)^2$, x ∈ [-3,1]

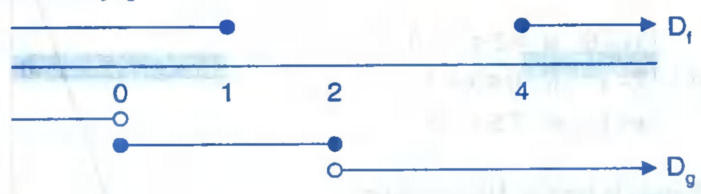
7) Calcular (f+g)(x) y (f/g)(x), donde $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & si\ x\le 1\\ \sqrt{x}, & si\ x\ge 4\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}x^2-1, & si\ x<0\\ x, & si\ 0\le x\le 2\\ x+5, & si\ x>2\end{cases}$

Solución

Calculando el dominio de cada función

$D_f =<-\infty,1] \cup [4,+\infty>$, $D_g =<-\infty,0> \cup [0,2] \cup <2,+\infty>$

Ahora calculamos D_{f+g}



$D_{f+g}=D_f \cap D_g = <-\infty,0> \cup [0,1] \cup [4,+\infty>$

Calculando f(x) + g(x) en cada intervalo

Sí x ∈ <-∞,0> , $f(x)+g(x)=\sqrt{1-x}+x^2-1$

x ∈ [0,1] , $f(x)+g(x)=\sqrt{1-x}+x$

x ∈ [4,+∞> , $f(x)+g(x)=\sqrt{x}+x+5$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}+x^2-1 & , \ si \quad x<0\\ \sqrt{1-x}+x & , \ si \quad 0\le x\le 1\\ \sqrt{x}+x+5 & , \ si \quad x\ge 4\end{cases}$$

Ahora calculamos $D_{f/g}$ es decir:

$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x/g(x)=0\}=$ <-∞,0> ∪ [0,1] ∪ [4,+∞> - {0,-1}

= <-∞,-1> ∪ <-1,0> ∪ <0,1] ∪ [4,+∞>

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & , \ si \quad x\in<-\infty,-1>\cup<-1,0>\\ \dfrac{\sqrt{1-x}}{x} & , \ si \quad x\in<0,1]\\ \dfrac{\sqrt{x}}{x+5} & , \ si \quad x\ge 4\end{cases}$$

(8) Calcular (f + g)(x) y (f/g)(x) donde

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & , \ si \quad x<-2\\ \sqrt{1-x} & , \ si \quad -2\le x<0\\ x & , \ si \quad 0\le x<20\end{cases} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases}x^2-1 & , \ si \quad -10<x<2\\ \sqrt{x} & , \ si \quad x\ge 2\end{cases}$$

Solución

Calculando el dominio de cada función

$D_f=<-\infty,-2>\cup[-2,0>\cup[0,20>$, $D_g=<-10,2>\cup[2,+\infty>$

Ahora calculamos el D_{f+g}



$D_{f+g} = D_f \cap D_g = <-10,-2> \cup [-2,0> \cup [0,2> \cup [2,20>$

Calculando f(x) + g(x) en cada intervalo.

$x \in <-10,-2>,\quad f(x)+g(x) = x^2-1+x^2-1 = 2x^2-2$

$x \in [-2,0>,\quad f(x)+g(x) = \sqrt{1-x}+x^2-1$

$x \in [0,2>,\quad f(x)+g(x) = x+x^2-1$

$x \in [2,20>,\quad f(x)+g(x) = x+\sqrt{x}$

Luego se tiene: $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \begin{cases} 2x^2-2 & si \quad -10 \le x < -2 \\ \sqrt{1-x}+x^2-1 & si \quad -2 \le x < 0 \\ x^2+2x-1 & si \quad 0 \le x < 2 \\ x+\sqrt{x} & si \quad 2 \le x < 20 \end{cases}$

Calculando (f/g)(x)

$$(\frac{f}{g})(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-1} & si\ -10 < x < 2-\{-1,1\} \\ \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & si\ -2 \le x < 0-\{-1,1\} \\ \frac{x}{x^2-1} & si\ 0 \le x < 2-\{-1,1\} \\ \frac{x}{\sqrt{x}} & si\ \ 2 \le x < 20 \end{cases} \quad \text{ósea} \quad (\frac{f}{g})(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ -10 < x < -2 \\ \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & si\ x \in [-2,-1> \cup <-1,0> \\ \frac{x}{x^2-1} & si\ x \in [0,1> \cup <1,2> \\ \frac{x}{\sqrt{x}} & si\ x \in [2,20> \end{cases}$$

9 Dadas las funciones definidas por:

f = {(0,0),(4,3),(2,4),(-3,2),(3,-1)} y g = {(6,2),(3,4),(2,0),(4,7)}. Calcular f o g

Solución

Calculando D_{fog} es decir: $D_{fog}=\{x/x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$

$$\begin{array}{ccccc} D_g = \{ & 2, & 3, & 4, & 6 \ \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & g(2) & g(3) & g(4) & g(6) \\ & \| & \| & \| & \| \\ & 0 & 4 & 7 & 2 \end{array}$$

Veremos cuales pertenecen al D_f

Se observa que: $0\in D_f$, $4\in D_f$, $2\in D_f$ entonces $D_{fog}=\{2,3,6\}$

Ahora calculamos los elementos de f o g

$$\begin{cases}(fog)(2)=f(g(2))=f(0)=0\\(fog)(3)=f(g(3))=f(4)=3\\(fog)(6)=f(g(6))=f(2)=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(2,0)\in D_{fog}\\(3,3)\in D_{fog}\\(6,4)\in D_{fog}\end{cases}$$

$$\therefore \ f\ o\ g=\{(2,0),(3,3),(6,4)\}$$

(10) Sean las funciones reales de variable real $f(x)=\begin{cases}x+2 \ , & x\le 1\\ x-1 \ , & x>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2 \ , & x<0\\ 1-x \ , & x\ge 0\end{cases}$

Hallar f o g

Solución

De acuerdo a los criterios establecidos se tiene:

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x)=x+2 \ , & x\le 1\\ f_2(x)=x-1 \ , & x>1\end{cases} \ , \quad g(x)=\begin{cases}g_1(x)=x^2 \ , & x<0\\ g_2(x)=1-x \ , & x\ge 0\end{cases}$$

Calculando $D_{f_1og_1}=\{x\in D_{g_1} \ \Lambda \ g_1(x)\in D_{f_1}\}$

$x\in <-\infty,0> \Lambda \ x^2\le 1$ desarrollando $x \in <-\infty,0> \Lambda \ -1\le x\le 1 \Rightarrow x\in [-1,0>$

$(f_1og_1)(x)=f_1(g_1(x))=f_1(x^2)=x^2+2$, $x\in [-1,0>$

Calculando $D_{f_1og_2}=\{x/x\in D_{g_2}\wedge\ g_2(x)\in D_{f_1}\}$

$x\in[0,+\infty>\ \wedge\ 1-x\in<-\infty,1]$ entonces $x\in[0,+\infty>\ \wedge\ 0\le x<\infty\ \Rightarrow\ x\in[0,+\infty>$

$(f_1og_2)(x)=f_1(g_2(x))=f_1(1-x)=1-x+2=3-x$

Calculando $D_{f_2og_1}=\{x/x\in D_{g_1}\wedge g_1(x)\in D_{f_2}\}$

$x\in<-\infty,0>\ \wedge\ x^2\in<1,+\infty>$

$x\in<-\infty,0>\ \wedge\ x\in<-\infty,-1>\cup<1,+\infty>=<-\infty,-1>\ \Rightarrow\ x\in<-\infty,-1>$

$(f_2og_1)(x)=f_2(g_1(x))=f_2(x^2)=x^2-1$

Calculando $D_{f_2og_2}=\{x/x\in D_{g_2}\wedge\ g_2(x)\in D_{f_2}\}$

$x\in[0,+\infty>\ \wedge\ 1-x\in<1,+\infty>$ entonces $x\in[0,+\infty>\ \wedge\ x\in<-\infty,0>\ \Rightarrow\ \phi$

$$(fog)(x)=\begin{cases}x^2-1 & si\ \ x<-1\\ x^2+2 & si\ \ x\in[-1,0>\\ 3-x & si\ \ x\in[0,+\infty>\end{cases}$$

(11) Dadas las funciones: $f(x)=\begin{cases}x, & x\in<-\infty,1]\\ -1, & x\in<1,+\infty>\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}x^2-8\ , & x<0\\ [|x|]\ , & x\ge 0\end{cases}$

Calcular (f o g)(x)

Solución

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x)=x, & x\in<-\infty,1]\\ f_2(x)=-1, & x\in<1,+\infty>\end{cases}\ ,\ g(x)=\begin{cases}g_1(x)=x^2-8 & si\ \ x<0\\ g_2(x)=[|x|] & si\ \ x\ge 0\end{cases}$$

$$D_{fog}=D_{f_1og_1}\cup D_{f_1og_2}\cup D_{f_2og_1}\cup D_{f_2og_2}$$

$$D_{f_1og_1}=\{x/x\in D_{g_1}\wedge g_1(x)\in D_{f_1}\}$$

$$x<0\ \wedge\ x^2-8\in<-\infty,1]\ \Rightarrow\ x<0\wedge -\infty<x^2\le 9$$

$$\Rightarrow\ x<0\ \wedge\ (-\infty<x^2\ \wedge\ x^2\le 9)\ \Rightarrow\ x<0\ \ \wedge\ (R\ \wedge -3\le x\le 3)$$

$\Rightarrow \quad x < 0 \quad \wedge \ -3 \leq x \leq 3 \ \Rightarrow \ x \in [-3,0>$

$(f_1 o g_1) = f_1(g_1(x)) = f_1(x^2 - 8) = x^2 - 8$

$$(f_1 o g_1)(x) = x^2 - 8, \quad x \in [-3,0>$$

$D_{f_1 o g_2} = \{x / x \in D_{g_2} \wedge \ g_2(x) \in D_{f_1}\}$

$x \geq 0 \ \wedge \ [| x |] \in <-\infty, 1] \quad \Rightarrow \quad x \geq 0 \ \wedge \ -\infty < [| x |] \leq 1$

$\Rightarrow \quad x \geq 0 \ \wedge \ -\infty < x < 2 \ \Rightarrow \ x \in [0,2>$

$(f_1 o g_2)(x) = f_1(g_2(x)) = f_1([| x |]) = [| x |]$

$$(f_1 o g_2)(x) = [| x |], \quad x \in [0,2>$$

$D_{f_2 o g_1} = \{x / x \in D_{g_1} \wedge \ g(x) \in D_{f_2}\}$

$x < 0 \ \wedge \ x^2 - 8 \in <1, +\infty> \ \Rightarrow \ x < 0 \ \wedge 9 < x^2 < \infty$

$x < 0 \ \wedge \ (9 < x^2 \ \wedge \ x^2 < +\infty) \ \Rightarrow x < 0 \ \wedge (x < -3 \vee x > 3) \Rightarrow x \in <-\infty, -3>$

$(f_2 o g_1)(x) = f_2(g_1(x)) = f_2(x^2 - 8) = -1$

$$(f_2 o g_1)(x) = -1, \quad x \in <-\infty, -3>$$

$D_{f_2 o g_2} = \{x / x \in D_{g_2} \wedge \ g_2(x) \in D_{f_2}\}$

$x \geq 0 \ \wedge \ [| x |] \in <1, +\infty> \ \Rightarrow \ x \geq 0 \ \wedge \ 1 < [| x |] < +\infty$

$\Rightarrow \quad x \geq 0 \ \wedge \ 2 \leq x < \infty \ \Rightarrow \ x \in [2, +\infty>$

$(f_2 o g_2) = f_2(g_2(x)) = f_2([| x |]) = -1, \ x \in [2, +\infty>$

$(f_2 o g_2)(x) = -1, \ x \in [2, +\infty>$

$$(f o g)(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & si \quad x \in [-3,0> \\ [| x |] & si \quad x \in [0,2> \\ -1 & si \quad x \in <-\infty, -3> \cup [2, +\infty> \end{cases}$$

(12) Si $f(x)=x^2$ y $(fog)(x)=4x^2-12x+9$ encontrar dos funciones g(x).

Solución

$(fog)(x)=f(g(x))=4x^2-12x+9$

$g^2(x)=(2x-3)^2 \Rightarrow g(x) = \pm(2x-3)$ $\therefore\ g_1(x)=2x-3,\ g_2(x)=-2x+3$

(13) Sí $f(x-1)=x-2$ y $(gof)(x+2)=2x^2-x$. Calcular g(x)

Solución

$f(x-1)=x-2 \Rightarrow f(x)=x-1$

$(gof)(x+2)=2x^2-x \Rightarrow (gof)(x)=2(x-2)^2-(x-2)=2x^2-9x+10$

$(gof)(x)=2x^2-9x+10$ de donde $g(f(x))=2x^2-9x+10$

$g(x-1)=2x^2-9x+10 \Rightarrow g(x)=2(x+1)^2-9(x+1)+10=2x^2-5x+3$

(14) Si $f(x)=x^2+2$ y $g(x)=x+a$. determinar el valor de a de modo que $(f\ o\ g)(3)=(g\ o\ f)(a-1)$.

Solución

$(fog)(3)=f(g(3))=f(3+a)=(3+a)^2+2=a^2+6a+11$ **... (1)**

$(gof)(a-1)=g(f(a-1))=g((a-1)^2+2)$

$=g(a^2-2a+3)=a^2-2a+3+a=a^2-a+3$ **... (2)**

Igualando (1) y (2) se tiene: $a^2+6a+11=a^2-a+3 \Rightarrow a=-\dfrac{8}{7}$

(15) Si $H(x)=\cos 2x$ y $f(x)=\text{sen } x$ encuentre una función g tal que $H(x)=(g\ o\ f)(x)$

Solución

$H(x)=(g\ o\ f)(x)=g(f(x))=\cos 2x$

$g(\text{sen } x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x=1-2\,\text{sen}^2 x$ $\therefore\ g(x)=1-2x^2$

4.20. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Calcular $f \pm g$, $f.g$, f/g, donde $f = \{(1,2),(3,4),(2,5),(4,1)\}$; $g=\{(3,-1),(2,1),(1,0)(0,2)\}$

2. Calcular $f \pm g$, $f.g$, f/g, donde $f = \{(-3,2),(0,0),(2,4),(3,-1),(4,3)\}$,

   $g = \{(2,0),(3,4),(4,7),(6,2)\}$

3. Si $f = \{(1,3),(2,6),(4,8),(6,2)\}$ y $g = \{(1,2),(2,-1),(0,1),(4,5),(7,0)\}$

   Hallar $f + g$, $f - g$, $f.g$, f/g

4. Si $f = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,-6),(5,-5)\}$ y $g = \{(0,8),(1,3),(2,0),(3,7),(4,0),(5,10)\}$

   Calcular $f + g$, $f - g$, $f.g$, f/g

5. Sean $f = \{(2,8),(8,4),(6,9),(4,7),(3,6),(1,5)\}$ y $g = \{(7,1),(3,2),(5,5),(10,5),(1,3)\}$

   Hallar $f + g$, $f - g$, $f.g$, f/g

6. Sean $f = \{(4,1),(6,5),(5,4),(8,3),(9,2),\}$ y $g = \{(8,-5),(2,2),(5,-4)\}$

   Calcular $f + g$, $f - g$, $f.g$, f/g

7. Calcular $f + g$, $f.g$, f/g de las funciones

   a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, x \geq 1 \\ x^2 - 2, x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x+1, x \leq 8 \\ 3x^3, x > 10 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 7 \quad , x \leq 10 \\ x-1 \ , \ x \geq 11 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x-1 \ , \ |x-1| < 1 \\ \quad x \ , \ x > 3 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \quad si \quad x > 1 \\ |x-1| \, si \quad x \leq 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} \ , \ x \geq -1 \\ x^2 - 1 \ , \ x < -1 \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ \ x \in [-10,-7> \\ 2x & si \ \ x \in [-4,0> \\ 2x^2 - 2 & si \ \ x \in <0,8> \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x^2 + x & , \ si \ \ x \in <-8,-4] \\ -x+3 & , \ si \ \ x \in <-4,0] \\ x^2 + 2 & , \ si \ \ x \in <0,3] \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , x\in[0,1> \\ x^2 & , x\in[2,5> \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 3x & , x\in<-1,1] \\ 2x & , x\in<1,4] \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} |x| & , x\in[-1,3> \\ -2x+3 & , x\in[3,6] \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1} & , x\in[1,4> \\ [|x|] & , x\in[5,7> \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , |x|\le 2 \\ x & , x>2 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x-1 & , 0\le x\le 3 \\ x+1 & , x<0 \end{cases}$

(8) Hallar (f+g)(x) y (f / g)(x) sí: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x} & , x\le 1 \\ \sqrt{x} & , x\ge 4 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} x^2-1 & , x<0 \\ x & , 0\le x\le 2 \\ x+5 & , x>2 \end{cases}$

(9) Hallar (f + g)(x) , donde:

$f(x)=\begin{cases} [|x-1|] & , x\in<-4,-1] \\ [|x|]+1 & , x\in[0,2] \\ |x-2|+3 & , x\in<-1,0>\cup<2,3] \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 5 & , x\in<-3,-1> \\ -2 & , x\in<0,2> \\ -3 & , x\in[-1,0>\cup[2,3> \end{cases}$

(10) Dadas las funciones definidas por: $f(x)=\begin{cases} 4x+[|x|] & , x\in<-3,0> \\ |x^2+1|-3 & , x\in<1,6> \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} [|-x|]-5x & , x\in<-4,-1] \\ |x-3| & , x\in<0,2] \end{cases}$. Hallar (f + g)(x) y graficar

(11) Hallar (f/g)(x) donde: $f(x)=\begin{cases} |x| & , x\in[-5,-1] \\ 2x & , x\in[1,4] \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} [|x-2|] & , x\in[0,3> \\ x^2 & , x\in[3,6] \end{cases}$

(12) Hallar (f + g)(x) y graficar donde

$f(x)=\begin{cases} [|x-1|] & , x\in<-4,-1] \\ [|x|]+1 & , x\in[0,2] \\ |x-2|+3 & , x\in<-1,0>\cup<2,3] \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 7 & , x\in[-3,-1> \\ 1 & , x\in[0,2> \\ -2 & , x\in[-1,0>\cup[2,3] \end{cases}$

(13) Halle $D_{f+g}\cap R_{f+g}$ si $f(x)=\begin{cases} g(x) & , x\in<-1,2> \\ x^2+2 & , x\in[2,\infty> \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} h(x) & , x\in<-\infty,-1> \\ 2x-1 & , x\in<2,+\infty> \end{cases}$

Rpta. <9,+∞>

14 Dado las funciones f(x) = 2x – 3, -1 < x ≤ 3 ; $g(x) = x - [\| x \|]$, x ∈ R, hallar $(\frac{f}{g})(x)$

15 Dadas las funciones: $f(x) = \begin{cases} [\| \frac{25-x}{7-x} \|] & , \frac{x+2}{x-4} < 0 \wedge x < \frac{5}{2} \\ \sqrt{|x-3|} & , \frac{5}{2} \le x < 4 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} [\| |x-1| - 2 \|] x^2 - 2x , & -1 < x < 2 \\ |x-4| & , 2 \le x < 9 \end{cases}$. Hallar (f + g)(x) y graficar

16 Hallar (f + g)(x) y graficar donde

$f(x) = \begin{cases} [\| x^2 \|] + |x^2 - 1| - 3 & , x \in [-2, 2] \\ \frac{2x-1}{x-1} & , x \in \langle 2, 4 \rangle \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 4 - [\| x^2 \|] & , x < 2 \\ -2 & , x \ge 2 \end{cases}$

17 Dada las funciones $f(x) = 2x - [\| 2x + [\| x \|] \|]$, $\frac{1}{2} \le x < 1$

g(x) = | | x – 2 | - | x | | , | x | < 1 ; Hallar (f + g)(x)

18 Hallar (f + g)(x) , (f-g)(x) , (f.g)(x) donde

$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & , x \in [-1, 1\rangle \\ 5x & , x \in \langle 1, 6] \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1 & , x \in [0, 3\rangle \\ x - 2 & , x \in \langle 3, 5] \cup [6, 8\rangle \end{cases}$

19 Hallar (2f – 4g)(x) , donde

$f(x) = \begin{cases} [\| |x|^3 \|] , & x \in \langle -1, 1\rangle \\ [\| x-3 \|] , & x \in [1, 4\rangle \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 4|}{x+2} & , x \in \langle -2, 1\rangle \\ [\| \, |\frac{1}{x}| \, \|] - [\| \frac{2x-1}{3x+5} \|] & , x \in [1, 10\rangle \end{cases}$

20 Calcular (f + g) (x), (f.g) (x), (f/g) (x) y graficar donde

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 , & x \in [0, 2] \\ 3 & , x \in [3, 5] \end{cases}$; $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [1, 4]$

b) $f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ 3x, & 1<x<3\,; \\ \cos x\,, & x>3 \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} -x & , & x<-2 \\ 11 & , & 2<x<3 \\ 34 & , & x<6 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} [|x|]\;[|x^2-4|] & , & x<3 \\ \sqrt{x^2-16} & , & x\geq 4 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x\,, & x\leq 2 \\ x-1\,, & x>5 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 1-2x & , & -3\leq x<-1 \\ [|-4+\cos x|] & , & x\geq 0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ \text{sen }x\,, & 0\leq x\leq\pi \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} x+3 & si & x\in[-4,0] \\ 3x+2 & si & x\in<0,5> \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2x-4 & , & x\in[-3,2] \\ 2-x & , & x\in<2,8> \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-2} & , & x\in[2,4> \\ x^2-14x+48 & , & x\in[6,10> \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} [|\frac{x}{2}|] & , & x\in[1,8> \\ |2x-10| & , & x\in[8,12> \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} |x^2-4| & , & x\in[-6,0] \\ 2 & , & x\in[1,6> \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x+2 & , & x\geq -2 \\ 1 & , & x<-2 \end{cases}$

h) Si $f(x)=\begin{cases} |x-1|\,[|sig(3-x)|] & , & x\in[0,6] \\ x^2 & , & x\in<6,10> \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} |x-2| & , & x\in<-8,3> \\ x|x-2| & , & x\in<3,8] \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-2x} & si\;\; |x-1|>1 \;\; o \;\; |x-1|<3 \\ x^2-4x-4 & sig\;\;(|x|-3)\,,\;\; x\in\;[0,2] \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} [|\frac{2}{x^2+1}|], & si\;\; x<3 \\ \frac{x^2+x+1}{x-1}, & si\;\; x\in[5,10> \end{cases}$

j) Sí $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+16} & , & x\in<-4,-2> \\ [|x|]-2x & , & x\in[-1,2> \\ |x^2+2| & , & x\in<4,6> \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2x+4 & , & x\in<-3,-1> \\ |x^2-2| & , & x\in[-1,5> \end{cases}$

(21) Determinar fog , cuando f = {(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)} y g = {(4,1),(1,2),(6,3),(0,-2)}

(22) Determinar fog , gof , cuando: f = {(0,1),(1,2),(2,3),(4,3),(5,2)}

g = {(6,7),(5,4),(4,3),(2,4),(1,4),(0,7)}

(23) Hallar gof sí: f = {(2,5),(3,4),(6,2),(5,0),(1,7)} y g = {(4,8),(5,3),(0,9),(2,2),(7,4)}

(24) Hallar gof sí: f = {(2,5),(5,7),(3,3),(8,1)} y g = {(1,2),(2,3),(4,5),(6,7)}

(25) Sí $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & , x\in[-4,4> \\ x & , x\in[4,6] \end{cases}$; $g(x)=x^2+1$. Hallar (fog)(x)

(26) Consideremos las funciones reales de variable real

$g(x)=\begin{cases} x^2 & , x<0 \\ 1-x & , x\geq 0 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} x+2 & , x\leq 1 \\ x-1 & , x>1 \end{cases}$. Hallar fog

(27) Sean las funciones f y g definidas por:

$f(x)=\begin{cases} x^2-5x & , x<-2 \\ |x-2|-2x & , x\geq -2 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2x-4 & , x>-2 \\ x^2+3x & , x\leq -2 \end{cases}$

Hallar: f(0) + g(0) , f(1) f(-3) , (fog)(-2) , $\dfrac{f(-4)}{g(-1)}$, (gof)(3) , (gog)(-3/2)

(28) Hallar fog sí $f(x)=2x^2+1$, x ∈ <-2,20>, $g(x)=\begin{cases} -x+1 & , x\in<-\infty,-2> \\ 2x & , x\in<6,\infty> \end{cases}$

(29) Hallar fog sí f(x) = 3x + 2 , $D_f =<-\infty,3>$, $g(x)=\begin{cases} 2x & , x\leq 0 \\ -3x, & x\geq 1 \end{cases}$

(30) Determinar gof si, $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , x\leq -1 \\ x+2 & , x\geq 2 \end{cases}$, g(x) = $\begin{cases} x & , x\leq 0 \\ 2x & , x>0 \end{cases}$

(31) Hallar fog sí , $f(x)=\begin{cases} x & , x<-1 \\ -1 & , 1\leq x<2 \\ 1 & , x\geq 4 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2 & , x<1 \\ 1 & , x\geq 2 \end{cases}$

(32) Hallar fog y gof , donde, $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , x\in[0,2] \\ x & , x\in<3,5] \end{cases}$, $g(x)=\sqrt{x}$

(33) Sí $H(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ y $(Hof)(x)=\sqrt{[|x|]+3}$. Calcular f(x)

(34) Calcular (f o g)(x) , donde $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & , & x<3 \\ \sqrt{x^2+1} & , & x\geq 3\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x & , & x\geq 4 \\ |x|-x & , & x\leq 0\end{cases}$

(35) Calcular f o g y graficar sí: $g(x)=\begin{cases}[|x|] & , & x<0 \\ x^2-1 & , & x\geq 0\end{cases}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$, $-1\leq x<2$

(36) Calcular f o g , donde, $g(x)=\begin{cases}2x-5 & , x<2 \\ -x-2 & , x\geq 2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2-2x & , x<1 \\ e^x & , x\geq 1\end{cases}$

(37) Sí $f(x)=\sqrt{2x-1}$ y $g(x)=\sqrt{2x^2-7}$. Hallar la función h tal que f o h = g

(38) Dadas las funciones $f(x)=2x-[|2x+[|2x|]|]$, $\frac{1}{2}\leq x<1$

g(x) = | x + 2 | - | x |, | x | < 1. Hallar f o g , g o f

(39) Sean $f(x)=2x^2-1$, $g(x)=4x^3-3x$, $x\in R$, probar que f o g = g o f

(40) Si f(x + 1) = 3x + 1 , g(x) = 2x – 3 , hallar (f o g)(x + 1)

(41) Sean $f(x)=\begin{cases}x^2 & , <1 \\ -x^3 & , x\geq 2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-x & , x<2 \\ 2x & , x\geq 4\end{cases}$, hallar g o f

(42) Hallar fog y gof si existen , donde

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & , & x\in<-1,1> \\ |x^2+1| & , & x\in<1,2>\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}[|x|] & , & x\in[0,1> \\ \sqrt{x^2-1}, & & x\in[1,3>\end{cases}$$

(43) Hallar (f o g o h)(x) si $f(x)=x^2+2x+1$, g(x) = x – 2, h(x) = x – 3

(44) Sean f(x) = ax + 2 , g(x) = x – 6 , a ≠ 0 , b ≠ 0 si fog = gof hallar b(a-1)

(45) Sean $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & , \ -1<x\leq 3\\ x/2 & , \ 4<x\leq 6\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases}x^2[|x^2|]-2|x|, & \text{si} \ \sqrt{2}<x\leq 0\\ x \ [|x-3|]+2 & , \ \text{si} \ 2<x<4\end{cases}$

Hallar fog si existe

(46) Dadas las funciones f y g definidas por: $f(x)=\begin{cases}[|\frac{|x|-2}{3-x}|] & , \ x\in<-1,1>\\ \sqrt{x^2+2x} & , \ x\in[1,2>\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}\frac{2}{x-1} & , \ x\in[-2,-1>\\ 1-x & , \ x\in<0,6>\end{cases}$. Calcular (fog)(x) y (gof)(x)

(47) Determinar gof sí $f(x)=\begin{cases}x & , \ x\in[-3,0]\\ x^2 & , \ x\in<0,5]\end{cases}$, g(x) = x – 15, x ∈ <-10 , 9]

(48) Sean $f(x)=[|x|]$ y $g(x)=\begin{cases}[|x-4|] & , \ x\geq 0\\ x^2 & , \ x<0\end{cases}$. Hallar: $h(x)=\begin{cases}(fog)(x^2) & , \ x\leq 0\\ (gof)(\sqrt{x}) & , \ x>0\end{cases}$

(49) Si F(x) = ctgx y g(x) = cosecx encontrar una función f tal que F(x) = (fog)(x)

(50) Si $(gof)(x+2)=2x^2-x$ y f(x – 1) = x – 2 Calcular g(x).

(51) Si $(fog)(x-1)=x^2-2x$ y g(x) = x + 3 Determinar f(x).

(52) Dadas las funciones f,g: R ⟶ R, definidas por:

f(2x + 3) = 4x + 1 y $g(x)=x^2+3$. Determinar (f o g)(x) y (g o f)(x)

(53) Sí F(x) = (1 – cos2x) secx y f(x) = senx. Hallar una función g tal que F(x) = (gof)(x)

(54) Si $F(x)=\cos^2 x$ y $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, hallar una función g tal que F(x) = (fog)(x)

(55) Si F(x) = sen 2x y g(x) = cos x , encontrar una función f tal que F(x) = (fog)(x)

(56) Determinar gof sí, $f(x)=\begin{cases}0 & , \ x<0\\ x^2 & , \ x\in[0,1]\\ 0 & , \ x>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & , \ x<0\\ 2x & , \ x\in[0,1]\\ 1 & , \ x>1\end{cases}$

57) Si $f(x)=4x-x^2$, $0\le x\le 7$, $g(x)=\begin{cases} x^2-4 & , \quad x\le 0 \\ x+2 & , \quad x>2 \end{cases}$, hallar (gof)(x)

58) Si (g o f)(x) = x + 2 , $f(x)=x^3+6x^2+12x+8$, hallar g(x).

59) Dadas las funciones $f(x)=|x^2-1|$ y $g(x)=\sqrt{9-x^2}$. Determinar (gof)(x)

60) Si $f(x)=\begin{cases} [|x-1|] & , \quad 0<x\le 3 \\ \sqrt{|1-x|-2} & , \quad x>3 \end{cases}$ y $g(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$, determinar gof

61) Hallar fog, siendo $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , \quad -4\le x\le 4 \\ [|x|] & , \quad x>4 \end{cases}$, $g(x)=x^3-2x$

62) Si $g(2-x)=\sqrt{x-1}$ y (gof)(x) = 2x − 1, hallar f(x)

63) Sí $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & , \ si \ x \ es \ par \\ 2x & , \ si \ x \ es \ impar \\ 0 & , \ si \ x \ no \ es \ entero \end{cases}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{[|x|]^2-[|x|]}}{[|x|]-\frac{1}{2}}$. Hallar gof si es que existe.

64) Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} \left|\dfrac{x}{1-x}\right| & , \quad \text{si} \quad x<-2 \\ (x+2)^2 & , \quad \text{si} \quad x\in[-2,-1] \end{cases} , \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+6|}{|x+3|-3} & , \quad \text{si} \quad x\in\langle -4,-1\rangle \\ \sqrt{5-x}-2 & , \quad \text{si} \quad x\in\langle -1,5\rangle \end{cases}$$

Hallar las funciones (fog)(x) y (gof)(x)

65) Sean las funciones f y g definidas en R, tales que:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & , \quad x\le 1 \\ (x-1)^2+3 & , \quad x>1 \end{cases} , \quad g(x)=\begin{cases} x^2-2 & , \quad x>2 \\ x-5 & , \quad x\le 2 \end{cases}$$

Hallar las funciones (fog)(x), (gof)(x)

66) Sean las funciones $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<1 \\ -x & , \quad x\ge 2 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -x & , \quad x<2 \\ 2x & , \quad x\ge 4 \end{cases}$. Hallar gof

(67) Hallar gof, si f y g son funciones reales, tales que:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \;, & x<1 \\ -x^2 \;, & x\geq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x-1 \;, & x<2 \\ 2 \;, & x\geq 4 \end{cases}$$

(68) Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x & si \;\; x\leq 3 \\ -x^2+3 & si \;\; x>3 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x-1 \;, & x<2 \\ 2 \;, & x\geq 4 \end{cases}$$. Hallar fog y su rango

(69) Sean las funciones f y g definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \;, & x<1 \\ -x^2 \;, & x\geq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x^2-4 \;, & x\in[0,4] \\ 0 \;, & x\in<4,7> \end{cases}$$. Hallar fog

(70) Dada las funciones f y g definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \;, & x<1 \\ -x^2 \;, & x\geq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x^2-4 \;, & x\in[0,4] \\ 0 \;, & x\in<4,7> \end{cases}$$

(71) Dadas las funciones f y g definidas en R por:

$$f(x)=\begin{cases} sig(|x^2-4|) & si \;\; |x|\leq 3 \\ \left[\left|\dfrac{x+6}{3}\right|\right] & si \;\; x\in<3,9> \\ x^2+10x+21 & si \;\; |x-3|>6 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=3 \;,\; x\in <-\infty,9>$$

Construir la gráfica de f + g, indicando explícitamente su rango.

(72) Hallar fog, siendo $f(x)=\begin{cases} x^2+1 \;, & x<\sqrt{3} \\ x \;, & x\geq\sqrt{3} \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-2x} & si \;\; x(x-2)\geq 0 \\ [|x|] & si \;\; x(x-2)<0 \end{cases}$

(73) Hallar fog, siendo: $f(x)=\begin{cases} x & si \;\; x\in<-\infty,1] \\ -1 & si \;\; x\in<1,+\infty> \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} x^2-4 \;, & x\in[0,4] \\ 0 \;, & x\in<4,7> \end{cases}$

(74) Hallar fog siendo: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & , -3\le x\le -1 \\ 1 & , -1<x<1 \\ \dfrac{1}{x} & , x\ge 1 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} x^2-4 & , x\in [0,4] \\ 0 & , x\in <4,7> \end{cases}$

(75) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ y g(x) = 1 – x determinar los dominios de las composiciones fog y gof.

(76) Si $g(2-x)=\sqrt{x-1}$ y (g o f)(x) = 2x – 1, Hallar la función f(x)

(77) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ y g(x) = 1 – x, determinar los dominios de las composiciones fog y gof y sus reglas correspondientes.

(78) Hallar (fog)(x) sí: $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3\le x\le -1 \\ 1, & -1<x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -1, & x\le 0 \\ 3x+2, & x>0 \end{cases}$

(79) Si $f(x)=\sqrt{x^2-16}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$, Hallar (fog)(x)

(80) Sean las funciones f y g definidas por: $f(x)=\begin{cases} x^2+3x, & si\ \ x\le 3 \\ -x^2+3, & si\ \ x>3 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 3-x, & si\ \ x\le 1 \\ 5-x, & si\ \ x>1 \end{cases}$

Hallar (fog)(x).

(81) Si $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & x\in <-2,2> \\ |2x^2+3|, & x\in <2,3> \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} [|x-1|], & x\in [0,1> \\ \sqrt{x^2-1}, & x\in [1,3> \end{cases}$ Hallar (fog)(x) si es que existe

(82) Si $f(x)=x^2+2x+2$, hallar la función g(x) tal que $(fog)(x)=x^2-4x+5$

(83) Hallar (fog)(x) sí $f(x)=\begin{cases} x, & x\in <-\infty,1] \\ -1, & x\in <1,+\infty> \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^2-8, & x<0 \\ [|x|], & x\ge 0 \end{cases}$

(84) Si $f(x)=\begin{cases}[|x-1|], & 0<x\leq 3\\ \sqrt{|1-x|-2}, & x>3\end{cases}$ y $g(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$, calcular (gof)(x)

(85) Sean f y g dos funciones, tales que: $f(x)=\begin{cases}[|\dfrac{|x|-2}{3-x}|], & x\in\langle -1,1\rangle\\ \sqrt{x^2+2x}, & x\in[1,2\rangle\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}, & x\in[-2,-1\rangle\\ |x-1|, & x\in\langle 0,3\rangle\end{cases}$. Hallar fog, si es que existe.

(86) Si $H(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ y $(HoF)(x)=\sqrt{[|x|]+3}$ calcular F(x)

(87) Dados $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[0,1]\\ x^2+1, & x\in\langle -\infty,0\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^3, & x\in[-1,1]\\ 2x+[|x|]x^2, & x\in[3,4]\end{cases}$. Hallar (fog)(x) si es que existe.

(88) Halle el complemento del dominio de (f o g)(x), donde $f(x)=x^2-1$, $x\in\langle 6,13\rangle$; $g(x)=x^2-6x+6$, $x\in\langle 4,\dfrac{13}{2}\rangle$ **Rpta.** $\langle -\infty,6]\cup[\dfrac{13}{2},+\infty\rangle$

(89) Si $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[5,9\rangle\\ \sqrt{x}, & x\in[10,16\rangle\end{cases}$, g(x) = x + 5, x ∈ [1,12]. Halle (f o g)(x).

Rpta. $(f\,o\,g)(x)=\begin{cases}(x+5)^2, & x\in[1,4\rangle\\ \sqrt{x+5}, & x\in[5,11\rangle\end{cases}$

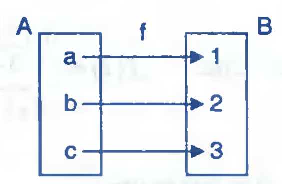
4.21. FUNCIONES: INYECTIVAS, SURYECTIVAS Y BIYECTIVAS.-

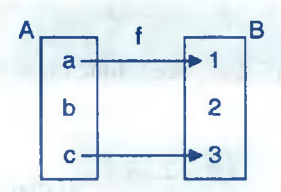
a) FUNCIÓN INYECTIVA.-

La función f: A → B es inyectiva (univalente) si a cada elemento del rango le corresponde un único elemento en el dominio, es decir, si existen dos elementos $x_1, x_2\in D_f$ distintos $x_1\neq x_2$ cuyas imágenes son distintas $f(x_1)\neq f(x_2)$ lo que es equivalente a decir:

Si $x_1, x_2 \in D_f \quad : \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ que es la forma más práctica para determinar si una función es inyectiva.

Ejemplo.-





f función inyectiva f no es inyectiva

OBSERVACIÓN.- Si la función f(x) tiene varias reglas de correspondencia es decir:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \ , & x \in D_{f_1} \\ f_2(x) \ , & x \in D_{f_2} \\ \vdots & \\ f_n(x) \ , & x \in D_{f_n} \end{cases}$$

diremos que es inyectiva si y solo si cada función $f_1, f_2, ..., f_n$ deben ser inyectivas y además $R_{f_i} \cap R_{f_j} = \phi \quad \forall\, i \neq j$

Ejemplo.- Determinar que la función f(x) = 5x + 3 es inyectiva.

Solución

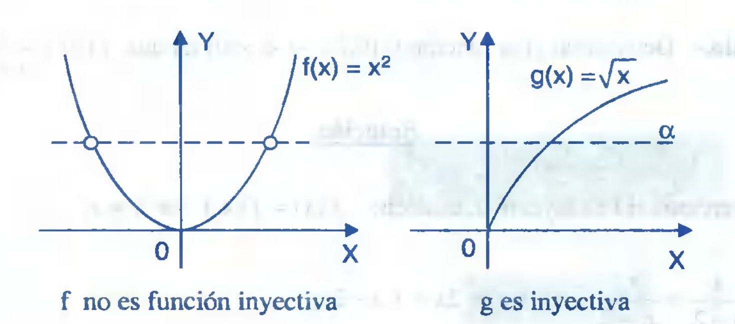
f es inyectiva sí $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

$$\therefore f(x) = 5x + 3 \text{ es inyectiva}$$

OBSERVACIÓN.- En forma gráfica se puede determinar si una función es inyectiva o no, para esto tracemos una recta paralela al eje X, si dicha recta corta a la gráfica en dos partes o más, entonces la función f no es inyectiva y si corta en un sólo punto, entonces la función f es inyectiva.

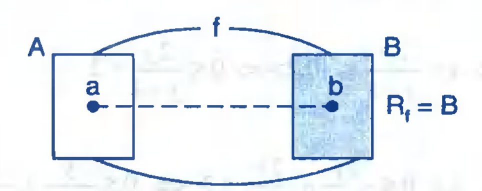
Ejemplo.- Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$



f no es función inyectiva g es inyectiva

b) **FUNCIÓN SURYECTIVA.-**

La función f: A → B, es suryectiva (o sobre) si y sólo si, ∀ y ∈ B, existe x ∈ A tal que y = f(x); esto quiere decir que todo elemento de B es imagen por lo menos de un elemento de A es decir que f: A → B es suryectiva si $R_f = B$



Ejemplo.- La función f: [0,∞> → [0,∞> tal que $f(x)=\sqrt{x}$ es suryectiva puesto que $R_f = [0,\infty>$

Ejemplo.- Determinar si la función f(x) = 3x + 5 es suryectiva.

Solución

Como f: R → R / f(x) = 3x + 5

y = 3x+5 despejamos x es decir $x=\frac{y-5}{3}$ Luego ∀ y ∈ R, ∃ $x=\frac{y-5}{3}$

Tal que $f(x)=f(\frac{y-5}{5})=3(\frac{y-5}{5})+5=y$ entonces f es suryectiva.

c) **FUNCIÓN BIYECTIVA.-**

La función f: A → B se llama función biyectiva, si la función f es inyectiva y suryectiva simultáneamente.

Ejemplo.- Determinar si la función f: [0,2> → <-∞,0] tal que $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ es biyectiva.

Solución

i) Veremos si f es inyectiva, es decir: $f(x)=f(x_1) \Rightarrow x=x_1$

$$\frac{x}{x-2}=\frac{x_1}{x_1-2} \Rightarrow x\,x_1-2x=x_1x-2x_1$$

$-2x_1=-2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ por lo tanto f es inyectiva.

ii) Ahora veremos si f es suryectiva, para esto es suficiente ver si el rango de f coincide con el conjunto de llegada.

$$y=\frac{x}{x-2} \Rightarrow x=\frac{2y}{y-1}\in[0,2> \Rightarrow 0\le\frac{2y}{y-1}<2$$

$$0\le\frac{2y}{y-1}<2 \Leftrightarrow 0\le\frac{2y}{y-1}\wedge\frac{2y}{y-1}<2 \Leftrightarrow 0\le\frac{y}{y-1}\wedge\frac{1}{y-1}<0$$

+ 0 - 1 + ∧ - 1 +

y ∈ <-∞,0], luego $R_f=<-\infty,0]$ entonces f es suryectiva.

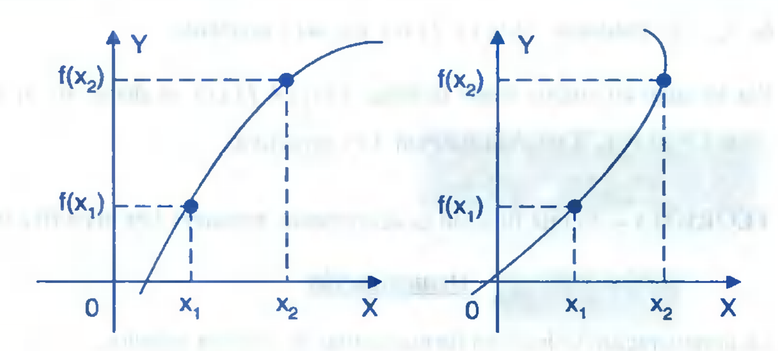
Como f es inyectiva y suryectiva entonces f es biyectiva.

4.22. FUNCIONES CRECIENTES, DECRECIENTES Y MONÓTONAS.-

a) FUNCIÓN CRECIENTE.-

La función f se llama creciente si para todo $x_1,x_2\in D_f$ se tiene:

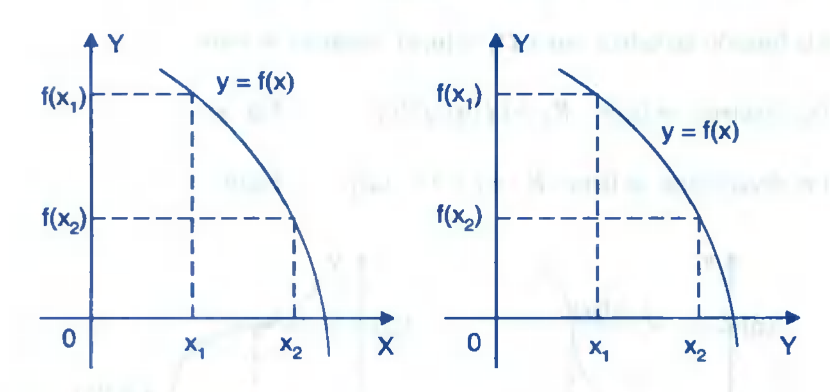
$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$



b) FUNCIÓN DECRECIENTE.-

La función f se llama decreciente si para todo par $x_1, x_2 \in D_f$ se tiene:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



c) FUNCIÓN MONÓTONA.-

La función f se llama monótona si la función f es creciente o decreciente

d) TEOREMA.- Si una función f es creciente, entonces f es inyectiva (univalente).

Demostración

Sean $x_1, x_2 \in D_f$, tales que $x_1 \neq x_2$, de donde se tiene $x_1 < x_2$ ó $x_2 < x_1$

Si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ por ser f creciente

Si $x_2 < x_1$ entonces $f(x_2) < f(x_1)$ por ser f creciente

Por lo tanto en ambos casos se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$ es decir, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Luego la función f es inyectiva.

e) TEOREMA.- Si una función es decreciente, entonces f es inyectiva (univalente).

Demostración

La demostración se hace en forma similar al teorema anterior.

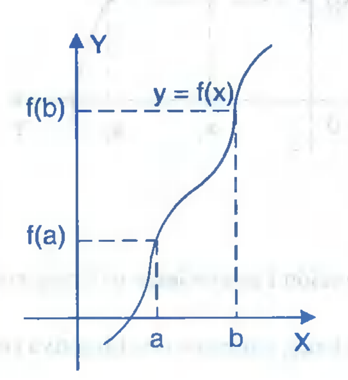
4.23 CÁLCULO DE RANGOS DE FUNCIONES INYECTIVAS MONÓTONAS.-

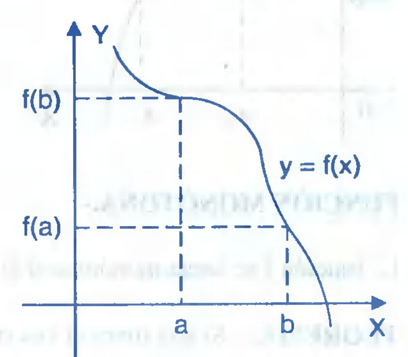
Cuando las funciones dadas son inyectivas su rango se encuentra en forma muy práctica de la siguiente manera:

Sea la función inyectiva cuyo $D_f = [a,b]$ entonces se tiene:

Si f es creciente se tiene: $R_f = [f(a), f(b)]$; Fig (a)

Si f es decreciente se tiene: $R_f = [f(b), f(a)]$; Fig(b)

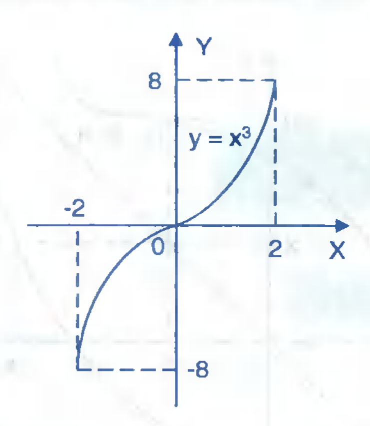




Ejemplo.- Calcular el rango de $f(x) = x^3$ para x $\in$ [-2,2].

Solución

f es inyectiva y creciente entonces $R_f = [f(-2), f(2)] \Rightarrow R_f = [-8,8]$



4.24 FUNCIÓN INVERSA.-

a) **DEFINICIÓN.-** Consideremos la función: $f = \{(x, f(x)) / x \in D_f\}$ con dominio D_f y rango R_f entonces diremos que existe la función inversa de f, si y sólo si, f es inyectiva.

A la función inversa de f denotaremos por f^* ó f^{-1}, la cuál es definida en la forma siguiente:

$$f^* = \{(f(x), x) / x \in D_f\}$$

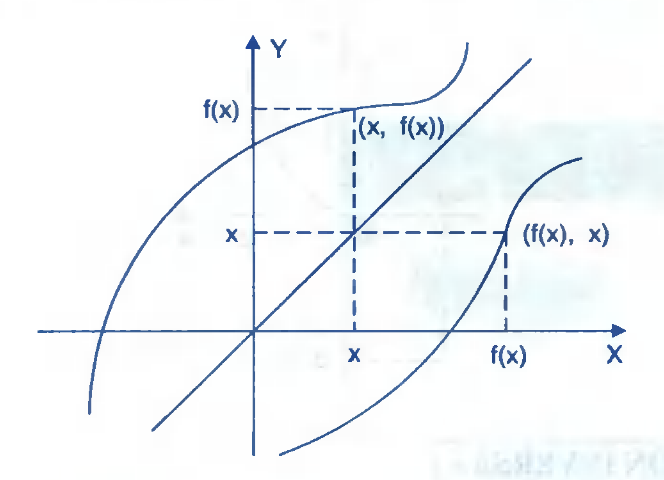
donde: $D_{f^*} = R_f$ y $R_{f^*} = D_f$

Ejemplo.- Consideremos una función inyectiva $f = \{(1,3),(2,5),(4,7),(6,9),(8,11)\}$ entonces la función inversa de f es: $f^* = \{(3,1),(5,2),(7,4),(9,6),(11,8)\}$

donde $D_{f^*} = \{3,5,7,9,11\} = R_f$ y $R_{f^*} = \{1,2,4,6,8\} = D_f$

b) **GRÁFICO DE LA FUNCIÓN INVERSA.-**

Consideremos una función f y su inversa f^*, el gráfico de la función inversa f^* es simétrica a la función f con respecto a la función identidad $I(x) = x$ por tal motivo dicho gráfico se obtiene por reflexión con respecto a la recta $I(x) = x$.



c) PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FUNCIONES INVERSAS.-

Sí f: A→B es una función inyectiva y $f*$: B→A es la función inversa de f entonces:

$$f*(f(x)) = x \quad , \quad \forall x \in D_f$$
$$f(f*(x)) = x \quad , \quad \forall x \in D_{f*}$$

d) CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA.-

Sea f: A→B una función inyectiva, entonces a la función inversa $f*: B \to A$ se puede hallar resolviendo la ecuación $f(f*(x)) = x \vee f*(f(x)) = x$

Ejemplo.- Hallar la inversa de la función f(x) = 7x + 3

Solución

$$f(f*(x)) = x \Rightarrow 7f*(x) + 3 = x \qquad \therefore \quad f*(x) = \frac{x-3}{7}$$

También la inversa de una función inyectiva se puede obtener en la forma siguiente:

Ejemplo.- Hallar la inversa de la función $f(x) = 5x-3$ sí $x \in [0,5]$

Solución

Como $y = f(x) \Rightarrow y = 5x - 3$, $x \in [0,5]$

Primeramente se despeja x: $x = \frac{y+3}{5}$, $x \in [0,5]$

Luego se determina la variación de y

$$x = \frac{y+3}{5} \in [0,5] \Rightarrow 0 \le \frac{y+3}{5} \le 5 \Rightarrow 0 \le y+3 \le 25$$

$$-3 \le y \le 22 \Rightarrow y \in [-3, 22]$$

$x = \frac{y+3}{5}$, $y \in [-3, 22]$. ahora permutaremos x por y es decir:

$y = \frac{x+3}{5}$, $x \in [-3, 22]$. Por lo tanto $f^*(x) = \frac{x+3}{5}$, $x \in [-3, 22]$

4.25. FUNCIÓN INVERSA DE UNA COMPOSICIÓN.-

Si dos funciones f y g son inyectivas y la función composición f o g existen entonces la función f o g es inyectiva por lo tanto tiene inversa (f o g)* en este caso tiene la siguiente propiedad. (f o g)* = g* o f*

4.26. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Determinar si la función es inyectiva $f(x) = \sqrt{\frac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}$

Solución

Simplificado $3x^{3/2}+2x^{1/2} = \sqrt{x}(3x+2)$ de aquí se tiene que x>0 ⇒ | x | = x entonces

$$f(x) = \sqrt{\frac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}} = \sqrt{\frac{3x+2}{\sqrt{x}(3x+2)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

debemos probar que f(a) = f(b) ⇒ a = b con lo cual se determina que es inyectiva.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{a}} = \frac{1}{\sqrt[4]{b}} \Rightarrow a = b.$$ Por lo tanto f es inyectiva.

(2) Demostrar que f es inyectiva donde $f(x)=5^x$, $\forall$ x $\in$ R.

Solución

Debemos probar que: f(a) = f(b) $\Rightarrow$ a = b

$$f(a)=f(b) \Rightarrow 5^a = 5^b \Rightarrow a=b$$

Por lo tanto f es inyectiva.

(3) Dada la función $f(x)=x+\sqrt{x^2+7}$, x $\in$ [-3,3], demostrar que f es inyectiva.

Solución

Probaremos que f(a) = f(b) $\Rightarrow$ a = b

$$f(a)=f(b) \Rightarrow a+\sqrt{a^2+7}=b+\sqrt{b^2+7}$$

$a-b=\sqrt{b^2+7}-\sqrt{a^2+7}$, elevando al cuadrado:

$$(a-b)^2=(\sqrt{b^2+7}-\sqrt{a^2+7})^2$$

$ab+7=\sqrt{a^2+7}\sqrt{b^2+7}$, elevando al cuadrado:

$$a^2b^2+14ab+49=a^2b^2+7a^2+7b^2+49$$

$a^2-2ab+b^2=0 \Rightarrow (a-b)^2=0 \Rightarrow a=b$ $\therefore$ f es inyectiva

(4) La función f: R $\to$[0,+∞> definida por $f(x)=5x^2$. ¿Es f suryectiva?

Solución

Debemos de comprobar que: $\forall$ y $\in$[0,+∞> , $\exists$ x $\in$ R tal que f(x) = y

pero como $y=5x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y/5}$, entonces:

$\exists x=\pm\sqrt{y/5}$, y $\in$[0,∞> tal que $f(x)=f(\pm\sqrt{y/5})=5(\pm\sqrt{y/x})^2=y$

$\therefore$f(x) = y $\Rightarrow$ f es suryectiva.

(5) Determinar si la función $f(x) = x+1-[|x|]$, x ∈ R es inyectiva.

Solución

Definimos el $[|x|]$, ∀ x ∈ R

$[|x|] = k \iff k \le x < k+1$, k ∈ Z. Luego la función f(x) queda definida

$$f(x) = \begin{cases} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x+3 & , x \in [-2,-1> \\ x+2 & , x \in [-1,0> \\ x+1 & , x \in [0,1> \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{cases}$$

Luego la función f(x) es la unión de una familia de funciones lineales donde cada una de las cuales es inyectiva, es decir:

$f(x) = x+1-[|x|] \Rightarrow f(x) = x + 1 - k$

Probaremos que si f(a) = f(b) ⇒ a = b

f(a) = f(b) ⇒ a + 1 − k = b + 1 − k ⇒ a = b

Por lo tanto cada función f(x) sea inyectiva falta ver que la intersección de los rangos de dos en dos es el vacío.

$f_k(x) = x+1-k$

$x \in [k, k+1> \Rightarrow k \le x < k+1 \Rightarrow k+1 \le x+1 < k+2 \Rightarrow 1 \le x+1-k < 2$

$1 \le f_k(x) < 2$ ∴ $y \in [1,2> \Rightarrow R_{f_k} = [1,2>$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} f_k(x) = [1,2> \ne \phi$. por lo tanto f(x) no es inyectiva.

(6) Determinar sí la función f: <-4,3] ⟶ [-9,13> definida por f(x) = -2x + 1 es biyectiva.

Solución

Veremos si f es inyectiva, es decir: $f(x_1)=f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1=x_2$

$$\begin{cases} f(x_1)=-2x_1+1 \\ f(x_2)=-2x_2+1 \end{cases} \Rightarrow\; -2x_1+1=-2x_2+1 \;\Rightarrow\; x_1=x_2.$$ Por lo tanto f es inyectiva.

Ahora veremos si f es suryectiva, es decir: $R_f=[-9,13>$

Como $y=-2x+1 \;\Rightarrow\; x=\frac{1-y}{2}\in\,<-4,3]$

$$-4<\frac{1-y}{2}\le 3 \;\Rightarrow\; -8<1-y\le 6 \;\Rightarrow\; -9\le -y\le 5 \;\Rightarrow\; -5\le y<9$$

$\therefore\; R_f=[-5,9>\,\ne[-9,13>$, por lo tanto f no es suryectiva.

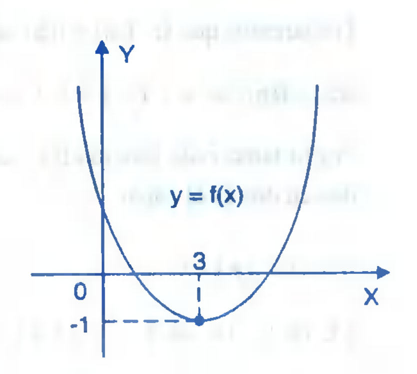
Luego la función f no es biyectiva.

(7) Determinar el dominio de la función $f(x)=x^2-6x+8$ para que la función f sea inyectiva.

Solución

El dominio de una función cuadrática para que sea inyectiva se determina completando cuadrado es decir:

$f(x)=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$ que es una parábola con vértice en el punto (3,-1) por lo tanto f es inyectiva si $D_f=[3,+\infty>$ o para $D_f=\,<-\infty,3]$



(8) Si existe f o g, donde f y g son inyectivas. Demostrar que f o g es inyectiva.

Demostración

Como f y g son inyectivas, entonces: $\begin{cases} f(x_1)=f(x_2) \\ g(x_3)=f(x_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2 & \ldots\ (1) \\ x_3=x_4 & \ldots\ (2) \end{cases}$

Probaremos que f o g es inyectiva, es decir:

$(fog)(x_1)=(fog)(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1=x_2$

$(fog)(x_1)=(fog)(x_2) \quad \Rightarrow \quad f(g(x_1))=f(g(x_2))$

$\Rightarrow \quad g(x_1)=g(x_2)$, por ser f inyectiva.

$\Rightarrow \quad x_1=x_2$, por ser g inyectiva.

Como $(fog)(x_1)=(fog)(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$, entonces f o g es también inyectiva.

9 Si f: R ⟶ B es una función suryectiva. Tal que f(x) = |x – 3| - x, Hallar el conjunto B.

Solución

Se conoce que $|x-3|=\begin{cases} x-3 & , & x\geq 3 \\ 3-x & , & x<3 \end{cases}$

Luego a la función f expresaremos así: $f(x)=\begin{cases} -3 & , & x\geq 3 \\ 3-2x & , & x<3 \end{cases}$

Donde $D_f=\langle -\infty,3\rangle \cup [3,+\infty\rangle$, ahora calculamos el rango

Si $x<3 \Rightarrow y=f(x)=3-2x \Rightarrow x=\dfrac{3-y}{2}<3 \Rightarrow y>-3 \Rightarrow y\in \langle -3,+\infty\rangle$

Si $x\geq 3 \Rightarrow y=f(x)=-3 \Rightarrow y=-3$

$R_f=\langle -3,+\infty\rangle \cup \{-3\}=[-3,+\infty\rangle$

Por lo tanto la función f es suryectiva cuando: B = [-3,+∞>

10 Si la función f es creciente en todo su dominio demostrar que f es inyectiva.

Solución

Aplicaremos la definición siguiente de función inyectiva f es inyectiva, si $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in D_f$

Como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2\ \vee\ x_2 < x_1$ pero f es creciente entonces: $f(x_1) < f(x_2)\ \vee\ f(x_2) < f(x_1)$ de donde $f(x_1) \neq f(x_2)$ por lo tanto f es inyectiva.

(11) Demostrar que la función f es inyectiva, donde: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}} & , \text{ si } x \in <4,+\infty> \\ -x^2 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Solución

Primero veremos si $f_1(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ y $f_2(x) = -x^2$ son inyectivas.

$\forall\ x_1, x_2 \in D_{f_1} \Rightarrow f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x_1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow x_1 = x_2$

Por lo tanto $f_1(x)$ es inyectiva.

$\forall\ x_1, x_2 \in D_{f_2} \Rightarrow f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow -x_1^2 = -x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Por lo tanto $f_2(x)$ es inyectiva.

Ahora veremos que $R_{f_1} \wedge R_{f_2} = \phi$

Para $x \in <4,+\infty> \Rightarrow y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = \dfrac{4}{y^2}$

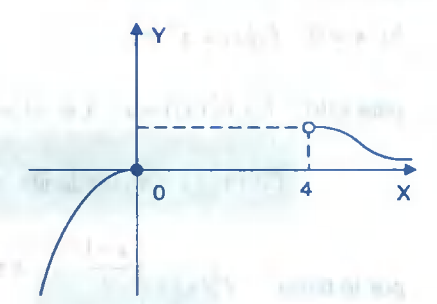
$x = \dfrac{4}{y^2} \in <4,+\infty> \Rightarrow \dfrac{4}{y^2} > 4 \Rightarrow y^2 < 1 \Rightarrow y \in <0,1> \Rightarrow R_{f_1} = <0,1>$

para $x < 0 \Rightarrow y = -x^2 \Rightarrow x = -\sqrt{-y} < 0 \Rightarrow \sqrt{-y} > 0 \Rightarrow -y > 0 \Rightarrow y < 0$

$R_{f_2} = <-\infty, 0>$

$R_{f_1} \wedge R_{f_2} = <0,1> \wedge <-\infty,0> = \phi$

Por lo tanto es inyectiva.



(12) Determinar si es inyectiva la siguiente función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^3} & , \quad x < 0 \\ -5x^2 + 7x - 3 & , \quad x > 0 \end{cases}$

Solución

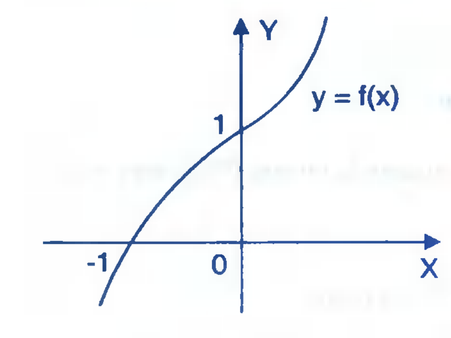
La función $f_1(x) = \sqrt{-x^3}$, $x < 0$, es inyectiva.

La función $f_2(x) = -5x^2 + 7x - 3$, $x > 0$ no es inyectiva. Por lo tanto la función no es inyectiva.

(13) Hallar la inversa $f^{-1}(x)$ si existe, de la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x \le 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$

Solución

Graficando a la función f(x) se tiene: Si $x \le 0 \Rightarrow R_{f_1} = <-\infty,1]$



$x > 0 \Rightarrow R_{f_2} = <1,+\infty>$ además cada función $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son inyectivas, y como $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \phi$ entonces f(x) es inyectiva.

Por lo tanto existe la inversa de f(x). Ahora calculamos la inversa de f(x)

Si $x \le 0$, $f_1(x) = 2x + 1$

Para esto: $f_1(f_1^*(x)) = x$

$x \in <-\infty,1]$, $2f_1^*(x) + 1 = x$, de donde $f_1^*(x) = \dfrac{x-1}{2}$, $x \le 1$

Sí $x > 0$, $f_2(x) = x^2 + 1$

para esto: $f_2(f_2^*(x)) = x$, $x \in \langle 1,+\infty \rangle$

$$f_2^{*2}(x) + 1 = x \text{, de donde } f_2^*(x) = \sqrt{x-1} \text{, } x \in \langle 1,+\infty \rangle$$

por lo tanto: $f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & , \quad x \le 1 \\ \sqrt{x-1} & , \quad x > 1 \end{cases}$

(14) Probar que $f(x) = 4\sqrt{x} - x$ para $0 \le x \le 1$, posee inversa y hallar la función inversa si es que existe.

Solución

Para que f(x) tenga inversa debe de ser inyectiva y para esto debe cumplir que:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$4\sqrt{x_1} - x_1 = 4\sqrt{x_2} - x_2 \Rightarrow 4(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) - (x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow 4(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) - (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(4 - \sqrt{x_1} - x_2) = 0$$

Como $0 \le x_1 \le 1 \Rightarrow 4 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_1} \ne 0$

Luego $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ por lo tanto

f(x) es inyectiva entonces existe f*(x), ahora calculamos la inversa f*(x) para esto:

$f(f^*(x)) = x$, $x \in [0,3]$

despejando f*(x) se tiene: $f^*(x) = (2 + \sqrt{4-x})^2$, $x \in [0,3]$

(15) Hallar f*(x) si existe donde $f(x) = \begin{cases} -x[|1 - \dfrac{x}{2}|] & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ |x^2 - 1| - 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$

Solución

Primeramente definiremos el máximo entero $[|1-\frac{x}{2}|]$ y el valor absoluto $|x^2-1|$ en cada intervalo $[|1-\frac{x}{2}|]=1+[|-\frac{x}{2}|]=1+0=1$

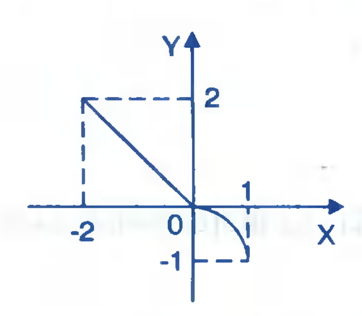
Como $-2 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < 2$

$$\Rightarrow 0<-\frac{x}{2}<1 \Rightarrow [|-\frac{x}{2}|]=0$$

$$\Rightarrow x^2-1=(x+1)(x-1)$$

+ -1 - 1 +

Para $0 \le x < 1 \Rightarrow |x^2-1|=1-x^2$ por definición



Por lo tanto la función f(x) queda en la forma:

$$f(x)=\begin{cases} -x & si \quad -2<x<0 \\ -x^2 & si \quad 0\le x<1 \end{cases}$$

Como f(x) es inyectiva, entonces f*(x) existe:

Si $-2 < x < 0$, $f_1(x)=-x$, calculando su inversa $f_1(f_1^*(x))=x$

$x \in <0, 2>$, $-f_1^*(x)=x$, de donde $\therefore f_1^*(x)=-x$, $0<x<2$

Si $0 \le x < 1$, $f_2(x)=-x^2$, calculando su inversa $f_2^*(x)$

Se tiene: $f_2(f_2^*(x))=x$, $-1 \le x < 0$, de donde $-f_2^{*2}(x)=x$, $-1 < x \le 0$

$$\therefore f_2^*(x)=\sqrt{-x},\ -1<x\le 0$$

Por lo tanto la inversa de f(x) es: $f^*(x)\begin{cases} -x & si \quad 0<x<2 \\ \sqrt{-x} & si \quad -1<x\le 0 \end{cases}$

(16) Hallar f*(x) si existe donde $f(x)=\sqrt{\dfrac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}$

Solución

Calculando el dominio para definir $|x|$

$3x^{3/2}+2x^{1/2}=\sqrt{x}(3x+2)$ de aquí $x>0 \Rightarrow |x|=x$

Ahora simplificado se tiene: $f(x)=\sqrt{\dfrac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}=\sqrt{\dfrac{3x+2}{\sqrt{x}(3x+2)}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Determinaremos si f(x) es inyectiva: $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$ (f es inyectiva)

$f(a)=f(b) \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}} \Rightarrow a=b$

Por lo tanto f(x) es inyectiva entonces f(x) tiene inversa. Ahora calculamos la inversa.

$$f(f^*(x))=x$$

$\dfrac{1}{\sqrt[4]{f^*(x)}}=x$, de donde $f^*(x)=\dfrac{1}{x^4}$

17 Si f es la función definida por $f(x)=\sqrt{x^2+16}+2x$, $x\in[0,3]$ determinar si existe $f^*(x)$.

Solución

Para que exista $f^*(x)$ la función f(x) debe de ser inyectiva, es decir:

Sí $f(a)=f(b)$ entonces $a=b$

$\sqrt{a^2+16}+2a=\sqrt{b^2+16}+2b$ entonces $2(a-b)=\sqrt{b^2+16}-\sqrt{a^2+16}$

para que sea f inyectiva debe cumplir a = b de donde

$a-b=0 \Rightarrow \sqrt{b^2+16}-\sqrt{a^2+16}=0$

$\sqrt{a^2+16}=\sqrt{b^2+16} \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow |a|^2=|b|^2$

$\Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=b$ puesto que $a, b\in[0,3]$

por lo tanto f(x) es inyectiva $\Rightarrow \exists f^*(x)$

Ahora calculamos f*(x) mediante la ecuación: f(f*(x)) = x , x ∈ [4,11]

$$\sqrt{f^*(x))^2+16}+2f^*(x)=x \Rightarrow \sqrt{(f^*(x))^2+16}=x-2f^*(x) \text{ elevado al cuadrado}$$

$$(f^*(x))^2+16=x^2-4xf^*(x)+4(f^*(x))^2 \Rightarrow 3(f^*(x))^2-4xf^*(x)+x^2-16=0$$

$$f^*(x)=\frac{4x\pm\sqrt{16x^2-12(x^2-16)}}{6} \Rightarrow f^*(x)=\frac{4x\pm2\sqrt{x^2+48}}{6}$$

$$f^*(x)=\frac{2x\pm\sqrt{x^2+48}}{3} \qquad \therefore f^*(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2+48}}{3}, \ x\in[4,11]$$

18 Si $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3} & , \ x\geq 3 \\ x^2+2x-3 & , \ x\in[-1,1> \end{cases}$ Determinar si f*(x) si existe.

Solución

Determinaremos si f(x) es inyectiva

Sí $x\geq 3 \Rightarrow f_1(x)=\sqrt{x-3}$ donde $R_{f_1}=[0,\infty>$

Si $f_1(x_1)=f_1(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1-3}=\sqrt{x_2-3}$ elevando al cuadrado $\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ f_1 es inyectiva

Si $-1\leq x<1 \Rightarrow f_2(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

Como $-1\leq x<1 \Rightarrow 0\leq x+1<2 \Rightarrow 0\leq(x+1)^2<4$

$$\Rightarrow -4\leq(x+1)^2-4<0 \Rightarrow R_{f_2}=[-4,0>$$

Si $f_2(x_1)=f_2(x_2)\Rightarrow (x_1+1)^2-4=(x_2+1)^2-4$

$$\Rightarrow (x_1+1)^2=(x_2+1)^2 \Rightarrow x_1+1=x_2+1$$

$\Rightarrow x_1=x_2$ puesto que $x_1,x_2\in[-1,1>$. Por lo tanto f_2 es inyectiva.

Como $R_{f_1}\wedge R_{f_2}=[0,\infty>\wedge[-4,0>=\phi$.

Entonces f(x) es inyectiva y por lo tanto ∃ f*(x)

Ahora calculando la inversa de cada función: $f_1(f_1^*(x)) = x$, x ∈ [0,+∞>

$\sqrt{(f_1^*(x))-3} = x \Rightarrow f_1^*(x) = x^2+3$, x ∈[0,+∞>

$f_2(f^*(x)) = x$, x ∈ [-4,0>

$(f_2^*(x))^2 + 2f^*(x) - 3 = x \Rightarrow f_2^*(x) = \sqrt{x+4}-1$, x ∈ [-4,0>

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} x^2+3 & , \quad x \geq 0 \\ \sqrt{x+4}-1 & , \quad -4 \leq x < 0 \end{cases}$$

(19) Si f(x) = 2x – 3b , determinar el valor de b de manera que $f(b+1) = 3f^*(b^2)$

Solución

Calculando la inversa de f(x): f(f*(x)) = x, $x \in D_{f^*}$

2f*(x) – 3b = x, $x \in D_{f^*}$, de donde $f^*(x) = \dfrac{x+3b}{2}$, $x \in D_{f^*}$

como $f(b+1) = 3f^*(b^2)$, entonces $2(b+1)-3b = 3(\dfrac{b^2+3b}{2})$

$3b^2+11b-4=0 \Rightarrow$ (3b – 1)(b + 4) = 0, de donde $b = \dfrac{1}{3}$, b = -4

(20) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2-8x+7 & si \quad 4 < x \leq 7 \quad V \quad -3 \leq x < -1 \\ \sqrt{7-2x} & si \quad -1 \leq x < 3 \end{cases}$. Hallar f*(x) si existe.

Solución

Analizaremos sí $f_1(x) = x^2-8x+7$, $f_2(x) = \sqrt{7-2x}$ es inyectiva

Sí 4 < x ≤ 7 V – 3 ≤ x <-1 ⇒ $f_1(x) = x^2-8x+7$

$f_1(x) = x^2-8x+7 = (x-4)^2-9$

Sí $x_1, x_2 \in D_{f_1}$; $f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$(x_1 - 4)^2 - 9 = (x_2 - 4)^2 - 9 \Rightarrow |x_1 - 4|^2 = |x_2 - 4|^2$

$\Rightarrow |x_1 - 4| = |x_2 - 4| \Rightarrow x_1 = x_2$, puesto que $|x - 4| = x - 4$

Sí $4 < x \leq 7$, $|x - 4| = 4 - x$ si $-3 \leq x < -1$. Luego $f_1(x)$ es inyectiva

Sí $-1 \leq x < 3 \Rightarrow f_2(x) = \sqrt{7 - 2x}$

Sí $x_1, x_2 \in D_{f_2}$; $f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\sqrt{7 - 2x_1} = \sqrt{7 - 2x_2} \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Luego $f_2(x)$ es inyectiva.

Ahora calcularemos el rango de cada función.

Sí $4 < x \leq 7$ V $-3 \leq x < -1 \Rightarrow 0 \leq (x-4)^2 \leq 9$ V $-7 \leq x - 4 < -5$

$-9 \leq (x-4)^2 - 9 \leq 0$ V $16 < (x-4)^2 - 9 \leq 40$, pro lo tanto $R_{f_1} = <-9,0] \cup <16,40]$

Sí $-1 \leq x < 3 \Rightarrow -6 < -2x \leq 2 \Rightarrow 1 < 7 - 2x \leq 9 \Rightarrow 1 < \sqrt{7 - 2x} \leq 3$

Entonces $R_{f_2} = <1,3]$

Como $R_{f_1} \wedge R_{f_2} = \phi$ entonces f es inyectiva en todo su dominio.

Ahora calculamos f*(x)

$f_1(f_1^*(x)) = x$, $x \in <-9,0] \cup <16,40]$

$(f_1^*(x))^2 - 8f_1^*(x) + 7 - x = 0$, $x \in <-9,0] \cup <16,40]$

$f_1^*(x) = 4 \pm \sqrt{x+9}$

$$f_1(x) = \begin{cases} 4 + \sqrt{x+9} & , \ x \in <-9,0] \\ 4 - \sqrt{x+9} & , \ x \in <16,40] \end{cases}$$

$f_2(f_2^*(x)) = x$, x ∈ <1,3] $\Rightarrow$ $\sqrt{7-2f_2^*(x)} = x$, x ∈ <1,3]

$f_2^*(x) = \frac{1}{2}(7-x^2)$, x ∈ <1,3]

Luego la función f*(x) queda en la forma: $f^*(x) = \begin{cases} 4+\sqrt{x+9} \ , & x \in <-9,0] \\ 4-\sqrt{x+9} \ , & x \in <16,40] \\ 1/2(7-x^2) \ , & x \in <1,3] \end{cases}$

4.27. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Sea la función f: [1,4] → [a,b], tal que $f(x) = x^2 - 2x + 3$, Demostrar que f es inyectiva y hallar los valores de a y b para que f sea biyectiva. **Rpta.** a = 2 , b = 11

(2) ¿Es inyectiva la función real $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$? **Rpta.** No es inyectiva

(3) Sea f: A → <1,10] dada por $f(x) = \frac{4-11x}{4-2x}$

a) Determinar A **Rpta.** <-∞,0]∪[4,∞>

b) Mostrar que f es inyectiva

(4) Sea f: A → <-4,1] definida por $f(x) = \frac{10+3x}{10-2x}$

a) Determinar A **Rpta.** <-∞,0] ∪ <10,∞>

b) Mostrar que f es inyectiva

(5) Sea f: A →[-9,-1> dada por $f(x) = \frac{3+4x}{3-x}$

a) Determinar A **Rpta.** <0,∞>

b) Probar que f es inyectiva

c) ¿f es suryectiva? **Rpta.** no

(6) Dadas las funciones reales siguientes:

$f(x) = 3x + 2|x|$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$ y $h(x) = 3x + 7$, $p(x) = x + 2|x|$

¿Cuál de estas funciones es inyectiva?

(7) Demostrar que las siguientes funciones son inyectivas

a) $f(x) = 3x - 2,\ x \geq 0$ **b)** $f(x) = \text{sen } x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

c) $f(x) = (x-h)^2 + k$, $x \geq h$ **d)** $f(x) = 2 - x^3$, $x \in R$

e) $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$, $x \geq 1$. En forma analítica y gráfica

(8) Demostrar que la función f definida por: $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 4x - 5}$, $x \leq -1$ es inyectiva

(9) Demostrar que $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$ es inyectiva

(10) Sean f: A →B, g: B → c, demostrar que:

a) Si g o f es suryectiva entonces g es suryectiva

b) Si g o f es inyectiva entonces f es inyectiva.

(11) La función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.¿Es suryectiva?

(12) Sea f una función definida por: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, $x \in \langle 0,2 \rangle \cup \langle 2,\infty \rangle$

Determinar si f es una función biyectiva **Rpta.** si es biyectiva

(13) Determinar si la función $f(x) = 6x - x^2 - 5$ es f inyectiva, si no lo es, restringir su dominio para que sea inyectiva. **Rpta.** No es inyectiva

(14) Sea f una función definida por $f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$, $D_f=R$. Es f una función inyectiva?

Rpta. f es inyectiva

(15) Dada la función $f(x)=\dfrac{(x+2)(x^2+6x-16)(x-6)}{(x-2)(x^2-4x-12)}$ Mostrar que f es inyectiva y graficar

(16) Sea $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-1$, x ∈ <1,2>. Demostrar que f es inyectiva (ó univalente)

(17) Si se sabe que f(-1) = 4 y f(3) = -2 , donde f es una función lineal, hallar la ecuación que define f*(x) **Rpta.** $f^*(x)=-\dfrac{2x}{3}+\dfrac{5}{3}$

(18) Sí $f(x)=2x+c$ y $f(c)=2f^*(c^2)$. Encontrar el valor de :

a) f(0). f*(0) **Rpta.** –8

b) $\dfrac{f(1)}{f^*(1)}$ **Rpta.** – 4

(19) Si f(x) = 3x + 2a, Determinar los valores de a de modo que $f(a^2)=f^*(a+2)$

Rpta. $a=-1$ V $a=\dfrac{2}{9}$

(20) Hallar la inversa f*(x) si existe para la función. $f(x)=x^2+4x-1$, x ∈ <-4,-3>

Rpta: $f^*(x)=-2-\sqrt{x+5}$, x ∈ [-4,-1>

(21) Hallar la inversa f*(x) si existe de la función, $f(x)=x^2-2x-1$, x ≥ 2

Rpta. $f^*(x)=1+\sqrt{x+2}$, x ≥ -1

(22) Hallar la función f*(x) si existe, para la función, $f(x)=(|x-5|+1+x)\sqrt{5-x}$

Rpta. $f^*(x)=\dfrac{1}{36}(180-x^2)$, x ∈ [0,∞>

(23) Sí $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2, & x\geq 1 \\ x^3+4, & x<1 \end{cases}$. Hallar la función inversa de f(x) si existe

Rpta. $f^*(x)=\begin{cases} -1+\sqrt{x-1}, & x\geq 5 \\ \sqrt[3]{x-4}, & x<5 \end{cases}$

(24) Sí la función f: <-1,1>→ R, definida por: $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ Hallar la inversa de f(x) si existe

Rpta. $f^*(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

(25) Hallar f*(x) si existe de:

a) $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x\leq 0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ -x^2, & x\geq 0 \end{cases}$

c) $f(x)=(|x-3|+x)\sqrt{3-x}$ **d)** $f(x)=\dfrac{|x-6|+x+\sqrt{x-6}-[|x-4|]x+6}{\sqrt{7-x}}$

(26) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$, $x\in<\dfrac{7}{2},\dfrac{9}{2}>$. Hallar f*(x) si existe.

(27) Sí f: R → R tal que $f(x)=\begin{cases} |2-x|, & x\geq 2 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$. Determinar la función inversa f*(x) si existe.

(28) Consideremos la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{7}, & x<-3 \\ x^2+4x-2, & 0<x<3 \\ \dfrac{7}{4-x}, & x<11 \end{cases}$

Determinar si f es inyectiva, si lo es hallar f*(x).

(29) Sea f : R → R tal que $f(x)=\dfrac{3}{x-[|x|]}$, si f es inyectiva hallar f*(x).

(30) Hallar la inversa f*(x) si existe de:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, x\le -1 \\ 4x^2, -1<x\le 0 \\ x+4, x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x+1} \quad , \quad x<1 \\ x-[x] \quad , \quad 1\le x<2 \\ 3x-5 \quad , \quad x\in <2,4> \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} -4x^2 \quad , \quad x<0 \\ \sqrt{4-x^2} \ , \quad 0\le x\le 2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{9-x^2} \quad , \quad -3\le x<0 \\ 3x \quad , \quad 0\le x\le 4 \end{cases}$

(31) Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x^2-4| \quad , \quad 0\le x<2 \\ -\dfrac{x^2}{4}+x-1 \quad , \quad x\ge 2 \end{cases}$ Hallar f*(x) si existe.

Rpta: $f^*(x)=\begin{cases} 2\sqrt{-x}+2, \quad x\le 0 \\ \sqrt{4-x}, \quad 0<x\le 4 \end{cases}$

(32) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 \ , \ x<-1 \\ 4x^2, \ -1\le x\le 0 \\ x+4, \ x>0 \end{cases}$, Hallar f*(x) si existe.

Rpta: $f^*(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} \quad , \quad x<-3 \\ -\sqrt{\dfrac{x}{2}} \quad , \quad 0\le x\le 4 \\ x-4 \quad , \quad x>4 \end{cases}$

(33) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 \quad , \quad x<-1 \\ -\sqrt{x+1} \quad , \quad x\ge -1 \end{cases}$, Hallar f*(x) si existe.

Rpta. $f^*(x)=\begin{cases} -1-\sqrt{x-1} \ , \quad x>1 \\ x^2-1 \ , \quad x\le 0 \end{cases}$

(34) Dada la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x^2+x+2}+1 \quad , \quad -1\le x\le 1/2 \\ 2-\dfrac{7}{x+1} \quad , \quad 2<x<4 \end{cases}$

Hallar f*(x) si existe. **Rpta.** $f^*(x)=\begin{cases}\dfrac{x+5}{2-x} & , -\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{9-4(x-1)} & , 1\le x\le\dfrac{5}{2}\end{cases}$

(35) Hallar la inversa si existe para la función. $f(x)=\dfrac{|x+4|}{|x-1|-1}$, x ∈ <-2,0> ∪ <0,1>

Rpta. $f^*(x)=-\dfrac{4}{x+1}$,x ∈ <-∞,-5> ∪ <1,∞>

(36) La función f definida por la regla de correspondencia

$f(x)=\begin{cases}4-\sqrt{x^2+12x+27} & , \quad si \quad x\le -11\\ x^2+6x+6 & , \quad si \quad x>0\end{cases}$. Demostrar que f es inyectiva y hallar f*(x)

Rpta. $f^*(x)=\begin{cases}6-\sqrt{x^2+8x+25} & , \quad x\le 0\\ \sqrt{x+3}-3 & , \quad x>6\end{cases}$

(37) Sea la función f: R →R, definida por: $f(x)=[|x|]+\sqrt{x-[|x|]}$, hallar f*(x) si existe

Rpta. $f^*(x)=k+(x-k)^2$, x ∈[k,k+1>

(38) Sea las funciones f y g definida por:

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4x-5} & , \quad 6\le x<7\\ [|x|] & , \quad 9\le x<10\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}|x-2|-|3-x| & , \quad 3.5<x\le 7.5\\ (x-8)^2-9 & , \quad 7.5<x<9.5\\ x & , \quad 9.5\le x\le 13.5\end{cases}$

Hallar (f + g)* si existe

(39) Dadas las funciones f y g definidas por: $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 2\\ \pi, & x>2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ 4x, & 0\le x\le 1\\ -1, & x>1\end{cases}$.

Hallar (f o g)(x), determinar si es inyectiva en caso afirmativo, calcular (f + g)* (x)

(40) Dadas las funciones $f(x)=\frac{x}{x+2}$, x < -2 y $g(x)=\begin{cases} 2x^2-12x+2 & , -2<x\leq 3 \\ \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} & , x>3 \end{cases}$

Hallar f* o g **Rpta.** $(f*og)(x)=\begin{cases} \frac{4(x^2-6x+1)}{-(2x^2-12x+1)} & , -2<x<3-\sqrt{17} \\ \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}} & , x>3 \end{cases}$

(41) Sean las funciones $f(x)=\frac{x}{x+1}$ y g(x) = 3x – 1. Hallar la intersección del dominio f* o g con el dominio de (f o g)(x). **Rpta.** R – {0,2}

(42) Sí $f(x)=3x^2-2x+5$, $D_f=<1,4>$ y g(x) = | x | + 3. Determinar el dominio de f*o g.

(43) Si $f(x-2)=\frac{2}{x+3}$. Hallar el valor de x que satisfaga $(f*o\,f)(\frac{4}{x})=2$.

(44) Dada la función f definida por: $f(x)=\frac{|x-5|+4x+\sqrt{x-5}-[|x|]x+5}{\sqrt{6-x}}$

Hallar f*(x) si existe. **Rpta.** $f*(x)=\frac{6x^2+5}{x^2+1}$

(45) Si f* es una función biyectiva tal que $f*(\frac{x+4}{3x})=D$. Hallar el conjunto solución de la inecuación: $f(c)>\frac{3x}{x+4}$ **Rpta.** x ∈ <-4,-1> ∪ <0,2>

(46) Sean $f(x)=x^3+2$, $g(x)=\frac{x-2}{x+3}$ si $g*(f*(a))=-\frac{4}{3}$. Hallar g*(a + 5)

Rpta. $-\frac{1}{2}$

(47) Dada las funciones reales $f(x)=\frac{1+|x|}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$, x ≠ 0. Hallar el dominio de f*og*

Rpta. <-1 , 1> - {0} = <-1, 0> U <0, 1>

(48) Si f y g son dos funciones donde f(x-1) = 3x+2, g(2x+3) = 4x+4 . Hallar (g* o g)(x)

Rpta. $\frac{(3x+7)}{2}$

(49) Analice la unívalencia de la función $f(x)=\sqrt{[|x|]-x}+4x+4\sqrt{x^2-2x}$ y halle la función inversa.

Rpta. $f^*(x)=\frac{x^2}{8(x-4)}$

(50) Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+8x+12 \ , & x\in <-6,-4> \\ \sqrt{x+2} \ , & x\in [-2,1> \\ \frac{x+5}{3} \ , & x\in [1,4] \end{cases}$ determine f*(x) si existe.

Rpta. $f^*(x)=\begin{cases} -4-\sqrt{x+4} \ , & x\in <-4,-1> \\ x^2+2 \ , & x\in [0,\sqrt{3}> \\ 3x-5 \ , & x\in [2,3] \end{cases}$

(51) Sea f: <-1,1> →R , tal que $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$, analizar si f es inyectiva.

(52) Hallar f*(x) si existe, donde, $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{x^2+x}} \ , & x>5 \\ 7x \ , & x<-1 \end{cases}$

(53) Analizar la inyectibilidad de la función, $f(x)=\begin{cases} x+(x^2+1)^{1/2} \ , & x>1 \\ -\sqrt{-x^3+1} \ , & x<-1 \end{cases}$, en caso afirmativo hallar f*(x)

(54) Sea f y g dos funciones, tales que:

$f(x)=\begin{cases} [|\frac{|x|-2}{3-x}|] \ , & x\in <-1,1> \\ \sqrt{x^2+2x} \ , & x\in [1,2> \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} \frac{2}{x-1} \ , & x\in [1,2> \\ |x-1| \ , & x\in <0,1> \end{cases}$. Hallar f o g si es que existe.

(55) Hallar f*(x) si es que existe de la función, $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-2, & -3\le x<-2 \\ \dfrac{|x+3|}{|x-2|-1}, & -1<x<1 \end{cases}$

(56) Analizar la inyectibilidad de tal función, $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1, & x\le 2 \\ -x^3, & x>2 \end{cases}$, en caso afirmativo hallar f*(x)

(57) Hallar f*(x) si existe donde

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-5, & x\in[-2,1> \\ x-5, & x\in[5,+\infty> \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2, & x\ge 1 \\ x^2+4, & x<1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\in<-\infty,-1> \\ 4x^2, & x\in[-1,0] \\ x+4, & x\in<0,+\infty> \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+1, & x\in[-4,-2> \\ \sqrt{x+2}, & x\in[-2,2] \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+7, & x\in<-3,-1>\cup<4,7] \\ \sqrt{7-2x}, & x\in[-1,3> \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x^2+10x+21, & x\in[-7,-5>\cup[-2,-1> \\ \sqrt{x+1}+1, & x\in<-1,3] \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2, & x\in<-\infty,-1> \\ -\sqrt{x+1}, & x\in[-1,+\infty> \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} -(x^2+6x+8), & x\in<-\infty,-4] \\ x+3, & x\in<0,3> \\ \sqrt{x-1}, & x\in[10,+\infty> \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x-3, & x\in<-\infty,-2] \\ 3+\sqrt{x}, & x\in[1,+\infty> \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & , \quad x\in[-3,-1> \\ 2+\sqrt{3+2x-x^2} & , \quad x\in[-1,1] \end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases} 4-\sqrt{x^2+12x+27} & , \quad x\leq -1 \\ x^2+6x+6 & , \quad x>0 \end{cases}$

l) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\in[1,2> \\ [|x|]+\sqrt{x-[|x|]} & , \quad x\in[-1,1> \\ -\sqrt{-x} & , \quad x\in[-9,-1> \end{cases}$

ll) $f(x)=\begin{cases} -4-(x+2)^2 & , \quad x\in[-5,-2] \\ 2x[|x+3|] & , \quad x\in<-2,-1> \\ 2+\sqrt{x+1} & , \quad x\in<-1,3> \\ 4 & , \quad x=1 \end{cases}$

(58) Dadas las funciones $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad x<-1 \\ x+1 & , \quad x\geq -1 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} 2x-1 & , \quad x<0 \\ \sqrt{x} & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

Hallar si existe fog*

(59) Analizar si las funciones reales f y g son inyectivas

$f(x)=\begin{cases} -2x+10 & , \quad x<0 \\ \sqrt{x^2+16} & , \quad 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{3}{x^2-4} & , \quad x>3 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -x^2-10x-21 & , \quad x\in[-5,-1] \\ \dfrac{|x-2|-1}{|x+3|} & , \quad x\in<1,2] \end{cases}$

(60) Sí g: A → B y f: B → C, son funciones inyectivas, demostrar que fog: A → C es inyectiva.

(61) Analizar la inyectividad de la función $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x^3} & , \quad x<0 \\ -5x^2+7x-3 & , \quad x>0 \end{cases}$ en caso afirmativo, hallar su inversa.

(62) Si $f(x)=\begin{cases}-x^2 & , \quad x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & , \quad x>0\end{cases}$ probar si es inyectiva, si lo es, hallar su inversa.

(63) Dadas las funciones $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & , \quad \sqrt{3}\le x\le 2\\ 1-\sqrt{x^2-4} & , \quad x\le -4\end{cases}$, $g(x)=\sqrt{|x^2-4|-3}$, x∈ <-∞,-4] U<0,2] tal que f = h*og

i) Demostrar que f y g son funciones inyectivas.

ii) Hallar la función h.

(64) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{8}{x-2}$, $x\in[0,4]-\{2\}$ y $g(x)=\begin{cases}(x-3)^2 & , \quad 1\le x<5\\ x+3 & . \quad -6\le x<1\end{cases}$

Hallar f*og si es que existe.

(65) Determinar la inversa f*(x) si existe donde $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & , \quad x<-2\\ -\sqrt{x-2} & , \quad 2\le x<6\\ -2x+10 & , \quad x\ge 6\end{cases}$

(66) Sí $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3} & , \quad x\ge 3\\ x^2+2x-3 & , \quad x\in[-1,1>\end{cases}$. Determinar f*(x) si existe

(67) Si $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & , \quad si \quad x<-2\\ -\sqrt{x-2} & , \quad si \quad x\ge 2\end{cases}$. Determinar f*(x) si existe.

(68) Hallar la inversa de f si existe donde $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3 & , \quad x\le 2\\ -x^3 & , \quad x>2\end{cases}$

(69) Decir si f(x) es inyectiva, si es así hallar f*(x) donde $f(x)=\begin{cases}|x|, & x<-1\\ 2-x^2, & x>11\end{cases}$

(70) Dado $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<5\end{cases}$, probar que f(x) es inyectiva y hallar f*(x).

(71) Analizar si es inyectiva la función $f(x)=x^2-3x+2$, x ∈ [0,+∞>, en caso que no sea, determinar el dominio para que sea inyectiva y hallar su inversa.

(72) Analizar si la función $f(x)=x^4-2x^2-3$, $x \geq 2$ es inyectiva, en caso afirmativo, hallar su inversa.

(73) Sea $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-3}, & x \geq 4 \\ -\sqrt{3-x}, & x \leq 2 \end{cases}$, mostrar que f es inyectiva y hallar f*(x).

(74) Si $f(x)=\frac{x-3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-1$, x ∈ <1,2>, analizar rigurosamente si f es inyectiva, en caso afirmativo, hallar f*(x) y sus dominios.

(75) Encontrar f(x) y f*(x), si se sabe que:

i) $g(x)=\frac{1}{4x+1}$, (fog)(x) = 2x + 3 ii) g(x) = 3x − 2, (gof)(x) = 2x + 4

(76) Sean $f(x)=2x^2-4x-1$, x ∈ [1,+∞>, $g(x)=\frac{x-2}{x^2+4}$, x∈R. Calcular (gof*)(x) si existe.

(77) Si f(x − 1) = 3x + 2, g(2x + 3) = 4x + 4, encontrar (g*of)(x)

(78) Calcular f*(x) si existe, donde: $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-1, & x \in <-4,-3] \\ \frac{|x+4|}{|x-1|-1}, & x \in <-2,0> \cup <0,1> \end{cases}$

(79) Sean $f(x)=\frac{x}{2+x}$, x<-2 y $g(x)=\begin{cases} 2x^2-12x+3, & x \in <-2,3] \\ \frac{x+2}{x-3}, & x>3 \end{cases}$. Calcular (f*og)(x), si existe

(80) Hallar f*(x) si existe donde $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \leq 2 \\ \sqrt{9x-2}, & x \in <2,3> \\ (x-3)^2+5, & x>3 \end{cases}$

4.28. APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EN LA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA.-

Se ha estudiado las funciones en forma general, ahora estudiaremos las aplicaciones de estas funciones en administración y economía y para esto recordemos el concepto de función en términos económicos.

a) MODELOS MATEMÁTICOS.- Al proceso de formular los problemas en el lenguaje de las matemáticas se denomina modelación matemática, por lo tanto un modelo matemático puede describir con precisión el problema en cuestión.

Ejemplo.- El tamaño de un tumor canceroso se puede aproximar mediante el volumen de una esfera $V = \frac{4\pi r^2}{3}$, donde r es el radio del tumor en centímetros, ahora observemos las siguientes expresiones:

- Un fabricante desea conocer la relación entre la ganancia de su compañía y su nivel de producción.

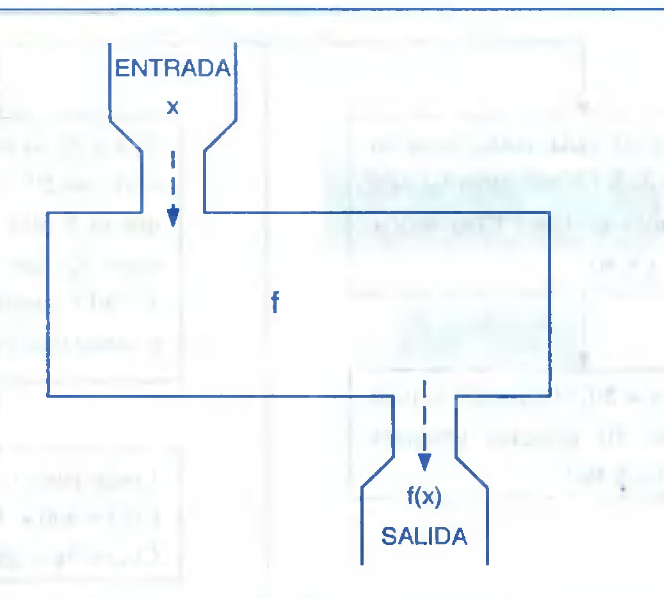
- Un biólogo se interesa en el cambio de tamaño de cierto cultivo de bacterias con el paso del tiempo.

- Un Químico le interesa la relación entre la velocidad inicial de una reacción química y la cantidad de sustrato utilizado.

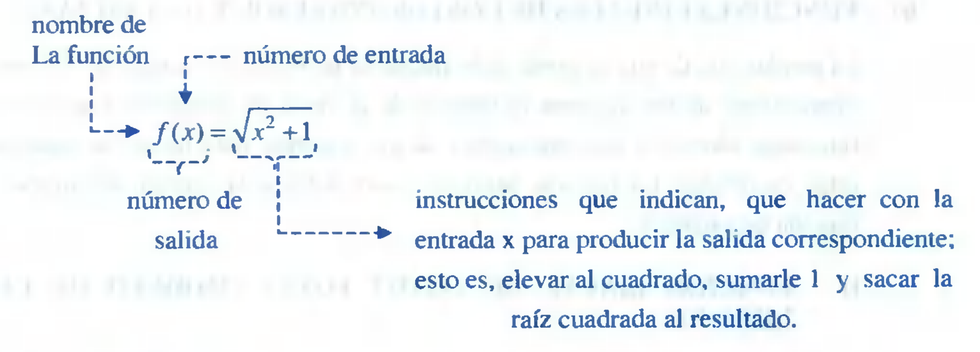
Ahora nos preguntamos ¿Cómo depende una cantidad de otra?

Esta dependencia entre dos cantidades se describe convenientemente en matemáticas mediante una función; por lo tanto, una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A uno sólo un elemento de un conjunto B y la notación que se tiene es: f: A $\longrightarrow$ B, donde $D_f = A$ y $R_f = B$.

Todo esto se puede pensar en una función f como en una máquina. El dominio es el conjunto de entrada (la materia prima) para la máquina, la regla describe la forma de procesar la entrada y los valores de la función son las salidas de la máquina.

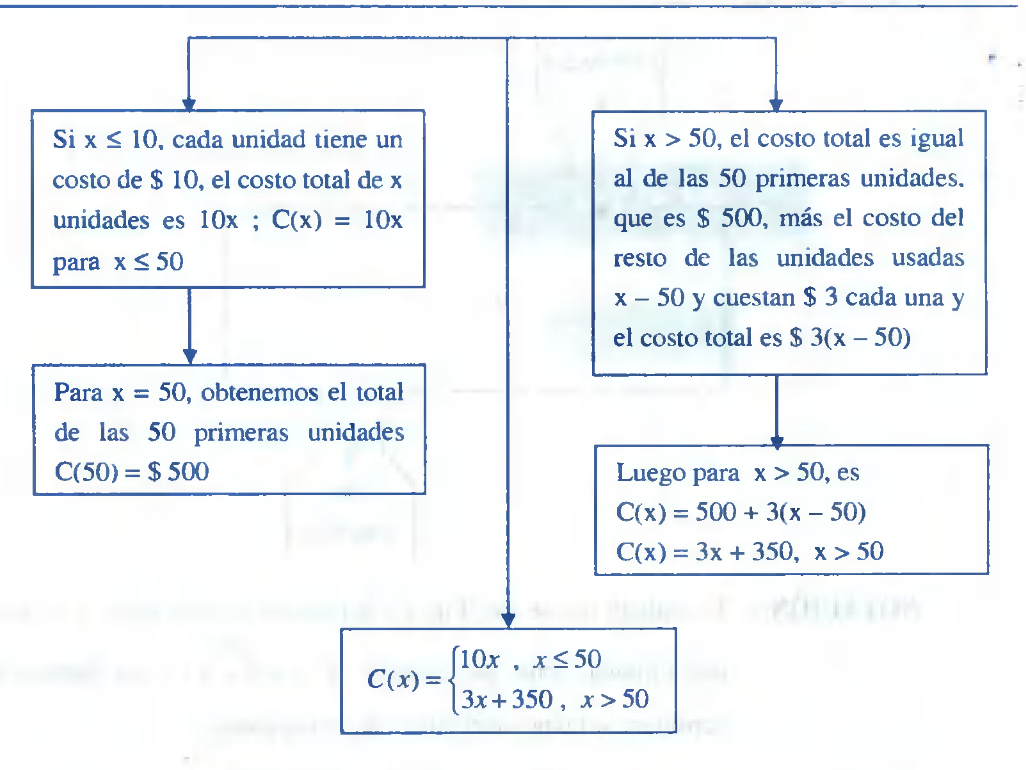


NOTACIÓN.- El símbolo f(x) se lee "f de x", la regla de correspondencia es dado por una fórmula, como por ejemplo $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, esta fórmula puede considerarse como un conjunto de instrucciones .



Ejemplo.- La electricidad se cobra a los consumidores a una tarifa de \$ 10 por unidad para las primeras 50 unidades y \$ 3 por unidad para cantidades que exceden las 50 unidades. Determine la función C(x) que dá el costo de usar x unidades de electricidad.

<u>**Solución**</u>



b) FUNCIONES LINEALES DE COSTOS, INGRESOS Y GANANCIAS.-

La conducción de una empresa, debe mantener un registro constante de los costos de operaciones, de los ingresos resultantes de la venta de productos y servicios; tres funciones ofrecen a los conductores de una empresa para tomar las mediadas de estas cantidades: La función lineal de costos totales, la función de ingresos y la función de ganancia.

i) FUNCIÓN LINEAL DE COSTO TOTAL (MODELO DE COSTO LINEAL).-

En la producción de una empresa de cualquier bien, se tiene dos tipos de costos, los costos fijos y los costos variables, a los costos fijos se le considera sin importar la cantidad producida del artículo, es decir que no depende del nivel de producción.

Ejemplo de costos fijos: son las rentas, interés sobre prestamos y salarios de administración.

Los costos variables dependen del nivel de producción, o sea de la cantidad de artículos producidos.

Ejemplo de costos variables: son los costos de los materiales y de la mano de obra.

Luego el costo total está dado por:

Costo Total = Costos Variables + Costos Fijos

Cuando el costo variable por unidad del artículo es constante, en este caso, los costos variables totales son proporcionales a la cantidad de artículos producidos.

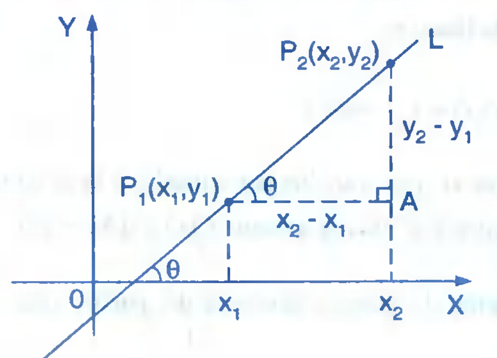
Si m representa el costo variable por unidad, entonces los costos totales al producir x unidades de artículos en mx $ y si los costos fijos son de b dólares, se desprende que el costo total $C(x) = y_c$ (en dólares) de producir x unidades está dado por:

Costo Total = Costos Totales Variables + Costos Fijos

$$\boxed{C(x) = y_c = mx + b} \quad \ldots (1)$$

La ecuación (1) es un ejemplo de un modelo de costo lineal, la gráfica de la ecuación (1) es una línea recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y cuya ordenada al origen dá los costos fijos.

NOTA.- m = pendiente de la recta L



$$m = tg\,\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

OBSERVACIÓN.- En la función lineal de costo C(x) = mx + b, el costo fijo se obtiene haciendo x = 0, es decir: C(0) = m(0) + b = b, así, entonces, el costo fijo es la intersección de la función costo con el eje Y.

En economía, el costo marginal es la razón de cambio del costo, el costo marginal es importante en la administración al tomar decisiones en áreas como control de costos, fijación de precios y planeación de la producción. Si la función de costo es C(x)=mx + b, entonces su gráfica es una recta con pendiente m, como la pendiente representa la razón de cambio promedio, el costo marginal es el número m.

Si C(x) es el costo total de fabricar x artículos, entonces el costo promedio por artículo está dado por:

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Ejemplo.- El costo variable de procesar un kilo de granos de café es de $ 0.5 y los costos fijos por día son $ 300.

a) Dé la ecuación de costo lineal y dibujar su gráfica.

b) Determine el costo de procesar 1000 kilos de granos de café por un día.

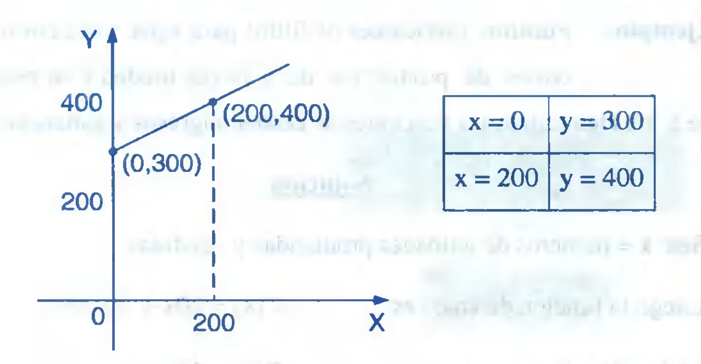
<u>Solución</u>

a) Como $C(x) = y_c$ representa el costo de procesar x kilos de granos de café por día, y como el modelo lineal es:

$$C(x) = y_c = mx + b$$

en donde m representa el costo variable por unidad y b es el costo fijo y para nuestro caso es m = 0.5, b = 300 por lo tanto C(x) = 0.5x + 300 **... (1)**

para graficar la ecuación (1), primero ubicamos dos puntos sobre la gráfica (la recta).



x = 0	y = 300
x = 200	y = 400

Observe que la porción de la gráfica está situada por completo en el primer cuadrante, puesto que x y y_c no pueden ser cantidades negativas.

b) Al sustituir x = 1000 en la ecuación (1) se obtiene:

$$y_c = 0.5(1000) + 300 = 500 + 300 = 800$$

por lo tanto, el costo de procesar 1000 kilos de granos de café al día será de $ 800.

ii) **FUNCIÓN LINEAL DE INGRESO.-** Supóngase que una empresa tiene costos fijos por b dólares y costo de producción de m dólares por unidad y un precio de venta de α dólares por unidad, entonces la función de ingreso R(x) está dado por:

$$\boxed{R(x) = \alpha x}$$

Donde x es el número de unidades de un producto fabricados o vendidos.

iii) **FUNCIÓN LINEAL DE GANANCIA.-** Si C(x) = mx + b, es la función de costo y R(x) es la función de ingreso, entonces la función de ganancia denotado por P(x) es dado por:

$$P(x) = R(x) - C(x) = \alpha x - (mx + b)$$

$$\boxed{P(x) = (\alpha - m)x - b}$$

Donde x representa la cantidad de unidades del artículo producidos y vendidos.

Ejemplo.- Puritrón, fabricantes de filtros para agua, tiene costos fijos por \$ 20,000, costos de producción de \$ 20 por unidad y un precio de venta unitario de \$ 30. Determinar las funciones de costos, ingresos y ganancias para Puritrón.

Solución

Sea x = números de unidades producidas y vendidas

Luego la función de costo es: C(x) = 20x + 20,000

La función de Ingreso es: R(x) = 30x

Y la función de ganancia es: P(x) = R(x) – C(x)

P(x) = 30x – (20x + 20,000) = 10x – 20,000

c) APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS.-

Como el vértice de una función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ es el punto más alto o más bajo sobre la gráfica, se puede usar en las aplicaciones para encontrar un valor máximo o un valor mínimo; es decir:

1. Cuando a > 0, la gráfica se abre hacia arriba y por lo tanto la función tiene un mínimo.

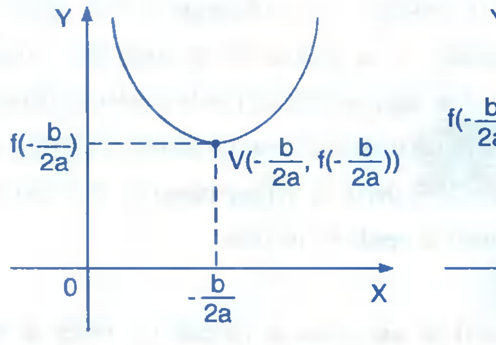
2. Cuando a < 0, la gráfica se abre hacia abajo y por lo tanto la función tiene un máximo.

3. El vértice de la función cuadrática es $V(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

4. El eje de simetría de la función cuadrática es $x = -\frac{b}{2a}$.

5. La intersección con el eje X (si existe) se determina resolviendo f(x) = 0.

6. La intersección con el eje Y es f(0) = c.



Si a > 0 y se tiene:

$D_f = R$; $R_f = [f(-\frac{b}{2a}), +\infty >$

Si a < 0 y se tiene:

$D_f = R$; $R_f = < -\infty, f(-\frac{b}{2a})]$

Ejemplo.- Juan López atiende y es el dueño de la pastelería Milagros, contrató un consultor para analizar las operaciones del negocio. El consultor dice que sus ganancias P(x) de la venta de x unidades de pasteles, están dadas por $P(x) = 120x - x^2$ ¿Cuántos pasteles debe vender para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia máxima?

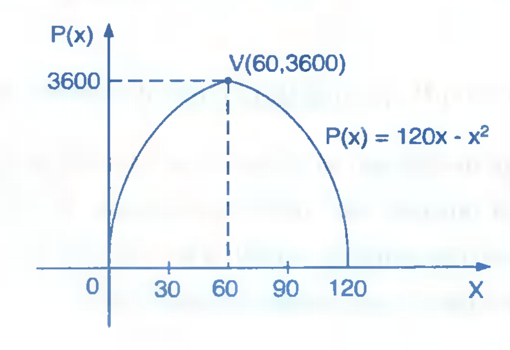
Solución

A la función ganancia dada expresamos en la forma $P(x) = -x^2 + 120x$

su gráfica es una parábola que se abre hacia abajo y su vértice es:

$V(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ donde a = -1, b = 120 y c = 0

$-\frac{b}{2a} = -\frac{120}{-2} = 60$, $f(-\frac{b}{2a}) = f(60) = 3600$, por lo tanto V(60,3600)



La coordenada x es el número de pasteles, la coordenadas y es la ganancia con ese número de pasteles. Sólo la porción de la gráfica en el cuadrante I (donde ambas coordenadas es positiva) es importante aquí, porque no puede vender un número negativo de pasteles y no tiene interés en una ganancia negativa. La ganancia máxima ocurre en el punto con la mayor coordenada "y", es decir, el vértice como en la figura: la ganancia máxima de $ 3600 se obtiene cuando se vende 60 pasteles.

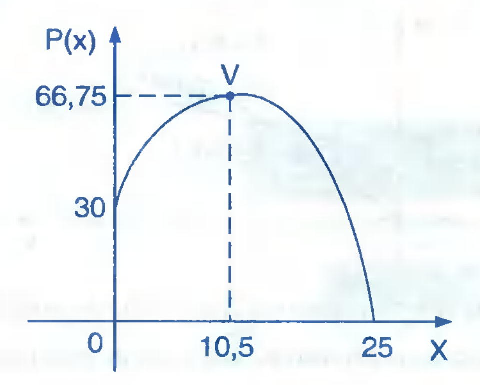
Ejemplo.- La ganancia trimestral de una tienda de calzado (en miles de dólares) está dada por: $P(x)=-\frac{x^2}{3}+7x+30$, $(0\le x\le 50)$ donde x (en miles de dólares) es la cantidad de dinero que la tienda gasta en publicidad cada trimestre. Determine la cantidad que la tienda debería invertir en publicidad para obtener una ganancia trimestral máxima ¿Cuál es la máxima ganancia trimestral que puede lograr la tienda?

Solución

Como la función ganancia P(x) es una función cuadrática, entonces su gráfica es una parábola $P(x)=-\frac{x^2}{3}+7x+30$ de donde $a=-\frac{1}{3}$, $b=7$, $c=30$

su vértice es $V(-\frac{b}{2a},f(-\frac{b}{2a}))$, de donde $-\frac{b}{2a}=-\frac{7}{2(-\frac{1}{3})}=\frac{21}{2}=10.5$

$f(-\frac{b}{2a})=f(10.5)=66.75$, por lo tanto el vértice de la parábola es $V(10.5;66.75)$ como la parábola se abre hacia abajo, el vértice de la parábola es el punto más alto sobre la parábola, luego la ordenada del vértice proporciona el valor máximo de P(x), esto significa que la máxima ganancia trimestral de $ 66.750 se presenta cuando la tienda gasta $ 10,500 por trimestre por concepto de publicidad.



d) ANÁLISIS DE EQUILIBRIO.-

Sean C(x) la función de costo lineal; R(x) la función de ingresos, y P(x) la función ganancia de una empresa donde C(x) = mx + b, R(x) = sx, P(x) = R(x) – C(x) = (s – m)x – b, donde m denota el costo de producción por unidad, s el precio de venta por unidad; b los costos fijos de la empresa, y x, el nivel de producción y ventas.

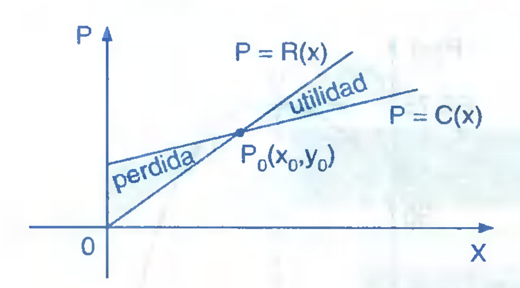
El nivel de producción en que la empresa no tiene ganancias ni perdidas es el "nivel operativo de equilibrio" y se puede determinar resolviendo las ecuaciones P = C(x) y P = R(x) en forma simultanea.

El nivel de producir x_0, la ganancia es cero, de modo que:

$P(x_0) = R(x_0) - C(x_0) = 0$ por lo tanto $\boxed{R(x_0) = C(x_0)}$

El punto $P_0(x_0, y_0)$ que es la solución de las ecuaciones simultaneas P = R(x) y P = C(x), se conoce como el "punto de equilibrio"; el número x_0 y el número P_0 son la cantidad de equilibrio y el ingreso de equilibrio respectivamente.

Geométricamente, el punto de equilibrio $P_0(x_0, y_0)$ es el punto de intersección de las líneas rectas que representan las funciones de costos e ingresos, esto es así porque $P_0(x_0, y_0)$ es la solución de las ecuaciones simultaneas P = R(x) y P = C(x) y debe estar en ambas rectas al mismo tiempo.



Se observa que si $x < x_0$, entonces R(x) < C(x) de modo que P(x) = R(x) – C(x) < 0 y así la empresa tiene pérdidas en este nivel de producción, sin embargo si $x > x_0$ entonces P(x) > 0 y la empresa opera con ganancia.

Ejemplo.- La compañía J.J. Servicios fabrica sus productos con un costo \$ 4 por unidad y los vende a \$ 10 la unidad. Si los costos fijos de la empresa son de \$ 12000 al mes, determinar el punto de equilibrio de la empresa.

Solución

De los datos del problema, las funciones de costos, y de ingresos están dados por:

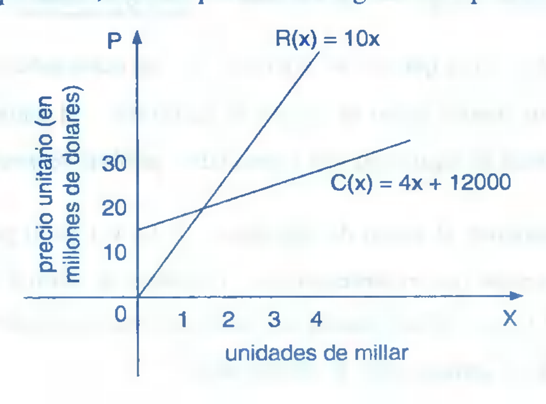
C(x) = 4x + 12000 y R(x) = 10x respectivamente al hacer R(x) = C(x), se obtiene:

10x = 4x + 12000 ⇒ 6x = 12000 de donde x = 2000

Al reemplazar este valor de x = 2000 en R(x) = 10x se tiene

R(2000) = 10(2000) = 200000

Esto quiere decir que para una empresa de equilibrio, la empresa debe fabricar 2000 unidades de su producto, a fin de producir un ingreso de equilibrio de \$ 20000.



Ejemplo.- Con los datos del ejemplo anterior, responder las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la pérdida de la empresa si sólo se producen y venden 1500 unidades por mes?

b) ¿Cuál es la ganancia si se producen y venden 3000 unidades por mes?

c) ¿Cuántas unidades debe producir y vender la empresa para obtener una ganancia mensual mínima de $ 9000?

Solución

Como la función ganancia P(x) está dado por la regla

$P(x) = R(x) - C(x) = 10x - (4x + 12000) = 6x - 12000$

a) Si se producen y venden 1500 unidades por mes, se tiene

$P(1500) = 6(1500) - 12000 = -3000$ de modo que la empresa tendrá una pérdida de $ 3000 por mes.

b) Si se producen y venden 3000 unidades por mes, se tiene

$P(3000)=6(3000)- 12000 = 6000$ es decir, se tiene una ganancia mensual de $ 6000.

c) Al reemplazar a P(x) por 9000 en la ecuación $P(x) = 6x - 12000$ se tiene

$9000 = 6x - 12000$ de donde $6x = 21000$ entonces $x = 3500$ es decir, la empresa debe producir al menos 3500 unidades para obtener una ganancia mensual mínima de $ 9000.

4.29. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) El costo marginal de producir un medicamento es de $ 10 por unidad, mientras que el costo de producir 100 unidades es de $ 1500. Encuentre la función de costo C(x), suponiendo que es lineal.

Solución

Como C(x) es lineal $\Rightarrow C(x) = mx + b$

El costo marginal es de $ 10 por unidad, es decir que $m = 10$ entonces $C(x) = 10x + b$

Ahora calculamos el valor b y para esto se tiene que el costo de producir 100 unidades del medicamento es de $ 1500 es decir C(100) = 1,500 y como

$$C(x) = 10x + b \implies C(100) = 10(100) + b$$

$$1{,}500 = 1{,}000 + b \implies b = 500$$

Luego la función de costo es C(x) = 10x + 500 donde el costo fijo es b = $ 500

(2) La compañía financiera de Alpamayo planea abrir dos sucursales dentro de dos años en dos lugares: un complejo industrial y un centro comercial en la ciudad. Como resultado de estos planes de ampliación, se espera que los depósitos totales de Alpamayo durante los próximos 5 años crezcan de acuerdo a la regla: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} + 20 \; ; \; si \;\; 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + 20 \; ; \; si \;\; 2 < x \le 5 \end{cases}$ donde y = f(x) proporciona la cantidad total de dinero (en millones de dólares) en depósitos con Alpamayo en el año x (x = 0 corresponde al presente) trace la gráfica de f(x).

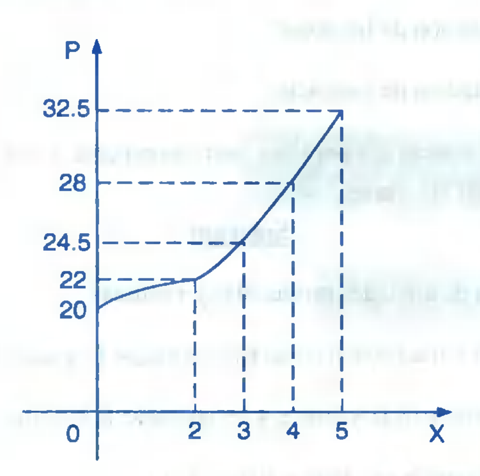
Solución

Se observa que el dominio de f(x) es [0,5], donde $f(x) = \sqrt{2x} + 20$ para $0 \le x \le 2$, los valores de f(x) correspondiente a x = 0, 1 y 2 presentamos en la tabla

x	0	1	2
$f(x) = \sqrt{2x} + 20$	20	21.4	22

Para $f(x) = \frac{x^2}{2} + 20$ para $2 < x \le 5$, los valores de f(x) correspondiente a x = 3, 4 y 5 aparecen en la tabla

x	3	4	5
$f(x) = \frac{x^2}{2} + 20$	24.5	28	32.5



(3) La ganancia de la compañía de controles S.A. debe decidir entre dos procesos de producción de su termostato electrónico modelo C. El costo mensual del primer proceso está dado por $C_1(x) = 20x + 10,000$ dólares, donde x es la cantidad de termostato producidos, y el costo mensual del segundo proceso está dado por $C_2(x) = 10x + 30,000$ dólares. Si las ventas proyectadas son de 800 termostatos a un precio unitario de \$ 40 ¿Cuál proceso debe elegir la gerencia para maximizar las ganancias de la compañía?

Solución

Veremos el nivel operativo de equilibrio con el primer proceso y que se obtiene resolviendo la ecuación

$40x = 20x + 10,000$; de donde $20x = 10,000$ entonces $x = 500$

lo que nos da como resultado 500 unidades, ahora veremos el nivel operativo de equilibrio con el segundo proceso y que se obtiene resolviendo la ecuación:

$40x = 10x + 30000$, de donde $30x = 30,000 \Rightarrow x = 1,000$

lo que nos dá 1000 unidades como las ventas proyectadas son de 800 unidades , se concluye que la gerencia debe elegir el primer proceso.

(4) Un fabricante tiene costos fijos mensuales de \$ 60,000 y un costo de producción unitario de \$ 10. El producto se vende por \$ 15 la unidad.

a) ¿Cuál es la función de costos?

b) ¿Cuál es la función de Ingresos?

c) ¿Cuál es la función de ganancia?

d) Calcule la ganancia (o perdida) correspondiente a los niveles de producción de 10,000 y 14,000 unidades.

Solución

Sea x = el número de unidades producidas y vendidas

a) Como m = 10 y b = 60,000 costo fijo, entonces C(x)=mx + b ⇒ C(x = 10x + 60,000

b) Como cada producto se vende a $ 15 entonces la función ingreso es: R(x) = 15x

c) La función ganancia es: P(x) = R(x) – C(x)

P(x) = 15x – (10x + 60,000) = 5x – 60,000

d) Cuando se produce x = 10,000 se tiene: P(10,000) = 5(10,000) – 6,000 = -10,000 se tiene una perdida de $ 10,000 cuando se produce x = 140,00 se tiene:

P(14,000) = 5(140,000) – 60,000 = 70,000 – 60,000 = 10,000

Es decir que se tiene una ganancia de $ 10,000

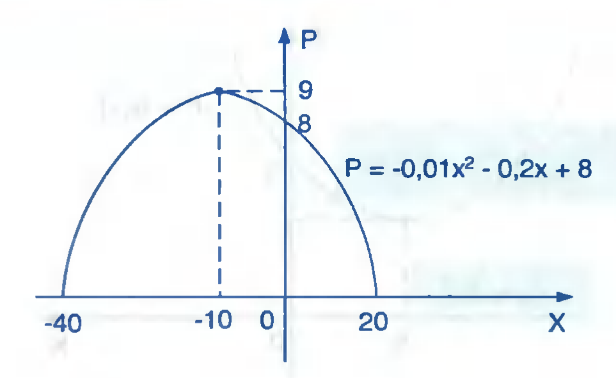
5 La función de demanda para cierta marca de videocasetes está dada por $P = D(x) = -0,01x^2 - 0,2x + 8$ donde P es el precio unitario al mayoreo, en dólares, y x es la cantidad demandada cada semana, en unidades de millar. Trace la curva de demanda correspondiente ¿Arriba de cuál precio ya no habrá demanda? ¿Cuál es la cantidad máxima demandada por semana?

Solución

La función demanda $P = -0,01x^2 - 0,2x + 8$ es cuadrática y su gráfica se puede trazar por el método de completar cuadrados y calcular su vértice.

$$P - 8 = -0.01(x^2 + 20x) \quad \Rightarrow \quad P - 8 - 1 = -0,01(x^2 + 20x + 100)$$

$$P - 9 = -0,01(x + 10)^2 \quad \Rightarrow \quad V(-10,9)$$



La intersección con el eje P que es 8, dá el precio unitario por el mayoreo arriba del cual ya no habrá demanda, ahora para obtener la máxima cantidad demandada se hace P = 0 es decir: $-0,01x^2 - 0,2x + 8 = 0$ (multiplico por −100)

$$x^2 + 20x - 800 = 0\ ,\ \text{factorizando}$$

(x + 40)(x − 20) = 0, de donde se tiene: x = -40 y x = 20, como x es positiva entonces nos quedamos con x = 20, luego él número máximo de videocasetes demandadas por semana es 20000.

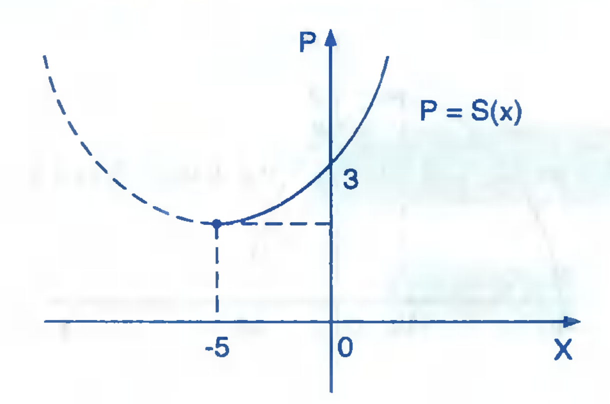

6 La función de oferta para cierta marca de videocasetes está dado por $P = S(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 3$, donde P es el precio unitario al mayoreo, en dólares, y x representa la cantidad que el proveedor pondrá en el mercado (medida en unidades de millar). Trace la curva de oferta correspondiente ¿Cuál es el precio mínimo para el cual el proveedor colocara los videocasetes en el mercado?

Solución

Como la función oferta $P = S(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 3$ es cuadrática y su gráfica se puede trazar por el método de completación de cuadrados por determinar su vértice.

$$P = 0,01x^2 + 0,1x + 3 = 0,01(x^2 + 10x) + 3 \quad \Rightarrow \quad P - 3 + 0,25 = 0,01(x^2 + 10x + 25)$$

$$P - 2,75 = 0,01(x+5)^2 \quad \Rightarrow \quad V(-5;-2,75)$$



La intersección con el eje P que es 3 dá el precio mínimo que el proveedor estaría interesado en dejar los videocasetes en el mercado.

7 Cuándo una empresa vende x unidades de un producto, sus ganancias son $P(x)=-2x^2+40x+280$ encuentre:

a) El número de unidades que deben venderse para que la ganancia sea máxima.

b) Cuál es la ganancia máxima.

Solución

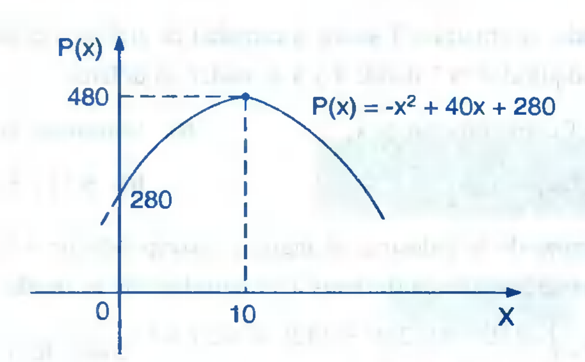
Como la función ganancia es: $P(x)=-2x^2+40x+280$ su gráfica es una parábola que se abre hacia abajo y su vértice se determina por el método de completar cuadrados

$$y=P(x)=-2x^2+40x+280 \Rightarrow y-280=-2(x^2-20x+100)+200$$

$$y-480=-2(x-10)^2 \Rightarrow V(10.480)$$

a) Luego la coordenada $x = 10$ es el número de unidades producidas.

b) La coordenada $y = \$ 480$ es la ganancia máxima que se obtiene al vender 10 unidades del producto.



8 El costo total de producir 10 unidades de una calculadora es de \$ 100. El costo marginal por calculadora es \$ 4. Encuentre la función de costo, C(x) si es lineal.

Solución

Como C(x) es lineal $\Rightarrow$ $C(x) = mx + b$

Como el costo marginal por calculadora es \$ 4 es decir $m = 4$

Luego $C(x) = 4x + b$, como la producción de 10 unidades es \$ 100 es decir: $C(10) = 100$

entonces $100 = C(10) = 40 + b \Rightarrow b = 60$ $\therefore\ C(x) = 4x + 60$

4.30. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1 Suponga que la venta esperada (en miles de dólares) de una pequeña compañía para los próximos diez años está aproximada por la función $S(x) = 0{,}08x^4 - 0{,}04x^3 + x^2 + 9x + 50$.

a) ¿Cuál es la venta esperada este año? **b)** ¿Cuál será la venta en tres años?

Rpta. **a)** \$ 54,000 **b)** \$ 95,400

2 Un contratista estima que el costo total de construir x grupos de departamentos en un año está aproximado por $S(x) = x^2 + 80x + 60$, donde S(x) representa el costo en cientos de miles de dólares. Encuentre el costo de construir.

a) 4 grupos **b)** 10 grupos

Rpta. **a)** \$ 39'600,000 **b)** \$ 96'000,000

(3) En cierto estado, el impuesto T sobre la cantidad de artículos es de 6% sobre el valor de los artículos adquiridos "x", donde T y x se miden en dólares.

a) Exprese T como función de x. **b)** Determine T(200) y T(5.65)

Rpta. **a)** T(x) = 0,06x **b)** $ 12 ; $ 0,34

(4) Según las fuentes de la industria, el ingreso correspondiente a la industria de ventas a domicilio durante los años posteriores a su introducción se puede aproximar mediante la función $R(t)=\begin{cases}-0,03t^3+0,25t^2-0,12t & \text{si } 0\le t\le 3\\ 0,57t-0,63 & \text{si } 3<t\le 11\end{cases}$ donde R(t) se mide el ingreso en miles de millones de dólares y t se mide en años con t = 0 correspondiente al inicio de 1984 ¿Cuál fue el ingreso al inicio de 1850 y 1993?

Rpta. $ 0,1 mil millones; $ 4,5 mil millones

(5) Puritrón, fabricante de filtros para agua, tiene costo fijos por $ 20,000; costos de producción de $ 20 por unidad y un precio de venta unitario de $ 30. Determinar las funciones de costos, ingresos y ganancia para puritrón.

Rpta. C(x) = 20x + 20,000 ; R(x) = 30x ; P(x) = 10x – 20,000

(6) La electricidad se cobra a los consumidores a una tarifa de $ 10 por unidad para las primeras 50 unidades y a $ 3 por unidad para cantidades que exceden las 50 unidades. Determine la función C(x) que dá el costo de usar x unidades de electricidad.

Rpta. $C(x)=\begin{cases}10x\ ; & x\le 50\\ 350+3x\ ; & x>50\end{cases}$

(7) Una empresa que fabrica radio – receptores tiene costos fijos de $ 3000 y el costo de la mano de obra y del material es de $ 15 por radio. Determine la función de costo, es decir, el costo total como una función del número de radio producidos. Si cada radio receptor se vende por $ 25, encuentre la función ingresos y la función de utilidades.

Rpta. C(x) = 15x + 3,000 , R(x) = 25x , P(x) = 10x – 3,000

(8) Un granjero tiene 200 yardas de cerca para delimitar un terreno rectangular. Exprese el área A del terreno como una función de la longitud de uno de sus lados.

Rpta. A(x) = x(100 – x)

(9) Se construye una cisterna de modo que su capacidad sea de 300 pies cúbicos de agua. La cisterna tiene como base un cuadrado y cuatro casas verticales, todas hechas de concreto y una tapa cuadrada de acero. Si el concreto tiene un costo de $ 1.50 por pie cuadrado y el acero cuesta $ 4 por pie cuadrado, determine el costo total C como una función de la longitud del lado de la base cuadrada. **Rpta.** $C(x) = 5,5x^2 + \frac{1,800}{x}$

(10) Un fabricante tiene gastos fijos mensuales de $ 40,000 y un costo unitario de producción de $ 8. El producto se vende a $ 12 la unidad.

a) ¿Cuál es la función de costos?

b) ¿Cuál es la función de Ingresos?

c) ¿Cuál es la función de ganancia?

d) Calcule la ganancia (o pérdida) correspondiente a niveles de producción de 8,000 y 12,000 unidades.

Rpta. **a)** C(x) = 8x + 40,000 **b)** R(x) = 12x

c) P(x) = 4x – 40,000 **d)** $ 8,000 ; $ 8,000

(11) Encuentre el punto de equilibrio para la empresa con función de costo C(x) = 5x + 1,000 y función de ingresos R(x) = 15x. **Rpta.** 1,000 unidades ; $ 15,000

(12) Encuentre el punto de equilibrio para la empresa con función de costos C(x) = 0,2x + 120 y función de ingresos R(x) = 0,4x **Rpta.** 600 unidades; $ 240

(13) Encuentre el punto de equilibrio para la empresa con función de costos C(x) = 150x + 2,000 y función de ingresos R(x) = 270x.

Rpta. 1000 unidades ; $ 270,000

(14) El azúcar tiene un costo de $ 25 para cantidades hasta de 50 libras y de $ 20 por libra en el caso de cantidades por encima de las 50 libras. Si C(x) denota el costo de x libras de azúcar, exprese C(x) por medio de expresiones algebraicas apropiadas y graficar.

Rpta. $C(x) = \begin{cases} 25x & \text{si } x \le 50 \\ 20x & \text{si } x > 50 \end{cases}$

(15) Auto – time, fabricante de cronómetros, tiene gastos fijos mensuales de \$ 48000 y un costo unitario de producción de \$ 8. Los cronómetros se venden a \$ 14 cada uno.

a) ¿Cuál es la función de costos?

b) ¿Cuál es la función de ingresos?

c) ¿Cuál es la función de ganancia?

d) Calcule la ganancia (o pérdida) correspondiente a niveles de producción de 4,000, 6,000 y 10,000 cronómetros, respectivamente.

Rpta. **a)** C(x) = 8x + 48,000 **b)** R(x) = 14x

c) P(x) = 6x – 48,000 **d)** \$ 24,000 ; \$ 12,000 ; \$ 12,000

(16) Los impuestos personales en Estados Unidos entre 1960 y 1990 son aproximados por: $f(x)=\begin{cases}7.9x+50.4 & \text{de } 1960 \text{ a } 1975\\ 35.4-361.6 & \text{de } 1975 \text{ a } 1990\end{cases}$ trace la gráfica de la función si x = 0 representa 1960 ¿Qué sucedió a los impuestos personales en 1975?

(17) El costo de cuidados de salud en Estados Unidos, como porcentaje del producto nacional bruto entre 1960 y 1992, esta dado por: $f(x)=\begin{cases}0.22x+5.5 & \text{para } 1960 \text{ a } 1985\\ 0.29x+3.75 & \text{para } 1985 \text{ a } 1992\end{cases}$. Haga la gráfica de esta función si x = 0 representa 1960 ¿Qué sugiere la gráfica respecto al costo de las ciudades por salud?

Rpta. Se elevaron más rápidamente de 1985 a 1992 que de 1960 a 1985

(18) Suponga que las ventas de una guitarra eléctrica satisface la relación S(x) = 300x + 2000, donde S(x) representa el número de guitarras vendidas en el año x, con x = 0 correspondiente al año 1987. Encuentre las ventas en cada uno de los siguientes años.

a) 1987 **b)** 1990 **c)** 1991

Rpta. **a)** 2000 **b)** 2900 **c)** 3200

(19) La demanda mensual, x, de cierto artículo al precio de P dólares por unidad está dada por la relación x = 1350 – 45p el costo de la mano de obra y del material con que se fabrica este producto es de $ 5 por unidad y los costos fijos son de $ 2,000 al mes ¿Qué precio por unidad P deberá al consumidor con objeto de obtener una utilidad máxima mensual?

Rpta. $ 5031.25 al mes

(20) El ingreso mensual por concepto de la venta de x unidades de cierto artículo está dado por $R(x) = 12x - 0,01x^2$ dólares. Determine el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito a maximizar el ingreso ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

Rpta. 600 unidades, $ 3,600

(21) Una empresa tiene costos fijos mensuales de $ 2,000 y el costo variable por unidad de su producto es de $ 25.

a) Determine la función de costo.

b) El ingreso R obtenido por vender x unidades está dado por $R(x) = 60x - 0.01x^2$. Determine el número de unidades que deben venderse al mes de modo maximicen el ingreso ¿Cuál es este ingreso máximo?

c) ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse al mes con el propósito de obtener una utilidad máxima? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

Rpta. **a)** C(x) = 25x + 2,000 **b)** 3,000; $ 90,000

c) 1,750; $ 28,625

(22) El ingreso mensual R obtenido por vender zapatos modelo de lujo es una función de la demanda x del mercado. Obsérvese que, como una función del precio P por par, el ingreso mensual y la demandan son $R = 300p - 2p^2$ y x = 300 – 2p ¿Cómo depende R de x? **Rpta.** $R(x) = 150x - 0,5x^2$

(23) La demanda x de cierto artículo está dada por x = 2000 – 15p, en donde p es el precio por unidad del artículo. El ingreso mensual R obtenido de las ventas de este artículo esta dado por $R = 2000 - 15p^2$ ¿Cómo depende R de x? **Rpta.** $R(x) = \dfrac{x(2000 - x)}{15}$

 El número "y" de unidades vendidas cada semana de cierto producto depende de la cantidad x (en dólares) gastada en publicidad y está dado por $y = 70 + 150x - 0,3x^2$. ¿Cuánto deberían gastar a la semana en publicidad con el objeto de obtener un volumen de ventas máximo? ¿Cuál es este volumen de ventas máximo?

Rpta. \$ 250; 18,820 unidades

 Los costos fijos semanales de una empresa por su producto son de \$ 200 y el costo variable por unidad es de \$ 0.70. La empresa puede vender x unidades a un precio de \$ p por unidad en donde $2p = 5 - 0.01x$ ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana de modo que obtenga?

a) Ingresos máximos **b)** Utilidad máxima

Rpta. **a)** 250 unidades **b)** 180 unidades

 Lynbrook West, un complejo habitacional, tiene 100 departamentos de dos recamaras. La ganancia mensual obtenida por la renta de x departamentos está dado por $P(x) = -10x^2 + 1,760x - 50,000$, dólares ¿Cuántas unidades deben rentarse para maximizar la ganancia mensual? ¿Cuál es la máxima ganancia mensual que se puede obtenerse? **Rpta.** 88 unidades ; \$ 27,440

 La ganancia mensual estimada obtenida por la empresa cannon al producir y vender x unidades de cámaras modelo M1 es $P(x) = -0.04x^2 + 240x - 10,000$ dólares. Encuentre cuántas cámaras debe producirse cada mes para maximizar sus ganancias.

Rpta. 5,000 unidades ; \$ 40,000

 La relación entre las ganancias trimestrales de cunningham, P(x), y la cantidad de dinero x invertido en publicidad por trimestre queda descrita mediante la función $P(x) = -\frac{x^2}{8} + 7x + 30$ $(0 \le x \le 50)$, donde P(x) y x se miden en miles de dólares.

a) Trace la gráfica de P

b) Determine la cantidad de dinero que debe invertir la compañía en publicidad por trimestre para maximizar sus ganancias trimestrales.

Rpta. \$ 28



El ingreso mensual R (en cientos de dólares) obtenido por la venta de rasuradores eléctricas Royal se relaciona con el precio unitario P (en dólares) mediante la ecuación

$$R(P) = -\frac{P^2}{2} + 30P.$$

a) Trace la gráfica de R.

b) ¿Cuál precio unitario maximiza el ingreso mensual?

Rpta. **b)** $ 30



Una firma de confecciones, tiene costos fijos de $ 10,000 por año. Estos casos, como arriendo, mantenimiento, etcétera, deben pagar independientemente de cuánto produzca la compañía, para producir x unidades de un tipo de vestido, éste cuesta $ 20 por prenda (unidad) además de los costos fijos. Es decir, los costos variables para producir x de estos vestidos es 20x dólares.

Estos son los costos que se relacionan directamente con producción, como material, salarios, combustibles, etcétera. Por tanto, el costo total C(x) de producir x vestidos en una año está determinado por una función C:

$$C(x) = (\text{costos variables}) + (\text{costos fijos}) = 20x + 10{,}000$$

a) Representar gráficamente las funciones de costos variables, costos fijos y costos totales.

b) ¿Cuál es el costo total de producir 100 vestidos? ¿400 vestidos?

c) ¿Cuánto más debe costar producir 400 vestidos, en vez de producir 100 unidades?

Rpta. **b)** $ 12,000 ; $ 18,000 **c)** $ 6,000

CAPITULO V

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

5.1. INTRODUCCIÓN.-

Un método de demostración muy útil en matemática es el llamado por inducción o recurrencia que se fundamenta en la propiedad de los números naturales llamado el principio del "buen orden".

También trataremos de la notación sigma "Σ" para la suma finita ya que es de gran importancia en matemática y la notación de producto "π".

Para el estudio de inducción matemática daremos algunas notaciones de los números naturales.

Al conjunto de los números naturales se simboliza por N, es decir:

$$N = \{0,1,2,3,4,5,...\}$$

Que se representa en la recta numérica



Al conjunto de los números naturales son el cero, se simboliza por N_0, es decir:

$$N_0 = \{1,2,3,4,5,...\}$$

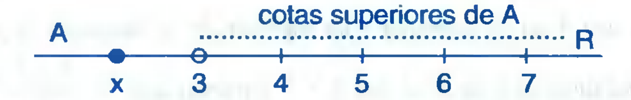
OBSERVACIÓN.- El cero "0" que significa "ausencia de elementos" se considera como un numero natural para algunos autores y para otros no, en el presente libro el cero "0" será considerado como un numero natural; considerar o no el cero como un numero natural es una cuestión de convenio.

5.2. CONJUNTOS ACOTADOS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos **cota superior** de un conjunto $A \subset R$ a todo número $k \in R$ tal que $x \leq k$, $\forall x \in A$, o sea que cualquier número que sea mayor o igual que los elementos de A se llama "cota superior de A".

Cuando A tiene alguna cota superior, diremos que el conjunto A es acotado superiormente.

Ejemplo.- Sea $A = <-\infty,3>$ y la cota superior $k = 5$



Observamos que cualquiera de los números reales mayores que 3 e incluso el 3 es cota superior de A.

De todas estas cotas superiores de A, él número 3 es la menor. Luego daremos la siguiente definición.

b) **DEFINICIÓN.-** A la menor de las cotas superiores de un conjunto $A \subset R$ y acotado superiormente, se le llama supremos de A o mínima cota superior de A y se denota por Sup(A).

OBSERVACIÓN.-

① El supremo de A es también una cota superior de A.

② La menor cota superior k = Supremo de A = Sup A está caracterizada por las condiciones siguientes que es equivalente a la definición.

$K = \text{Sup } A \Leftrightarrow \forall\, x \in A$ y para toda cota superior k' de A, se tiene que $x \leq k \leq k'$

③ El supremo de un conjunto A, si existe, no es necesariamente un elemento de A, como en el caso de $A = <-\infty,3>$ cuyo supremo es 3 no pertenece al conjunto A.

La existencia del supremo para conjuntos acotados superiormente está dado por el siguiente axioma.

5.3. AXIOMA DEL SUPREMO O AXIOMA DE LA MÍNIMA COTA SUPERIOR.-

Todo conjunto A de números reales, no vacío y acotado superiormente, tiene una menor cota superior en R.

Ejemplo.- Demostrar que sí $A = \langle -\infty, 3\rangle$ entonces Sup A = 3

Solución

Probaremos esta afirmación por el absurdo.

Supongamos que 3 no es la menor cota superior de A, entonces se puede asegurar que existe una cota superior k de A tal que $k < 3$ y puesto que $k < \frac{k+3}{2} < 3$

Tomamos $k' = \frac{k+3}{2} \Rightarrow k < k' < 3$ **... (1)**

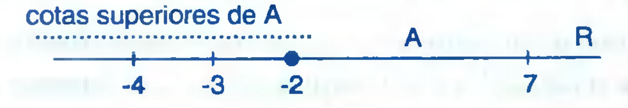
De donde $k' \in A = \langle -\infty, 3\rangle$, pero siendo 1 cota superior de A debería tenerse $k' < k$ contradiciendo a (1).

La suposición es absurda por lo tanto Sup A = 3.

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos cota inferior de un conjunto $A \subset R$ a todo número $k \in R$ tal que $k \leq x$, $\forall x \in A$. O sea que cualquier número que sea menor o igual que los elementos de A se llama "cota inferior de A".

Cuando A tiene alguna cota inferior, diremos que el conjunto A es acotado inferiormente.

Ejemplo.- Sea $A = [-2, 7\rangle$ y la cota inferior k = -2.



Se observa que cualquiera de los números reales menores que –2 e incluso el –2 es cota inferior de A.

De todas estas cotas inferiores de A el número –2 es la mayor. Luego daremos la siguiente definición.

b) DEFINICIÓN.- A la mayor de las cotas inferiores de un conjunto $A \subset R$ y acotado inferiormente, se le llama ínfimo de A o máxima cota inferior de A y se denota por inf (A).

OBSERVACIÓN.-

① El ínfimo de A es también una cota inferior de A.

② La mayor cota inferior k = inf(A) = ínfimo de A está caracterizada por la condición.

$K = \inf(A) \Leftrightarrow \forall\, x \in A$ y para toda cota inferior k' de A se tiene $k' \le k \le x$.

③ El ínfimo de un conjunto puede no ser elemento del conjunto dado.

Ejemplo.- El conjunto A = [-2,7> esta acotado superiormente por 8 e inferiormente por –3, además la mayor cota inferior es –2 y la menor cota superior es 7 por lo tanto: Sup(A) = 7 y Inf(A) = -2 de donde $Sup(A) \notin A$, $Inf(A) \in A$

Cuando en un conjunto A se tiene que $Sup(A) \in A$ entonces el Sup(A) también se le llama el máximo de A y si el $Inf(A) \in A$ entonces al ínfimo de A también se le llama el mínimo de A.

c) DEFINICIÓN.- Un conjunto A se dice que es acotado, si es a la vez acotado inferiormente y superiormente.

Ejemplo.- El conjunto A = <1,7> ∪ [30,50] es acotado y Sup(A) = 50, Inf(A) = 1.

Ejemplo.- El conjunto A = <-∞,-5] ∪ <1,+∞> no es acotado inferiormente ni superiormente.

5.4. PRINCIPIO ARQUIMEDIANO.-

Si x es un número real positivo entonces existe un número natural n_0 tal que $0 < \frac{1}{n_0} < x$ (o equivalentemente tal que $xn_0 > 1$)

Demostración

Demostraremos por el absurdo. Suponiendo que $nx \le 1, \forall n \in N$

Por lo tanto el conjunto $A = \{nx / n \in N\}$ está acotado superiormente al menor por k = 1, y por el axioma del supremo el conjunto A posee una menor cota superior k (Sup A) en R que satisface la condición $nx \le k \le 1, \forall n \in N$ pero siendo $x > 0 \Rightarrow k - x < k$ y por lo tanto (k – x) no puede ser cota superior de A puesto que k es la menor de todas ellas. Luego existe un elemento de A: $m_1 x$ como $m_1 \in N$ tal que $k - x < m_1 x \le k$ **... (1)**

Pues si así no fuese, entonces se tendría que $nx < k - x, \forall nx \in A \Rightarrow k - x$ seria cota superior de A lo cuál es falso.

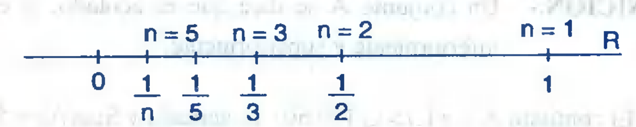
Luego de (1) $\Rightarrow k < (m_1 + 1)x \Rightarrow k < mx$, con $m = (m_1 + 1) \in N$

lo cuál es absurdo, pues siendo k = Sup A debería tenerse $mx \le k$, de esta manera el principio queda demostrado por el absurdo.

Ejemplo.- Probar que el conjunto $A = \{\frac{1}{n} / n \in N\}$ es acotado.

Solución

Ubiquemos los elementos de A en una recta para $x = \frac{1}{n}$, $n \in N$.



Ahora encontraremos el supremo y el ínfimo de A como:

$$\forall n \in N \Rightarrow n \ge 1 \Rightarrow 0 < x = \frac{1}{n} \le 1 \qquad \textbf{... (1)}$$

Cuando n crece los elementos de A se acercan al cero (0) pero sin coincidir con el 0 para $n \in N$ de esta observación se tiene:

$$\text{Sup}(A) = 1 \in A \quad \inf(A) = 0 \notin A$$

Probaremos que inf(A) = 0, de (1) se vio que 0 es una cota inferior, si no fuese la mayor existiría otra cota inferior k mayor que 0 y por principio Arquimediano se tiene que existe un $n_0 \in N$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < k$ lo cual es absurdo pues $\frac{1}{n_0} \in A$ y siendo k cota inferior de A debería cumplirse que $k \leq \frac{1}{n_0}$, de manera que Inf A = 0.

5.5. PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN.-

Todo conjunto no vacío de enteros positivos tiene un elemento mínimo .

En general, un conjunto de números A es bien ordenado si todo subconjunto no vacío de A posee elemento mínimo así por ejemplo, el conjunto de los números enteros positivos es bien ordenado, por ejemplo el sub conjunto formado por todos los números enteros positivos impares tiene elemento mínimo 1.

5.6. MENOR ELEMENTO Y MAYOR ELEMENTO DE $A \subset R$.-

DEFINICIÓN.- "a" es menor elemento (o primer elemento) de A, sí y sólo si $a \in A$ y "a" es cota inferior de A.

DEFINICIÓN.- "b" es mayor elemento (o ultimo elemento) de A, sí y sólo si $b \in A$ y "b" es cota superior de A.

NOTACIÓN.- a = Min (A) ; b = Máx (A)

Ejemplo.- Sea $A = [0,2>$ entonces "0" es un menor elemento: 0 = Min (A)

2 no es mayor elemento, puesto que $2 \notin A$

Ejemplo.- Sea B = N, entonces 0 es menor elemento de B y no existe elemento mayor de B.

Ejemplo.- Sea $A = \{\frac{1}{n} / n \in Z^+\}$ entonces $\nexists$ Min (A), $\exists$ Máx (A) = 1

OBSERVACIÓN.-

1. Todo conjunto finito tiene mínimo y máximo.
2. Todo intervalo cerrado tiene mínimo y máximo.
3. Todo intervalo abierto no tiene mínimo ni máximo.

5.7. PROPOSICIÓN.-

Todo $A \subset Z^+$, $A \neq \phi$ tiene menor elemento, acotado inferiormente.

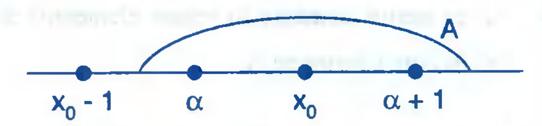
Demostración

1ro. Sea $A \subset Z^+$, $A \neq \phi$ y acotado inferiormente (hipótesis)

2do. Entonces $\exists\ \alpha = \inf(A)$ (por el axioma del ínfimo)

3ro. Luego $\alpha \leq x,\ \forall\ x \in A$ (definición de inf(A))

4to. Además $\alpha + 1$ no es cota inferior de A (pues de lo contrario si fuera así α no seria la mayor de las cotas inferiores)



5to. Si $(\forall\ x \in A,\ \alpha + 1 \leq x)$ definición de cota inferior.

6to. $\exists\ x_0 \in A$ tal que $\alpha + 1 > x_0$

7mo. Así $x_0 \in [\alpha, \alpha + 1>$ (es decir $\alpha \leq x_0 < \alpha + 1$)

8vo. x_0 será el menor elemento de A (pues $x_0 \in A$ por 6to) como $A \subset Z$ entonces todo entero menor que x_0 no puede estar en A.

5.8. SUB CONJUNTOS INDUCTIVOS DE R.-

DEFINICIÓN.- Diremos que $A \subset R$ es un conjunto inductivo sí y sólo si se cumple:

i) $1 \in A$ **ii)** $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$

NOTA.- Si no se cumple ninguno de los dos o alguna de ellas, no es conjunto inductivo.

Ejemplos.-

① El conjunto $A = Z^+$ es un conjunto inductivo.

En efecto: **i)** $1 \in Z^+$

ii) $x \in Z^+ \Rightarrow x > 0$

$$\Rightarrow x + 1 > 1 > 0 \Rightarrow x + 1 \in Z^+$$

② El conjunto A = N es un conjunto inductivo.

En efecto: **i)** $1 \in N$

ii) $x \in N \Rightarrow x \geq 0$

$$\Rightarrow x + 1 \geq 1 \geq 0 \Rightarrow x + 1 \in N$$

③ El conjunto $A = [-2,+\infty>$ es un conjunto inductivo.

En efecto **i)** $1 \in [-2,\infty>$

ii) $x \in [-2,\infty> \Rightarrow x \geq 2$

$$\Rightarrow x + 1 \geq -1 \geq 2 \Rightarrow x + 1 \in [-2,\infty>$$

④ El conjunto $A = N - \{101\}$ no es inductivo.

En efecto: **i)** $1 \in N - \{101\}$

ii) $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$

$100 \in A \not\Rightarrow x + 1 = 100 + 1 = 101 \notin A$

$\therefore$ no es inductivo

⑤ El conjunto $A = [0,2> \cup N$ no es inductivo.

En efecto: **i)** $1 \in A$

ii) $x=\dfrac{1}{2}\in A \;\Rightarrow\; x+1=\dfrac{3}{2}\in A$

$$x=\frac{5}{4}\in A \;\Rightarrow\; x+1=\frac{9}{4}\notin A$$

0 1 2 $\frac{9}{4}$ 3 4 5

5.9. EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA COMPLETA.-

Este principio establece que dado un subconjunto de enteros postivos $S\subset N$ tal que:

i) El número 1 pertenece a S $(1\in S)$

ii) $h\in S$ entonces $h+1\in S$ entonces S coincide con el conjunto de los enteros positivos, es decir $S=N$

Este es uno de los métodos que se utiliza generalmente para demostrar la validez de proposiciones que incluyen todos los valores de n.
Ilustraremos este método mediante un ejemplo puramente intuitivo.

Supongamos que tenemos una escalera con un número indefinido de peldaños y queremos demostrar que podemos subir hasta un determinado peldaño cualquiera, esto podemos hacerlo si conocemos dos hechos:

a) Podemos subir el 1° peldaño.

b) Si estamos en un peldaño cualquiera podemos subir al peldaño siguiente; de a) sabemos que podemos subir al primer peldaño y de b) sabemos que podemos subir al segundo peldaño, nuevamente de esto y de b) sabemos que podemos subir al 3° peldaño, etc. con el propósito de generalizar este razonamiento a otras cosas similares, veamos un ejemplo numérico, esto es:

$$1=1=1^2$$

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+4+5+7=16=4^2$$

podemos demostrar por inducción completa que: $\forall$ n $\in$ N es válida la proposición.

$$P(n)=1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

5.10. TEOREMA 1 (PRIMER PRINCIPIO DE INDUCCIÓN).-

Si S es un conjunto de todos los números naturales n que satisface la propiedad P(n) es decir:

S = {n $\in$ N / P(n) es verdadera} si se cumple:

① $1 \in S$



② Sí $n \in S$ entonces $n + 1 \in S$

Demostración

Debemos demostrar que el conjunto S es igual al conjunto de todos los números naturales.

Sea T el conjunto de todos los números naturales que no están en S ahora veremos que T es el conjunto nulo, para esto supongamos que T no es nulo, entonces por el principio del buen orden, T tiene un elemento mínimo $a \in T$, como $1 \in T$, entonces $a \neq 1$, $a - 1$ es menor que a, entonces $a - 1 \notin T \Rightarrow a - 1 \in S$, pero entonces por la parte 2), $a = (a - 1) + 1 \in S$, lo cual contradice a que $a \in T$ de donde T es nula, concluyendo que S es el conjunto de todos los números naturales.

5.11. TEOREMA 2 (SEGUNDO PRINCIPIO DE INDUCCIÓN).-

Sea P(n) una propiedad asociada a n, para cada entero n, si son verdaderos:

i) P(1) **ii)** $P(h) \Rightarrow P(h + 1)$, $\forall h \geq 1$

entonces P(n) es verdadera para todo entero positivo n.

Demostración

Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n, para los cuales P(n) es verdadera, S satisface la hipótesis del teorema 1, por lo tanto S contienen a todos los enteros positivos, es decir: P(n) es verdadero para todo entero positivo n.

5.12. DEFINICIÓN.-

La suposición de que n ∈ S o lo que es lo mismo la proposición P(n) es verdadera se llama "hipótesis inductiva".

OBSERVACIÓN.- En la hipótesis (1) del teorema decimos 1 ∈ S, equivalentemente P(1) es verdadera, como S es un conjunto de números naturales o enteros positivos, por el principio del buen orden, tiene un elemento mínimo, naturalmente ese elemento no necesariamente es 1, puede ser cualquier otro n > 1.

EJEMPLOS DE DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN.-

① Probar que: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, ∀ n ≥ 1

Solución

∀ n ≥ 1 se verifica $P(n)=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

i) Para n=1 comprobaremos que se verifique: $P(1)=1=\frac{1(1+1)}{2}=1$ es verdadero

ii) Para n = h, $P(h)=\frac{h(h+1)}{2}$ es verdadera por la hipótesis inductiva.

iii) ahora probaremos si P(h) es verdadera entonces P(h + 1) es verdadera.

En efecto tenemos:

$$P(h+1)=\underbrace{1+2+3+...+h}_{hipotesis\ \ inductiva}+(h+1)=P(h)+(h+1)$$

$$=\frac{h(h+1)}{2}+(h+1)=\frac{(h+1)}{2}(h+2)=\frac{(h+1)[(h+1)+1]}{2}$$

por lo tanto la proposición es válida ∀ n ≥ 1

$$\therefore \quad 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\ \forall\ n\geq 1$$

(2) Probar que $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, $\forall\ n\in Z^+$.

Solución

Como $\forall\ n\in Z^+$ se verifica $P(n)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

i) para n=1, comprobaremos que se verifica: $P(1)=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1.2}$ se verifica

ii) para n = h, $P(h)=\frac{h}{h+1}$ es verdadera por la hipótesis inductiva.

iii) ahora probaremos que si P(h) es verdadera entonces P(h + 1) es verdadero. En efecto tenemos:

$$P(h+1)=\underbrace{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{h(h+1)}}_{\text{hipotesis inductiva}}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=P(h)+\frac{1}{(h+1)(h+2)}$$

$$=\frac{h}{h+1}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h(h+2)+1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h+1}{h+2}=\frac{h+1}{[(h+1)+1]}$$

por lo tanto la proposición es válida para n = h + 1

(3) Probar que n^3+2n es divisible por 3.

Solución

Sea $P(n)=n^3+2n$

i) Si n = 1, P(1) = 1+ 2 = 3 es divisible por 3.

ii) Para n = h, se supone que: $P(h)=h^3+2h$ es divisible por 3 (o sea que P(h) es verdadera por hipótesis inductiva).

iii) Para n = h + 1, se debe probar que P(h + 1) es divisible por 3.

$$P(h+1)=(h+1)^3+2(h+1)=(h^3+2h)+3(h^2+h+1)$$

los dos sumandos es divisible por 3, el primero por la hipótesis inductiva y el segundo por tener como factor a 3.

$$P(h+1)=3m+3(h^2+h+1)=3(m+h^2+h+1)$$

Luego P(h + 1) es divisible por 3.

Por lo tanto se concluye que: P(1) es V y P(h) es V entonces P(h + 1) es V

(4) Probar que: $5^{2n}+7$, es divisible por 8.

Solución

Sea $P(n)=\{n\in N / 5^{2n}+7$ es divisible por $8\}$

i) Para n = 1, $P(1)=5^2+7=25+7=32=8(4)$ es divisible por 8.

Luego P(1) es verdadero.

ii) Para n = h se supone que $P(h)=5^{2h}+7$ es divisible por 8, por la hipótesis inductiva.

iii) Para n = h + 1, debemos de probar que P(h + 1) es divisible por 8.

$$P(h+1)=5^{2(h+1)}+7=5^2.5^{2h}+7=5^{2h}+7+24.5^{2h}=\underbrace{(5^{2h}+7)}_{\substack{\text{es divisible por 8}\\ \text{por la hipotesis}\\ \text{inductiva}}}+\underbrace{8.(3.5^{2h})}_{\substack{\text{es divisible por 8}\\ \text{por tener factor 8}}}$$

Luego P(h + 1) es divisible por 8.

Por lo tanto P(1) es V y P(h) es V entonces P(h + 1) es V.

(5) Probar por inducción que $2^n \geq 8(n-2)$, $\forall$ n $\geq$ 4

Solución

i) para n = 4, $2^4 \geq 8(4-2)=16=2^4$ se verifica es verdadero.

ii) para $n = h$, $2^h \geq 8(h-2)$ es verdadera por la hipótesis inductiva.

iii) Ahora probaremos para $n = h + 1$.

$$2^{h+1} = 2.2^h \geq 2.8(h-2) = 8.2(h-2) \geq 8[(h+1)-2]$$

puesto que para $h \geq 4 \Rightarrow h > 3$

$\Rightarrow 2h - 4 > h - 1 \quad \Rightarrow 2(h-2) > h - 1$

por lo tanto se concluye que: $2^n \geq 8(n-2)$, $\forall\, n \geq 4$

(6) Probar que: $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ tiene como factor a 133, $\forall\, n \geq 1$

Solución

Sea $P(n) = \{n \in N / 11^{n+2} + 12^{2n+1}$, tiene como factor a 133}

i) para $n = 1$, $P(1) = 11^{1+2} + 12^{2+1} = 11^3 + 12^3 = 133(11+12)$

Luego P(1) tiene como factor a 133 se verifica es verdadero.

ii) para $n = h$, $P(h) = 11^{h+2} + 12^{2h+1}$ tiene como factor a 133 por la hipótesis inductiva es verdadero.

iii) ahora probaremos para $n = h + 1$.

$$P(h+1) = 11^{h+3} + 12^{2h+3} = 11.11^{h+2} + 12^2.12^{2h+1} + 11.12^{2h+1} - 11.12^{2h+1}$$

$$= 11.(11^{h+2} + 12^{2h+1}) + (12^2 - 11).12^{2h+1} = 11.(11^{h+2} + 12^{2h+1}) + 133.12^{2h+1}$$

el primer término de la derecha tiene como factor a 133 por la hipótesis inductiva y el segundo término tiene como factor a 133 con lo cual se concluye que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ tiene como factor a 133.

(7) Probar que: $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$ es divisible por 9.

Solución

Sea $P(n)=10^3+3(4^{n+2})+5$ es divisible por 9.

i) Para n=1, $P(1)=10+3(4^3)+5=9(23)$ es divisible por 9. Luego P(1) es verdadero

ii) Para n = h, $P(h)=10^h+3(4^{h+2})+5$ es verdadero por la hipótesis inductiva.

iii) Ahora probaremos para n = h + 1, es divisible P(h + 1) por 9.

$$P(h+1)=10^{h+1}+3(4^{h+2})+5=10.10^h+3.4^{h+2}.4+5$$

$$=\underbrace{10^h+3(4^{h+2})+5}+9(4^{h+2})+9(10^h)=P(h)+9(4^{h+2}+10^h)$$

el primer término de la derecha P(h) es divisible por 9 por la hipótesis inductiva y el segundo término es divisible por 9 por tener como factor a 9 por lo tanto P(h + 1) es divisible por 9.

Es decir P(1) verdadero y P(h) es verdadero entones P(h + 1) es verdadero.

(8) Demostrar que $2^n < n!$, ∀ n ≥ 4

Solución

Sea $P(n)=\{n\in N / 2^n < n!\}$

i) Para n = 4, $P(1)=2^4 < n! = 1.2.3.4 = 3.2^3$ se verifica

ii) Para n = h, $P(h)=2^h < h!$ es verdadero por la hipótesis inductiva.

iii) Ahora probaremos para n = h + 1 que P(h + 1) es verdadero es decir:

$P(h+1)=2^{h+1} < (h+1)!$ es verdadero, en efecto,

∀ h ≥ 4 ⇒ h + 1 > 4, luego $2.2^h < 2^2.2^h < h!(h+1)$

Luego $2^{h+1} < (h+1)!$ de donde $P(h+1)=2^{h+1} < (h+1)!$

Es verdadero por lo tanto se concluye que: $2^n < n!$, ∀ n ≥ 4

 Probar que: $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ es múltiplo entero de 11.

Solución

Sea $P(n)=\{n\in N/3^{2n+2}+2^{6n+1}$ es multiplo entero de $11\}$

i) Para n = 1, $P(1)=3^4+2^7=11(19)$ es verdadero.

ii) Para n = h, $P(h)=3^{2h+2}+2^{6h+1}$ es verdadero por la hipótesis inductiva.

iii) Para n = h + 1, probaremos que P(h + 1) es un múltiplo entero de 11 es decir:

$$P(h+1)=3^{2(h+1)+2}+2^{6(h+1)+1}=9.3^{2h+2}+64.2^{6h+1}$$

$$=9(3^{2h+2}+2^{6h+1})+11(5(2^{6h+1}))=9P(h)+11[5(2^{6h+1})]$$

el primer término de la derecha es múltiplo entero de 11 por la hipótesis inductiva y el segundo término es múltiplo entero de 11 por tener un factor 11.

Por lo tanto P(h + 1) es un múltiplo entero de 11 con que concluye que P(h + 1) es verdadero.

 Probar que para cualquier número real P ≥ -1 y cualquier entero positivo n, $(1+p)^n\geq 1+np$

Solución

Sea $P(n)=\{n\in Z^+/(1+p)^n\geq 1+np\}$

i) Para n = 1, P(1) = 1+ p ≥ 1 + p es verdadero se verifica.

ii) Para n = h, $P(h)=(1+p)^h\geq 1+hp$ es verdadero por la hipótesis inductiva.

iii) Ahora probaremos que para n = h + 1; P(h + 1) es verdadero.

$$P(h+1)=(1+p)^{h+1}=(1+p)^h(1+p)\geq(1+hp)(1+p)$$

$$=1+p+hp+hp^2\geq 1+(h+1)p$$

Luego $P(h+1)=(1+p)^{h+1} \geq 1+(h+1)p$ se verifica por lo tanto P(h+1) es verdadero

(11) Sea $\{x_n / n \in N\}$ un conjunto de números reales tales que $x_1=\sqrt[3]{60}$, $x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n+60}$, ∀ n ≥ 1, entero entonces probar por inducción matemática que $x_n < 4$, ∀ n ∈ N.

Solución

i) Para n = 1, $x_1=\sqrt[3]{60}<\sqrt[3]{64}=4 \Rightarrow x_1<4$ se verifica.

ii) Para n = h, $x_h<4$ es verdadera por la hipótesis inductiva.

iii) Ahora probaremos para n = h + 1, $x_{h+1}<4$ se cumple:

$$x_h<4 \Rightarrow x_h+60<60+4=64 \Rightarrow \sqrt[3]{x_h+60}<\sqrt[3]{64}=4$$

$$x_{h+1}=\sqrt[3]{x_h+60}<4 \Rightarrow x_{h+1}<4 \text{ es verdadero}$$

por lo tanto $x_n<4$, ∀ n ∈ N

(12) Probar que $x^{2n-1}+y^{2n-1}$ es divisible por x + y, ∀ n ≥ 1

Solución

Sea $P(n)=\{n\in N / x^{2n-1}+y^{2n-1}$ es divisible por $x+y\}$

i) Para n = 1, $P(1)=x^{2-1}+y^{2-1}=x+y$ se verifica.

ii) Para n= h, $P(h)=x^{2h-1}+y^{2h-1}$ es divisible por x+y por la hipótesis inductiva.

iii) Ahora probaremos para n = h +1, P(h + 1) es divisible por x + y, en efecto tenemos:

$$P(h+1)=x^{2(h+1)-1}+y^{2(h+1)-1}=x^{2h+1}+y^{2h+1}=x^2.x^{2h-1}+y^2.y^{2h-1}$$

$$=x^2.x^{2h-1}-y^2.x^{2h-1}+y^2.y^{2h-1}+y^2.x^{2h-1}$$

$$=y^2(x^{2h-1}+y^{2h-1})+(x^2-y^2)x^{2h-1}=y^2P(h)+(x+y)(x-y)x^{2h-1}$$

el primer término de la derecha es divisible por x + y por la hipótesis inductiva el segundo término es divisible por x + y por tener como factor a x + y por lo tanto P(h + 1) es divisible por x + y.

5.13. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Ejercicios de Conjuntos Acotados.

① Si $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, dos conjuntos acotados superiormente tales que $A \subset B$, probar que Sup A ≤ Sup B.

② Si $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ son dos conjuntos acotados inferiormente tales que $A \subset B$ probar que Inf (B) ≤ Inf(A).

③ Hallar supremos y el ínfimo de $A=\{\frac{1-6n}{3n+4} / n \in N\}$, $B=\{\frac{6(-1)^n+8n}{3n+8} / n \in N\}$

Rpta. $\sup(A)=-\frac{5}{7}$, $\inf(A)=-2$, $\sup(B)=4$, $\inf(B)=0.2$

④ Determinar el supremo y el ínfimo si existen en cada uno de los ejercicios.

a) $A=\{x \in R / x^2 \leq 9\}$ **Rpta.** Sup A = 3, Inf A = -3

b) $A=\{x \in R / 21+4x-x^2 > 0\}$ **Rpta.** Sup A = 7, Inf A = -3

c) $A=\{\frac{3+2n}{3-2n} / n \in N\}$ **Rpta.** Sup A = 5, Inf A = -7

d) $A=\{x \in R / x^2-4x-12<0\}$ **Rpta.** Sup A = 6, Inf A = -2

e) $A=\{x \in R / |x||x+1| \leq 2\}$ **Rpta.** Sup A = 1, Inf A = -2

f) $A=\{x \in R / |6+x-x^2| \leq 6\}$ **Rpta.** Sup A = 4, Inf A = -3

⑤ Encontrar el supremo y el ínfimo de $A=\{\frac{\cos n\pi}{2+n} / n \in N\}$, $B=\{\frac{6+4n}{2-7n} / n \in N\}$

Rpta. $\sup(A)=\frac{1}{4}$, $\inf(A)=-\frac{1}{3}$, $\sup(B)=-\frac{4}{7}$, $\inf(B)=-2$

(6) Hallar el supremo y el ínfimo si existe de:

$A=\{x\in R / x^2-4x-12<0\}$, $B=\{x^2-4x-12 / x\in <-\infty,\infty>\}$

Rpta. Sup (A) = 6, Inf (A) = -2, Sup (B) = $\nexists$, Inf (B) = -16

(7) Dar un ejemplo de dos conjuntos A y B, mediante intervalos tales que Inf $(A\cap B)>$ Sup {Inf(A), Inf(B)}.

(8) Determinar el supremo y el ínfimo si existe de los siguientes conjuntos.

a) $A=\{x\in R / |4-x|>x\}$

b) $A=\{x\in R / |x^2-4|<16\}$

c) $A=\{x\in R / |x+6|+|3-x|=9\}$

d) $A=\{x\in R / |x^2+2x-4|\le 7\}$

e) $A=\{x\in R / |x-8|-|4x^2-1|<0\}$

II. Demostrar por inducción matemática.

(1) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

(2) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

(3) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(4) $2+4+6+...+2n=n(n+1)$

(5) $3+6+9+...+3n=\frac{3n}{2}(n+1)$

(6) $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$

(7) $1+3+3^2+...+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$

(8) $1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)=\dfrac{n}{3}(n+1)(n+2)$

(9) $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+...+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

(10) $1.1^2+2.3^2+3.5^2+...+n(2n-1)^2=\dfrac{n}{6}(n+1)(6n^2-2n+1)$

(11) $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

(12) $2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$

(13) $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n}{3}(4n^2-1)$

(14) $1.3+2.4+3.5+...+n(n+2)=\dfrac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

(15) $2.5+3.6+4.7+...+(n+1)(n+4)=\dfrac{n}{3}(n+4)(n+5)$

(16) $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

(17) $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+...+\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

(18) $1.2+2.2^2+3.2^3+...+n.2^n=(n-1).2^{n+1}+2$

(19) $1.3+3.3^2+5.3^3+...+(2n-1).3^n=(n-1).3^{n+1}+3$

(20) $\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{4.6}+\dfrac{1}{6.8}+...+\dfrac{1}{2n.(2n-1)}=\dfrac{n-1}{4n}$, $\forall$ n ≥ 2

(21) Pruébase que: sí $x>1$ y $n\in Z^+$ entonces $x^n>1$

(22) Pruébase que: sí $x < 0$ y $n \in Z^+$ entonces $x^{2n-1} < 0$

(23) Demuéstrese que:

a) $(a.b)^n = a^n.b^n$, $\forall\ n \in Z^+$ **b)** $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall\ n \in Z^+$

(24) $\forall$ P $\in$ R, P $\geq$ 1 y $\forall\ n \in Z^+$, pruébase que: $(1+p)^n \geq 1 + np + \frac{n(n-1)}{2}p^2$

III. Probar por inducción matemática que:

(1) $5^n \geq 1+4n$, $\forall$ n $\geq$ 1

(2) $3^n \geq 1+2n$, $\forall$ n $\geq$ 1

(3) $n! \geq 2^n$, $\forall$ n $\geq$ 4

(4) $2^n > n^2$, $\forall$ n $\geq$ 5

(5) $4^n > n^4$, $\forall$ n $\geq$ 5

(6) 2^{4n} es divisible por 15, n $\geq$ 1

(7) $4^n - 1$ es divisible por 3, n $\geq$ 1

(8) $3^{2n} + 7$ es divisible por 8, $\forall$ n$\geq$1

(9) $2^{2n} + 5$ es divisible por 8, n $\geq$ 1

(10) $3n^2 + 15n + 6$ es divisible por 6, n $\geq$ 1.

(11) $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ tiene un factor al número 7, $\forall$ n $\geq$ 1

(12) $n^2 + n$ es divisible por 2, $\forall$ n $\geq$ 1

(13) $n^3 - n$ es divisible por 3, $\forall$ n $\geq$1

(14) $n^5 - n$ es divisible por 5, $\forall$ n $\geq$ 1

(15) $n^7 - n$ es divisible por 7, $\forall$ n $\geq$1

(16) $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ es divisible por 7, $\forall$ n $\geq$ 1

(17) $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ es divisible por 7, $\forall$ n $\geq$ 1

(18) $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ es divisible por 5, $\forall$ n $\geq$ 1

(19) $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17, $\forall$ n $\geq$ 1

(20) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es un múltiplo de 11.

(21) Demuéstrese que a + b es un factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$, para todo entero positivos n.

5.14. SUMATORIAS.-

A la suma de los n números $a_1, a_2, \dots, a_n$ es decir: $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, representaremos por la notación $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, que se lee "sumatoria de los a_i desde i = 1 hasta i = n", a 1 se denomina limite inferior, a "n" se denomina limite superior y el símbolo Σ se llama signo de sumación y es la letra Griega mayúscula del alfabeto Griego.

Por ejemplo a la suma de los 5 primeros números enteros positivos impares se puede expresar así:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{i=1}^{5} (2i-1) = 1+3+5+7+9 = 25$$

GENERALIZANDO.- Consideremos m y n dos números enteros de tal manera que $m \le n$ y f una función definida para cada $i \in Z$ donde $m \le i \le n$.

Luego la notación $\sum_{i=m}^{n} f(i)$, nos representa a la suma de los términos f(m), f(m + 1), f(m + 2), ... , f(n) es decir: $\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n)$

Donde i es el índice o variable, m es el limite inferior y n es el limite superior.

Ejemplo.- Sí $f(i) = \dfrac{i}{1+i}$, entonces: $\sum_{i=1}^{6} f(i) = \sum_{i=1}^{6} \dfrac{i}{1+i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{6}{7}$

5.15. PROPIEDADES DE LA SUMATORIA.-

① $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, k constante cualquiera.

Demostración

$$\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + k + \dots + k}_{\text{n-veces } k} = nk$$

② $$\sum_{i=1}^{n} k\ f(i)=k\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{n} k\ f(i)=k\,f(1)+k\,f(2)+k\,f(3)+...+k\,f(n)$$

$$= k\,(f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n))=k\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

③ $$\sum_{i=1}^{n+1} f(i)=\sum_{i=1}^{n} f(i)+f(n+1)$$

Demostración

Aplicando la definición de sumatoria se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n+1} f(i)=\underbrace{f(1)+f(2)+...+f(n)}+f(n+1)=\sum_{i=1}^{n} f(i)+f(n+1)$$

④ $$\sum_{i=1}^{n}[f(i)\pm g(i)]=\sum_{i=1}^{n} f(i)\pm\sum_{i=1}^{n} g(i)$$

Demostración

La demostración se puede hacer por definición de sumatoria pero también se puede demostrar por inducción.

i) Para $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1}[f(i)\pm g(i)]=f(i)\pm g(i)=\sum_{i=1}^{1} f(i)\pm\sum_{i=1}^{1} g(i)$ luego se verifica.

Por lo tanto es verdadero.

ii) Para $n = h$, $\sum_{i=1}^{h}[f(i)\pm g(i)]=\sum_{i=1}^{h} f(i)\pm\sum_{i=1}^{h} g(i)$ es verdadero por la hipótesis inductiva.

iii) Ahora probaremos para $n = h + 1$, en efecto:

$$\sum_{i=1}^{h+1}[f(i)\pm g(i)]=\sum_{i=1}^{h}[f(i)\pm g(i)]+[f(h+1)\pm g(h+1)]$$

$$=\sum_{i=1}^{h}f(i)\pm\sum_{i=1}^{h}g(i)+f(h+1)\pm g(h+1)$$

$$=[\sum_{i=1}^{h}f(i)+f(h+1)]\pm[\sum_{i=1}^{h}g(i)+g(h+1)]$$

$$=\sum_{i=1}^{h+1}f(i)\pm\sum_{i=1}^{h+1}g(i) \quad \text{(por la propiedad 3).}$$

Con la cual queda demostrado.

⑤ $$\sum_{i=a}^{b}f(i)=\sum_{i=a+c}^{b+c}f(i-c)$$

⑥ $$\sum_{i=a}^{b}f(i)=\sum_{i=a-c}^{b-c}f(i+c)$$

⑦ $$\sum_{i=1}^{n}[f(i)-f(i-1)]=f(n)-f(0) \quad \text{(1° regla telescópica).}$$

⑧ $$\sum_{i=k}^{n}[f(i)-f(i-1)]=f(n)-f(k-1) \quad \text{(1° regla telescópica generalizada).}$$

⑨ $$\sum_{i=1}^{n}[f(i+1)-f(i-1)]=f(n+1)+f(n)-f(1)-f(0) \quad \text{(2° regla telescópica).}$$

Ejemplo.- Hallar el valor de $\sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})$.

Solución

Mediante la regla telescópica se tiene:

$f(i)=\frac{1}{i+1} \Rightarrow f(i-1)=\frac{1}{i}$, entonces se tiene:

$$\sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=-\sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{i})=-(f(100)-f(0))=-(\frac{1}{101}-1)=\frac{100}{101}$$

Ejemplo.- Hallar el valor de $\sum_{i=1}^{40}(\sqrt{2i+1}-\sqrt{2i-1})$

Solución

Aplicando la regla telescópica se tiene: $f(i)=\sqrt{2i+1} \Rightarrow f(i-1)=\sqrt{2i-1}$, dé donde

$$\sum_{i=1}^{40}(\sqrt{2i+1}-\sqrt{2i-1})=f(40)-f(0)=\sqrt{81}-\sqrt{1}=9-1=8$$

Ejemplo.- Hallar una fórmula para la sumatoria $\sum_{i=1}^{n}5^i$

Solución

Aplicando la regla telescópica se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(5^{i+1}-5^i)=f(n)-f(0) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(5.5^i-5^i)=5^{n+1}-5$$

$4\sum_{i=1}^{n}5^i=5(5^n-1)$, de donde se tiene: $\sum_{i=1}^{n}5^i=\frac{5}{4}(5^n-1)$

Ejemplo.- Si $p,q,a_i,b_i \in R$, probar para todo n ∈ N que:

$$2pq\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \le q^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2+p^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

Solución

Aplicaremos la propiedad $x^2+y^2 \ge 2xy$, ∀ x, y ∈ R

i) para $n = 1$, $2pq\sum_{i=1}^{1} a_i b_i = 2pqa_1 b_1 = 2(qa_1).(pb_1) \leq (qa_1)^2 + (pb_1)^2$

$$= q^2 \sum_{i=1}^{1} a_i^2 + p^2 \sum_{i=1}^{1} b_i^2$$

ii) Para $n = h$, $2pq\sum_{i=1}^{h} a_i b_i \leq q^2 \sum_{i=1}^{h} a_i^2 + p^2 \sum_{i=1}^{h} b_i^2$ es verdadero por la hipótesis inductiva.

iii) Ahora probaremos para $n = h + 1$, en efecto:

$$2pq\sum_{i=1}^{h+1} a_i b_i = 2pq\sum_{i=1}^{h} a_i b_i + 2pqa_{h+1}b_{h+1}$$

$$\leq (q^2 \sum_{i=1}^{h} a_i^2 + p^2 \sum_{i=1}^{h} b_i^2) + (q^2 a_{h+1}^2 + p^2 b_{h+1}^2)$$

$$= q^2 (\sum_{i=1}^{h} a_i^2 + a_{h+1}^2) + p^2 (\sum_{i=1}^{h} b_i^2 + b_{h+1}^2) = q^2 \sum_{i=1}^{h+1} a_i^2 + p^2 \sum_{i=1}^{h+1} b_i^2 \text{ (por la propiedad 3).}$$

Con lo cual queda demostrada.

Ejemplo.- Probar $\forall\, n \in N$, $\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$ (Desigualdad de CAUCHY – SCHWARZ)

Solución

i) Para $n = 1$, $a_1^2 b_1^2 \leq (a_1^2)(b_1^2)$ se verifica es verdadero.

ii) Para $n = h$, $\sum_{i=1}^{h} (a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{h} a_i^2)(\sum_{i=1}^{h} b_i^2)$ es verdadero por la hipótesis inductiva.

iii) Ahora probaremos para $n = h + 1$, en efecto:

$$(\sum_{i=1}^{h+1} a_i b_i)^2 = (\sum_{i=1}^{h} a_i b_i + a_{h+1}b_{h+1})^2 = (\sum_{i=1}^{h} a_i b_i)^2 + 2a_{h+1}b_{h+1}.\sum_{i=1}^{h} a_i b_i + a_{h+1}^2 b_{h+1}^2$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{h} a_i^2)(\sum_{i=1}^{h} b_i^2) + (b_{h+1}^2 \sum_{i=1}^{h} a_i^2 + a_{h+1}^2 \sum_{i=1}^{h} b_i^2) + a_{h+1}^2 b_{h+1}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{h} a_i^2 (\sum_{i=1}^{h} b_i^2 + b_{h+1}^2) + a_{h+1}^2 (\sum_{i=1}^{h} b_i^2 + b_{h+1}^2) = [\sum_{i=1}^{h} a_i^2 + a_{h+1}^2][\sum_{i=1}^{h} b_i^2 + b_{h+1}^2]$$

$$= (\sum_{i=1}^{h+1} a_i^2)(\sum_{i=1}^{h+1} b_i^2) \qquad \therefore \quad (\sum_{i=1}^{h} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{h+1} a_i^2)(\sum_{i=1}^{h+1} b_i^2)$$

con lo cual queda probado la desigualdad

5.16. FÓRMULAS DE LA SUMATORIA.-

① $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

④ $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

Demostración

① Existen varias formas de hacer la demostración, una es mediante la inducción, otra mediante la regla Telescópica y otra la que demostraremos en la forma.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n-\text{veces } (n+1)}$$

Entonces se tiene: $2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1) \qquad \therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) La fórmula (2) demostraremos aplicando la regla Telescópica.

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3-i^3]=f(n)-f(0)\ ,\ \text{de donde}\ \ f(i)=(i+1)^3\Rightarrow f(i-1)=i^3\ \text{entonces se tiene:}$$

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3-i^3]=(n+1)^3-1\ ,\ \text{desarrollando se tiene:}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+3i+1-i^3)=(n+1)^3-1\ \Rightarrow\ 3\sum_{i=1}^{n}i^2+3\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1=(n+1)^3-1$$

$$3\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{3n(n+1)}{2}+n=(n+1)^3-1$$

$$3\sum_{i=1}^{n}i^2=(n+1)^3-\frac{3n}{2}(n+1)-(n+1)\ =(n+1)[(n+1)^2-\frac{3n}{2}-1]$$

$$3\sum_{i=1}^{n}i^2=(n+1)(n^2+2n-\frac{3n}{2})=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\qquad\qquad \therefore\ \sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

NOTA.-Las fórmulas 3) y 4) se deja como ejercicio.

EJEMPLOS DESARROLLADOS.-

(1) Hallar una fórmula para la sumatoria $\sum_{i=1}^{n}\ln(i)$

Solución

Aplicando propiedad de logaritmo se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(i)=\ln(1)+\ln(2)+\ln(3)+...+\ln(n)=\ln(1.2.3...n)=\ln(n!)$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}\ln(i)=\ln(n!)$$

(2) Hallar una fórmula para la sumatoria $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)(i-1)!}$

Solución

Multiplicando numerador y denominador por i, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)(i-1)!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)i(i-1)!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1-1}{(i+1)!}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{i+1}{(i+1)!}-\frac{1}{(i+1)!})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i!}-\frac{1}{(i+1)!})=-\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{(i+1)!}-\frac{1}{i!})=-(\frac{1}{(n+1)!}-1)=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)(i-1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

(3) Hallar una fórmula para la sumatoria $\sum_{i=1}^{n}5^{i}$

Solución

Mediante la regla Telescópica se tiene: $\sum_{i=1}^{n}(5^{i+1}-5^{i})=f(n)-f(0)$ donde $f(i)=5^{i+1}$

$\sum_{i=1}^{n}(5.5^{i}-5^{i})=5^{n+1}-5$, simplificando $4\sum_{i=1}^{n}5^{i}=5(5^{n}-1)$

por lo tanto: $\sum_{i=1}^{n}5^{i}=\frac{5(5^{n}-1)}{4}$

(4) Hallar una fórmula para la sumatoria $\sum_{i=1}^{n}i.i!$

Solución

Aplicando la regla telescópica se tiene: $\sum_{i=1}^{n}[(i+1)!-i!]=f(n)-f(0)$ de donde f(i)=(i+1)!

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)i! \ -i!]=(n+1)!-1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i!.(i+1-1)=(n+1)! \ -1 \text{ de donde } \sum_{i=1}^{n} i.i!=(n+1)!-1$$

(5) Hallar una fórmula para la sumatoria $\sum_{i=1}^{n}\text{sen}(ix)$

Solución

Usando la identidad: $\cos A+\cos B=-2\,\text{sen}(\frac{A+B}{2})\,\text{sen}(\frac{A-B}{2})$ ... (1)

De donde haciendo la sustitución se tiene:

$$\begin{cases}\frac{A+B}{2}=ix \\ \frac{A-B}{2}=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A+B=2ix \\ A-B=2x\end{cases}$$ resolviendo el sistema:

A = (i + 1)x ; B = (i – 1)x ... (2)

Reemplazando (2) en (1) se tiene: cos (i + 1)x – cos (i – 1)x = -2 sen ix . sen x

aplicando la sumatoria a ambos miembros:

$$\sum_{i=1}^{n}[\cos(i+1)x-\cos(i-1)x]=-2\,\text{sen}\,x\sum_{i=1}^{n}\text{sen}(ix)$$

y mediante la segunda regla Telescópica se tiene:

$\cos(n+1)x+\cos(nx)-\cos x-1=-2\,\text{sen}\,x\sum_{i=1}^{n}\text{sen}(ix)$, despejando $\sum_{i=1}^{n}\text{sen}(ix)$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}\text{sen}(ix)=\frac{1+\cos x-\cos nx-\cos(n+1)x}{2\,\text{sen}\,x}$$

(6) Hallar una fórmula para la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{senh}(9ix)$

Solución

Mediante la segunda Regla Telescópica se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} [\cosh 9(i+1)x - \cosh 9(i-1)x] = \cosh 9(n+1)x + \cosh 9nx - \cosh 9x - 1$$

$$2\operatorname{senh}(9x)\sum_{i=1}^{n} \operatorname{senh}(9ix) = \cosh 9(n+1)x + \cosh(9nx) - \cosh 9x - 1$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} \operatorname{senh}(9ix) = \frac{\cosh 9(n+1)x + \cosh(9nx) - \cosh 9x - 1}{2\operatorname{senh}(9x)}$$

5.17. NOTACIÓN DEL PRODUCTO DE n NÚMEROS.-

Al producto de los n números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, es decir: $a_1.a_2.a_3....a_n$ representaremos por la notación:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1.a_2.a_3....a_n$$

que se lee el producto de los a_i desde i = 1 hasta i = n, donde a "1" se denomina limite inferior, a "n" se denomina limite superior y al símbolo π se llama "Pi" y es la letra mayúscula griega.

Ejemplo.- Hallar los 5 primeros números enteros positivos impares.

Solución

$$\prod_{i=1}^{5} a_i = \prod_{i=1}^{5} (2i-1) = 1.3.5.7.9 = 945$$

GENERALIZANDO.- Si f es una función definida para i ∈ Z, donde $1 \le i \le n$, la notación $\prod_{i=1}^{n} f(i)$ nos representa al producto de los términos f(1), f(2), f(3), ..., f(n), es decir:

$$\prod_{i=1}^{n} f(i) = f(1).f(2).f(3)...f(n)$$

donde i es el índice o variable, n es el limite superior.

Ejemplo.- Si $f(i) = \frac{i}{i+1}$, entonces: $\prod_{i=1}^{6} f(i) = \prod_{i=1}^{6} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\frac{5}{6}.\frac{6}{7} = \frac{1}{7}$

OBSERVACIONES.- Si m y n son enteros tal que m < n y a_i representa una expresión en i, entonces:

① $\prod_{i=m}^{n} a_i = (\prod_{i=m}^{n-1} a_i).a_n$

② $\prod_{i=m}^{m} a_i = a_m$

③ $\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m.a_{m+1}.a_{m+2}...a_n$

④ $\prod_{i=1}^{n} i = 1.2.3.4....n = n!$

5.17.1. TEOREMA.- $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i . \prod_{i=1}^{n} b_i$

Demostración

La demostración es por inducción.

Si n = 1, entonces por definición se obtiene: $\prod_{i=1}^{1} a_i b_i = a_1 . b_1 = \prod_{i=1}^{1} a_i . \prod_{i=1}^{1} b_i$

Si n = h, $\prod_{i=1}^{h} a_i b_i = \prod_{i=1}^{h} a_i . \prod_{i=1}^{h} b_i$ es verdadero por la hipótesis inductiva

Ahora probaremos para n = h + 1, en efecto:

$$\prod_{i=1}^{h+1} a_i b_i = (\prod_{i=1}^{h} a_i b_i).a_{h+1}.b_{h+1} = (\prod_{i=1}^{h} a_i).(\prod_{i=1}^{h} b_i).a_{h+1}.b_{h+1}$$

$$= (\prod_{i=1}^{h} a_i).a_{h+1}.(\prod_{i=1}^{h} b_i).b_{h+1} = \prod_{i=1}^{h+1} a_i.\prod_{i=1}^{h+1} b_i$$

por lo tanto, para todo entero positivo n.

$$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i.\prod_{i=1}^{n} b_i$$

5.17.2. TEOREMA.- Si c es una constante, entonces $\prod_{i=1}^{n} c = c^n$

Demostración

Sea $c = c_i$, para todo i, entonces $\prod_{i=1}^{n} c = \prod_{i=1}^{n} c_i$

Si n = 1, entonces por definición se tiene: $\prod_{i=1}^{1} c_i = c_1 = c = c^1$

Si n = h, $\prod_{i=1}^{h} c_i = c^h$ es verdadero por la hipótesis inductiva

Ahora probaremos para n = h + 1, en efecto: $\prod_{i=1}^{h+1} c_i = (\prod_{i=1}^{h} c_i).c_{h+1} = c^h.c = c^{h+1}$

por lo tanto: $\prod_{i=1}^{n} c_i = c^n$, esto es, para todo entero positivo n.

$$\prod_{i=1}^{n} c = c^n$$

5.17.3. TEOREMA.- Si c es una constante, entonces:

$$\prod_{i=1}^{n} ca_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Demostración

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

5.18. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Hallar el valor de las siguientes sumatorias.

① $\sum_{i=1}^{99} \ln 2^i$ **Rpta.** $4950 \ln 2$

② $\sum_{i=1}^{100} \ln(\frac{i}{i+2})$ **Rpta.** $\ln(\frac{2}{102})$

③ $\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2+2)$ **Rpta.** 133,560

④ $\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1)$ **Rpta.** 10,400

⑤ $\sum_{i=1}^{100} \text{sen}^{2i}(2x)$ **Rpta.** $\text{tg}^2(2x)(1-\text{sen}^{200} 2x)$

⑥ $\sum_{i=-2}^{3} 2^i$ **Rpta.** $\frac{63}{4}$

⑦ $\sum_{i=0}^{25} \frac{2}{2^{i-6}}$ **Rpta.** $2^7(2-\frac{1}{2^{25}})$

(8) $\sum_{i=20}^{40}\frac{360}{\sqrt{10}^{2x-32}}$ **Rpta.** $\frac{7.560}{(\sqrt{10})^{2x-32}}$

(9) $\sum_{i=14}^{50}(2i^2+i-1)$ **Rpta.** 85,359

(10) $\sum_{i=1}^{4}\frac{(-1)^{i+1}}{i}$ **Rpta.** $\frac{7}{12}$

II. Escriba en forma explícita las siguientes sumas:

(1) $\sum_{k=1}^{5}k$ (2) $\sum_{k=1}^{6}(7-k)$ (3) $\sum_{j=1}^{7}r^j$

(4) $\sum_{i=2}^{6}a^{2i}$ (5) $\sum_{k=1}^{4}r^{2k-1}$ (6) $\sum_{k=1}^{5}(k^2+3k)$

(7) $\sum_{k=1}^{5}[k-(k-1)]$ (8) $\sum_{k=1}^{5}[k^2-(k-1)^2]$ (9) $\sum_{k=1}^{5}[k^3-(k-1)^3]$

(10) $\sum_{k=1}^{5}(a_k-a_{k-1})$ (11) $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^4$ (12) $\sum_{k=1}^{8}(k+2)^4$

III. Hallar la fórmula para cada una de las siguientes sumatorias.

(1) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a+i-1)(a+i)}$ **Rpta.** $\frac{n}{a(n+a)}$

(2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i+1)(3i-2)}$ **Rpta.** $\frac{n}{3n+1}$

(3) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ **Rpta.** $\frac{n}{2n+1}$

④ $\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{(4i-3)(4i+1)}$ **Rpta.** $\frac{4n}{4n+1}$

⑤ $\sum_{i=1}^{n} \ln(i+1)$ **Rpta.** $\ln(n+1)!$

⑥ $\sum_{i=1}^{n} i.2^{i-1}$ **Rpta.** $(n-1)2^n+1$

⑦ $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$ **Rpta.** $2-\frac{2+n}{2^n}$

⑧ $\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{\sqrt{i^2+i}}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$

⑨ $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)(i^2+5i+6)}$ **Rpta.** $\frac{n^2+3n+3}{2(n+2)(n+3)}$

⑩ $\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i+1)(2i-1)}$ **Rpta.** $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

⑪ $\sum_{i=2}^{n} \frac{\ln(1+\frac{1}{i})^i(1+i)}{\ln(i^i)[\ln(1+i)^{1+i}]}$ **Rpta.** $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

⑫ $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}^{2i}(2x)$ **Rpta.** $\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{sen}^{2n}(2x))$

⑬ $\sum_{i=1}^{n} \cos(3ix)$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{sen}(3n+3)x+\operatorname{sen}(3nx)-\operatorname{sen}3x}{2\operatorname{sen}x}$

⑭ $\sum_{i=1}^{n} \cos^i 2x$ **Rpta.** $\frac{\operatorname{sen}^{n+1}(2x)}{2^{n+1}\operatorname{sen}x}$

(15) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i + i(i+1)}{2^{i+1}(i^2+i)}$ **Rpta.** $1 - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2^{n+1}}$

IV. Pruébese cada una de las siguientes fórmulas por inducción matemática.

(1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = n^3$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k.2^{k-1} = 1 + (n-1)2^n$

(4) $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2\operatorname{sen} x}$

(5) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)$

(6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

V.

(1) Pruébese que: $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(2k-1)x = \frac{1-\cos(2nx)}{2\operatorname{sen} x}$

(2) Pruébese que: $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$

(3) Pruébese que: sí $a_k \le b_k$, k = 1,2,3,...,n; implica $\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k$

(4) Pruébese que: $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

(5) Hallar el valor de n para que: $\sum_{i=1}^{n} (2+i^2) = \sum_{i=1}^{n} (1+i^2)$

6) Si $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, demostrar que $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i$

VI.

1) Calcular los valores de las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$ b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{3^{k-1}}$

2) Encontrar en términos de n el valor de:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ d) $\sum_{k=1}^{n} (2^{k-1} + 3^{k-1})$

e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$ f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}$

3) Si $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1.a_2.a_3 \dots a_n$, evaluar

a) $\prod_{i=1}^{n} a^i$ b) $\prod_{i=1}^{n} a^{i(i+1)}$

c) $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1}}$ d) $\prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{(i+1)^2})$

(4) Si $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1.a_2.a_3...a_n$, pruébese que:

a) $\prod_{i=1}^{n} (a^i)^2 = (\prod_{i=1}^{n} a^i)^2$

b) $\prod_{k=2}^{2n+1} (1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n+1}$

c) $\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \geq \prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i$

(5) Obtenga la suma de $\sum_{i=1}^{41} (\sqrt[3]{3i-1} - \sqrt[3]{3i+2})$

(6) Si $\sum_{k=0}^{10} (Ak - B) = 22$ y $\sum_{k=3}^{12} (Ak - \frac{11}{10}B) = 62$, Hallar A + B

(7) Sí $\sum_{i=1}^{n} (i^2 - \frac{n}{3} - \frac{i}{3}) = 72$. Hallar el valor de n

(8) Si $\sum_{i=-1}^{5} (ai + b) = 7$ y $\sum_{i=1}^{5} (ai + b) = 20$. Hallar a – b.

(9) Determinar a y b sí: $\sum_{k=0}^{4} (ak + b) = 10$ y $\sum_{i=1}^{4} (ai + b) = 14$

(10) Sean A y B números enteros positivos tales que sí:

$\sum_{i=1}^{A} (i^2 - \frac{A}{3} - \frac{i}{3}) = 1944$ y $\sum_{i=1}^{B} (2i - 1) = 1024$. Hallar A + B

(11) Demostrar los siguientes ejercicios:

a) $\prod_{i=1}^{n} [f(i)]^m = [\prod_{i=1}^{n} f(i)]^m$

b) $\prod_{i=1}^{n} cf(i) = c^n \prod_{i=1}^{n} f(i)$

c) $\prod_{i=1}^{n+1} f(i) = f(n+1).\prod_{i=1}^{n} f(i)$ d) $\prod_{i=1}^{n} f(i).g(i) = \prod_{i=1}^{n} f(i).\prod_{i=1}^{n} g(i)$

e) $\prod_{i=1}^{n-1} f(i) = \prod_{i=1}^{n} f(i-1)$ f) $\prod_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{f(i-1)} = \frac{f(n)}{f(0)}$

g) $\sum_{i=1}^{n} \log_b f(i) = \log_b (\prod_{i=1}^{n} f(i))$

5.19. DIVISIBILIDAD EN Z.-

5.19.1. NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS.-

Un número entero "a" es múltiplo de otro número entero "b" si existe un número entero "c" tal que a = b.c, de donde se dice que b y c son factores o divisores de "a" y que "a" e s múltiplo de b y c.

Ejemplo.- Como 3 x 5 = 15, el número 3 es un factor o divisor de 15 y el 15 es un múltiplo de 3.

También 5 s un factor o divisor de 15 y el 15 es un múltiplo de 5.

El número 15 también tiene otros factores o divisores, por ejemplo –3 y –5 puesto que (-3)(5) = 15.

NOTACIÓN.- Usaremos el símbolo $b|a$ para indicar que "b" es un factor o divisor de "a".

Si b no es un factor de "a" escribiremos $b \nmid a$.

i) **DEFINICIÓN.-** Un número entero diferente de cero y de uno, es un número primo si tiene únicamente dos divisores; la unidad y al mismo número.

Ejemplos.-

(1) 5 es número primo, porque sus únicos divisores son 1 y 5.

(2) 11 es número primo, porque sus únicos divisores son 1 y 11.

ii) DEFINICIÓN.- Un número entero es compuesto si tiene más de dos divisores.

Ejemplos.-

(1) 4 es un número compuesto, puesto que tiene como divisores a 1, 2 y 4.

(2) 6 es un número compuesto, puesto que tiene como divisores a 1, 2, 3 y 6.

(3) 8 es un número compuesto, puesto que tiene como divisores a 1, 2, 4 y 8.

iii) DEFINICIÓN.- Sean a ≠ 0, a ∈ Z, el número a "divide" al número b y escribiremos así:

$$a|b \Leftrightarrow \exists\, c \in Z \,/\, b = a.c$$

NOTA.- (1) $a|b$ significa a ≠ 0, a divide a b.

(2) Caso contrario $a \nmid b$

(3) Si: $a|b$ diremos "a número factor de b" o "a es un divisor de b" o " b es divisible por a".

Ejemplo.- (1) $3|-12$ puesto que existe c = -4 ∈ Z tal que -12 = (-4).3

(2) 5 | 15 puesto que existe c = 3 ∈ Z tal que 15 = 5(3).

(3) $3 \nmid 16$ puesto que no existe c ∈ Z tal que 16 = 3c $(\exists\, c = \frac{16}{3} \notin Z)$.

Ejemplos.- (1) 1 | a, ∀ a ∈ Z, puesto que existe c = a / a = a.1.

(2) a | a, ∀ a ≠ 0, a ∈ Z, puesto que existe c = 1 / a = a.1.

(3) a | a, ∀ a ≠ 0, a ∈ Z, puesto que existe c = 0 / 0 = a.0.

5.19.2. TEOREMA.-

① Si $a \mid b$ y $c \in Z$ entonces $a \mid bc$.

Demostración

1ro. $a \mid b$ hipótesis

2do. $\exists\, k \in Z \,/\, b = ka$ 1ro. y definición iii)

3ro. $\forall\, c \in Z \,/\, bc = (ka)\,c$ (propiedad en R)

4to. $bc = a(kc), \forall\, c \in Z$ (propiedad asociativa)

5to. Sea $\lambda = kc \in Z$ entonces $bc = \lambda a$

6to. $a \mid bc$ 5to. definición iii)

② $a \mid b \;\wedge\; b \mid c$ entonces $a \mid c$

Demostración

1ro. $a \mid b \;\wedge\; a \mid c$ hipótesis

2do. $\exists\, k_1, k_2 \in Z \,/\, b = ak_1 \;\wedge\; c = ak_2$ 1ro. y definición iii)

3ro. $b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2)$ 2do. propiedad distributiva

4to. Sea $k = k_1 + k_2 \in Z \;\Rightarrow\; b + c = ak$

5to. $a \mid b + c$, 4to. definición iii)

③ $a \mid b \;\wedge\; a \mid c$ entonces $a \mid bx + cy,\; \forall\, x,y \in Z$

Se deja como ejercicio.

④ $a \mid b \;\wedge\; b \mid a$ entonces $a = \pm b$

Se deja como ejercicio.

⑤ $a, b \in Z^+ \;\wedge\; a \mid b$ entonces $a \leq b$

Se deja como ejercicio.

5.19.3. TEOREMA.- (ALGORITMO DE LA DIVISIÓN O TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA DIVISIÓN)

Dado $a, b \in Z$, con $b \neq 0$ entonces $\exists\, q, r \in Z$, tales que $a = bq + r$, con $0 \leq r < |b|$.

Demostración

1er caso: Si $b > 0$

(1) Sea $A = \{a - bx \,/\, x \in Z \wedge a - bx \geq 0\}$, construcción.

(2) $A \neq \phi$, pues si $a \geq 0 \wedge x = 0$ de donde $a - bx = a \geq 0$ entonces $a \in A$

Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0$ y además $b > 0$ por hipótesis

$\therefore\ \exists\, x \in Z^+ \,/\, -a \leq bx$ (propiedad Arquimediana)

$\Rightarrow\ \exists\, x \in Z^+ \,/\, a \geq -bx \Rightarrow a \geq b(-x)$

entonces $\exists\, x \in Z^+ \,/\, a - b(-x) \geq 0 \Rightarrow \exists\, a - b(-x) \in A \Rightarrow A \neq 0$

(3) Entonces $A \subset N \wedge A \neq \phi$ de (1) y (2)

(4) $\exists$ r = 1er elemento de A (del 3) y propiedad del buen orden en N.

(5) $r \in A$, luego $r = a - bx_0$ para algún $x_0 \in A$ (definición de A)

(6) $\exists\, x_0, r \in Z \,/\, a = bx_0 + r$, con $r \geq 0$ (pues $r \in A \subset N$) falta demostrar que $r < b$, por contradicción.

(7) Supongamos que $r \geq b$ (hipótesis auxiliar)

(8) $r = a - bx_0 \geq b$ de 5) y 7)

(9) $r - b = a - bx_0 - b \geq 0$ (restando b)

(10) $r - b = a - b(x_0 + 1) \geq 0$, luego $r - b \in A$ (definición de A)

(11) Pero $r - b < r$ (pues $b > 0$) $\wedge$ $r - b \in A$ entonces r no es el 1er elemento de A $\Rightarrow // \Leftarrow$ (4)

(12) Luego debe cumplirse que $r < b$ de 11) y 7)

(13) Así dados $a, b \in Z$, $b \neq 0$, $\exists\ q = x_0$, $r \in Z$ tal que $a = bq + r$ con $0 \leq r < b$ de 6) y 12)

2do. Caso.- Si $b < 0$

(14) Si $b < 0$ entonces $-b > 0$ (propiedad de números reales)

(15) $\exists\ q, r \in Z / a = (-b)\, q + r$ con $0 \leq r < -b$ (parte 1er caso)

(16) $\exists\ -q, r \in Z / a = b(-q) + r$ con $0 \leq r < |b|$

(17) Dados $a, b \in Z$ con $b \neq 0$, $\exists\ q, r \in Z\ /\ a = bq + r$ como $0 \leq r < |b|$ de 13) y 16) falta probar la unicidad de q y r.

(18) Suponiendo que existen otros $q_1, r_1 \in Z$ tal que $a = bq_1 + r_1$ con $0 \leq r_1 < |b|$ y además supongamos que $r_1 > r$ (hipótesis auxiliar).

Entonces tenemos: $a = bq + r = bq_1 + r_1$ de 17) y de la hipótesis auxiliar

$b(q - q_1) = r_1 - r > 0$ (restando) $\Rightarrow$ $b \mid r_1 - r$ definición iii)

$\Rightarrow$ $|b| \mid r_1 - r$ (propiedad de la división) $\Rightarrow$ $|b| \leq r_1 - r$ ... (α)

de 18) $\Rightarrow$ $0 \leq r_1 - r < |b| - r \leq |b|$ (pues $r > 0$)

$\Rightarrow r_1 - r < |b|$ ... (β) $\Rightarrow // \Leftarrow$ (α)

debe ser $r_1 = r$, como $b(q - q_1) = r_1 - r = 0$ $\Rightarrow$ $q = q_1$

OBSERVACIÓN.- Si en el teorema anterior $r = 0$, se tiene $a = bq$, en este caso se dice que la división es exacta, y también se dice que no hay residuo y además $r_{minimo} = 1$, $r_{máximo} = b - 1$

NOTA.- (1) Si $a = bq$, si y solo si $b \mid a$ si y solo si $r = 0$.

(2) Si $r \neq 0$, $a = bq + r$ con $0 < r < b$ $\Rightarrow$ $b \nmid a$

5.20. MÁXIMO COMUN DIVISOR: M.C.D.-

Los divisores comunes de varios números son los números que dividen exactamente a todos, es decir: un número $n > 1$ es divisor común de M y N si n divide a M y también n divide a N.

Ejemplo.- Hallar los divisores de 28 y 36 por separado, es decir:

Número	Divisores
28	2 , 4 , 7 , 14 , 28
36	2 , 4 , 6 , 9 , 12 , 18 , 36

Los divisores comunes simultáneos son 2 y 4

Luego el máximo común divisor de 28 y 36 es 4, es decir que es el mayor de los divisores comunes.

5.20.1. DEFINICIÓN.- Sean a, $b \in Z$ no nulos simultáneamente.

El número $D > 0$ se llama máximo común divisor (D = (ab)) si y solo si D satisface las propiedades:

i) $D \mid a \wedge D \mid b$

ii) $d \mid a \wedge d \mid b$ entonces $d \mid D$: d = algún número.

NOTA.- ① $(0,0) = 0$

② Si D existe $\Rightarrow$ D es único es decir:

Si $D = (a,b)$ y $D_1 = (a,b)$ entonces

$$\begin{cases} D \mid a \text{ y } D \mid b \Rightarrow D \mid D_1 \\ D_1 \mid a \text{ y } D_1 \mid b \Rightarrow D_1 \mid D \end{cases}$$

entonces $D_1 = \pm D \quad \Rightarrow \quad D_1 = D$ (pues $D > 0$)

NOTA.- Máximo común divisor = M.C.D. de a y b = (a,b)

Ejemplo.- $(8,12) = 4$

5.20.2. LEMA 1.- (a,b) = (b,a)

Demostración

1ro. Sean (a,b) = D y $(b,a) = D_1$ (construcción)

2do. D | a ∧ D | b de 1ro y definición de M.C.D.

3ro. D | b ∧ D | a de 2do y tautología

4to. D | (b,a) es decir $D \mid D_1$ condición ii) de M.C.D.

5to. $D_1 \mid b \wedge D_1 \mid a$ de 1ro. definición M.C.D.

6to. $D_1 \mid a \wedge D_1 \mid b$ de 5to y tautología.

7mo. $D_1 \mid (a,b)$ es decir $D_1 \mid D$ de 6to y condición ii) de M.C.D.

8vo. $D = D_1$ de 4to. y 7mo.

5.20.3. LEMA 2.- (a,b) = (a,-b)

Demostración

La demostración es similar al lema 1, se deja como ejercicio.

5.20.4. TEOREMA.- Sean a, b en Z no ceros simultáneamente entonces $\exists\, n_0, m_0$ en Z / $D = n_0 a + m_0 b$; D = (a,b)

Demostración

1ro. Sean a y b enteros positivos (por el lema anterior, siempre se puede tener a y b enteros positivos).

2do. Sea A = {an + bm / n, m ∈ Z ∧ an + bm > 0} (construcción)

3ro. A ⊂ N (de la definición de A en 2do)

4to. A ≠ ϕ hasta considerar a + b ∈ A

5to. $\exists\, D_1 = an_0 + bm_0$, 1er elemento de A de 3er y 4to y axioma del buen orden.

6to. D = (a,b) hipótesis

7mo. D | a $\wedge$ D | b 6 to definición de M.C.D.

8vo. $D \mid an_0 + bm_0$ 7mo y propiedad de la divisibilidad

9no. $D \mid D_1$ 5to y 8vo.

Probaremos que $D_1 \mid D$ por contradicción

10mo. Suponiendo que $D_1 \nmid D$ (hipótesis auxiliar)

11vo. $a = D_1 q + r$ con $0 < r < D_1$ (teorema de la división)

12vo. $r = a - D_1 q = a - (an_0 + bm_0)q$ 8vo y 11vo

13vo. $r = a(1 - qn_0) + b(-qm_0) = an' + bm'$ 12vo

14vo. r $\in$ A (13vo y 4to y definición de A en 2do)

15vo. $r \geq D_1$ (D_1 es 1er elemento de A en 5to)

de donde $\Rightarrow \Leftarrow$ 11vo y 15vo

16vo. Luego debe cumplirse $D_1 \mid b$ de 10mo y 15vo

17vo. En la misma forma $D_1 \mid b$ (repetir los pasos 11vo al 16vo)

18vo. $D_1 \mid (a,b)$ de 16vo y 17vo y condición ii) de M.C.D.

19mo. $D_1 \mid D$ 18vo y 6to

20vo. $D = D_1$ es decir: $D = an_0 + bm_0$

COROLARIO 1.- D = el M.C.D. de a y b es el menor entero positivo de la forma an + bm, con n,m $\in$ Z.

Demostración

Es inmediato del 5to paso del teorema anterior

COROLARIO 2.- Si m > 0 entonces (ma,mb) = m(a,b)

Demostración

Aplicando el corolario (1) se tiene:

$D = (ma, mb) = (ma)n_0 + (mb)m_0 = m(an_0 + bm_0)$

= m(a,b) por el corolario 1

$\therefore$ (ma,mb) = m(a,b)

COROLARIO 3.- Si $D > 0 \wedge D \mid a \wedge D \mid b$ entonces: $(\frac{a}{D}, \frac{b}{D}) = \frac{1}{D}(a,b)$

Demostración

1ro.	$D \mid a \wedge D \mid b$	(hipótesis)
2do.	$\exists\ x, y \in Z \ / \ a = Dx\ ;\ b = Dy$	1ro y definición iii)
3ro.	(a,b) = (Dx,Dy) = D(x,y)	Corolario 2
4to.	$x = \frac{a}{D},\ y = \frac{b}{D}$	de 2do.
5to.	$(x, y) = \frac{1}{D}(a,b)$	de 3ro.
6to.	$(\frac{a}{D}, \frac{b}{D}) = \frac{1}{D}(a,b)$	de 4to y 5to

5.20.5. DEFINICIÓN.- Sean a, b ∈ Z no ceros simultáneamente: a y b son "prímos entre si" o "coprimos" si y solo si (a,b) = 1.

Ejemplo.- (4,15) = 1 entonces 4 y 15 son prímos entre si, además 4 y 30 no son prímos entre si puesto que (4,30) ≠ 1

5.20.6. DEFINICIÓN.- $a_1, a_2, ..., a_n \in Z$ son prímos entre sí, sí y sólo si $(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$

5.20.7. DEFINICIÓN.- $a_1, a_2, ..., a_n$ son prímos entre si 2 a 2 si y solo si $(a_i, a_j) = 1$, $\forall$ i ≠ j

Ejemplo.- 4, 10, 15 son prímos entre si puesto que (4,10,15) = 1, pero 4, 10, 15 no son prímos entre si 2 a 2 puesto que (4,10) ≠ 1, (10,15) ≠ 1

Ejemplo.- 4, 9, 5 y 77 son prímos entre si 2 a 2.

5.21. LEMA.-

Si a = bq + r, entonces (a,b) = (b,r)

Demostración

1ro.	a = br + r	hipótesis
2do.	Sean D = (a,b), $D_1 = (b, r)$	notación
3ro.	D | a $\wedge$ D | b	2do definición M.C.D.
4to.	D | b $\wedge$ D | r	(combinación a | b $\wedge$ a | c $\Rightarrow$ a | bx + cy de 1ro y teorema 5.20.4)
5to.	$D \mid D_1$	4to y 2do y definición M.C.D.
6to.	$D_1 \mid b \wedge D_1 \mid r$	2do y definición M.C.D.
7mo.	$D_1 \mid a \wedge D_1 \mid b$	(igual que el 4to paso)
8vo.	$D_1 \mid D$	7mo y 2do definición M.C.D.
9no.	$D = D_1$	5to y 8vo puesto que $D, D_1 \in Z^+$
10mo.	Luego (a,b) = (b,r)	2do y 9no.

Ejemplo.- Calcular (1348,72)

Solución

```
1348 | 72
 72    18
----
 628
 576
----
  52
```

$\therefore$ $1348 = 72 \times 18 + 52$

$(1348,72) = (72,52) = 4$

5.22. MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO.-

5.22.1. DEFINICIÓN.- Sean a, b $\in$ Z no nulos, M > 0, M es el mínimo común múltiplo de a y b denotado por M = [a,b] si y solo si satisface las propiedades.

i) $a \mid M$ y $b \mid M$ **ii)** $a \mid m$ y $b \mid m \Rightarrow M \mid m$

OBSERVACIÓN.- Si existe M = [a,b] $\Rightarrow$ M es único.

En efecto: Si M = [a,b] y $M_1 = [a,b]$

Entonces $\begin{cases} a \mid M \;\wedge\; b \mid M \\ a \mid M_1 \;\wedge\; b \mid M_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} M_1 \mid M \\ M \mid M_1 \end{matrix} \Rightarrow M = M_1$

NOTACIÓN.-

(1) M = [a,b] = es el mínimo común múltiplo de a y b.

(2) $M = [a_1, a_2, ..., a_n]$ es el mínimo común múltiplo de $a_1, a_2, ..., a_n$.

Ejemplo.- $[8,12] = 24$

5.22.2. TEOREMA.-

(1) Si b es un múltiplo de $a_1, a_2, ..., a_n$, entonces $[a_1, a_2, ..., a_n] \mid b$

(2) $(a,b)\,[a,b] = \lvert ab \rvert$, $\forall$ a,b $\in$ Z

(3) $[ka,kb] = k[a,b]$, $\forall\, k \in Z^+$

(4) Si $D \mid a \wedge D \mid b$ entonces $[\frac{a}{D}, \frac{b}{D}] = \frac{1}{D}[a,b]$, $D > 0$.

Demostración

Queda como ejercicio.

5.23. REGLA PARA AVERIGUAR SI UN NÚMERO DADO ES PRÍMO.-

La forma práctica para saber si un número es prímo es la siguiente:

1ro. Se extrae la raíz cuadrada del número dado, tomando solo la parte entera.

2do. Se divide el número dado entre todos los números prímos menores o iguales a la raíz entera.

3ro. Si todos los divisores efectuadas son inexactas, el número dado es prímo.

Ejemplo.- Averiguar si los números dados son prímos.

(1) 97

Solución

1ro. Sacamos la raíz cuadrada $\sqrt{97} \approx 9$

2do. Los números prímos menores que 9 son: 2, 3, 5, 7 y dividimos:

97	2		97	3		97	5		97	7
17	48	,	7	32	,	47	19	,	27	13
1			1			2			6	

3ro. Como todas las divisiones son inexactas entonces el número 97 es prímo.

(2) 149

Solución

1ro. Sacamos la raíz cuadrada: $\sqrt{94} \approx 12$

2do. Los números prímos menores que 12 son: 2, 3, 5, 7, 11 y dividimos así:

$$\begin{array}{r|l} 149 & 2 \\ \hline 1 & 74 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r|l} 149 & 3 \\ \hline 29 & 49 \\ 2 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r|l} 149 & 5 \\ \hline 49 & 29 \\ 4 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r|l} 149 & 7 \\ \hline 2 & 21 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r|l} 149 & 11 \\ \hline 39 & 13 \\ 6 & \end{array}$$

3ro. Como todas las divisiones son inexactas, entonces el número 149 es primo.

5.24. CRIBA DE ERASTÓSTENES.-

Es una manera de formar la tabla de los números primos que no son mayores que 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- En la tabla suprimimos el 1 porque no es primo.
- Se toma el 2 el primer primo (porque es divisible por la unidad y por si mismo).
- Se suprime en la tabla todos los múltiplos de 2 excepto el 2.
- De los que no hemos suprimido, el primer número es 3 que es primo.
- Suprimimos en la tabla todos los múltiplos de 3 excepto el mismo 3.
- El primer número no suprimido es 5 que también es primo.
- Suprimimos en la tabla todos los múltiplos de 5 excepto el mismo 5 y así sucesivamente.
- Todos los números no suprimidos serán primos.

5.25. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Demostrar que si a y b son enteros positivos tales que $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$.

2. Si $a, b \in Z$, Demostrar que: si $a \mid b$ y $b \mid a \Rightarrow b = \pm a$

3. Demostrar que si $a, b \in Z$, entonces $a \mid bx + cy$

4. Si $a \mid 1$ entonces $a = \pm 1$

5. Si $a, b \in Z$, entonces si $a \mid b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$

6. Si $a \mid b.c \Rightarrow a \mid |b| c$, para $a, b, c \in Z$

7. Si $c \mid ab$ y $(b,c) = 1$, entonces $c \mid a$

8. Si $(a,m) = (b,m) = 1$, entonces $(ab,m) = 1$

9. Demostrar que si $ac \mid bc$ entonces $a \mid b$

10. Dado $a \mid b$ y $c \mid d$. probar que $ac \mid bd$

11. Demostrar que: Si $b \mid c$ y $(a,c) = 1$, entonces $(a,b) = 1$.

12. Dado que $(a,4) = 2$ y $(b,4) = 2$ probar que $(a + b, 4) = 2$.

13. Probar que si $(b,c) = 1$ y $r \mid b$ entonces $(r,c) = 1$.

14. Demostrar que: si $b \mid c$, entonces $(a,b) = (a + c, b)$

15. Demostrar que: si $(a,c) = 1$, entonces $(a,b) = (a, bc)$

16. Demostrar que: si $a \mid c$ y $b \mid c$ y $(a,b) = 1$, entonces $ab \mid c$

17. Demostrar que: si $(b,c) = 1$, entonces $(a,bc) = (a,b).(a,c)$.

18. Demostrar que: si $(a,bc) = 1$ entonces $(a,b) = 1$ y $(a,c) = 1$.

19. Probar que $(a^2,b^2) = c^2$ si $(a,b) = c$.

20. Probar que: si $(a,b) = (a,c)$, entonces $(a^2,b^2) = (a^2,c^2)$

(21) Probar que: si (a,b) = (a,c) entonces (a,b) = (a,b,c)

(22) Probar que: si $a^3 | c^3$, entonces a | c

(23) Probar que: si $b | a^2 - 1$, entonces $b | a^4 - 1$

(24) Probar que si a y b son enteros positivos que satisfacen (a,b) = [a,b], entonces a = b

(25) Encontrar los enteros positivos a y b que satisfacen simultáneamente las ecuaciones (a,b) = 10 y [a,b] = 100, encontrar todas las soluciones.

5.26. LA FUNCIÓN FACTORIAL.-

a) **DEFINICIÓN.-** La función factorial es la aplicación $f: N_0 \to N$ definida por:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=1 \\ f(h+1)=(h+1)f(h) \quad \text{si} \quad h>1 \end{cases}$$

el símbolo característico de la función factorial es !, en lugar de f escribiremos h! para indicar f(h) por lo tanto:

$$\begin{cases} 0!=1 \\ 1!=1 \\ (h+1)!=(h+1).h! \end{cases}$$

La expresión h! se lee "factorial de h" ó "h factorial".

La función factorial no es inyectiva, puesto que: $0 \neq 1$ y 0! = 1!

b) **PROPIEDADES DEL FACTORIAL.-**

(1) $\forall$ n $\in$ N, n $\geq$ 2, el factorial de n es dado por: $n! = 1.2.3...n = \prod_{i=1}^{n} i$

(2) (n + 1)! = n! (n + 1) Propiedad degradativa

(3) Sí a! = b! $\Rightarrow$ a = b, a,b $\in$ N

(4) Sí a! = 1 $\Rightarrow$ a = 1 $\vee$ a = 0

(5) $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$, $n \in N$

(6) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

También se expresa: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

(7) Sean n!!, n $\in$ N, entonces: **n!! = n(n − 2)!! Propiedad degradativa de los semifactoriales.**

(8) Producto de semifactoriales y el factorial:

a) $(2n)!! = 2^n n!$ b) $(2n+1)!! = \dfrac{(2n+1)!}{2^n (n)!}$, $n \in N$

Ejemplo.- Verificar la igualdad: $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Solución

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{n!(n+1)} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\therefore \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

5.27. NÚMEROS COMBINATORIOS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Consideremos n y k números enteros positivos tales que $n \geq k$, llamaremos números combinatorios n sobre k, al símbolo $\dbinom{n}{k}$ definido por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Los elementos de un número combinatorio se llaman numerador y denominador.

Ejemplo.- $\binom{9}{5}=\dfrac{9!}{5!(9-5)!}=\dfrac{5!.6.7.8.9}{5!.4!}=\dfrac{6.7.8.9}{1.2.3.4}=7.2.9=126$

b) CASOS ESPECIALES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS.-

① $\binom{0}{0}=\dfrac{0!}{0!(0-0!)!}=\dfrac{0!}{0!.0!}=1$

② $\binom{n}{1}=\dfrac{n!}{1!(n-1)!}=\dfrac{(n-1)!n}{(n-1)!}=n$

③ $\binom{n}{0}=\dfrac{n!}{0!(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$

④ $\binom{n}{n}=\dfrac{n!}{n!.0!}=\dfrac{n!}{n!}=1$

⑤ $\binom{n+1}{n}=\dfrac{(n+1)!}{n!(n+1-n)!}=\dfrac{(n+1)!}{n!}=\dfrac{n!(n+1)}{n!}=n+1$

c) PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS.-

Si dos números combinatorios de igual numerador son tales que la suma de sus denominadores coinciden con aquel, se llama números combinatorios de ordenes complementarios.

Ejemplos.- $\binom{9}{4}$ y $\binom{9}{5}$ son números combinatorios de ordenes complementarios.

① Dos números combinatorios de ordenes complementarias son iguales.

$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. En efecto: $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{n-k}$

② La suma de dos números combinatorios es en general un número combinatorio, pero si tiene igual numerador y denominador consecutivos vale la fórmula

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

En efecto:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

$$=\frac{k(n-1)!}{(k-1)!k(n-k)!}+\frac{(n-k).(n-1)!}{k!(n-k).(n-1-k)!}=\frac{k.(n-1)!}{k!.(n-k)!}+\frac{(n-k).(n-1)!}{k!.(n-k)!}$$

$$=\frac{(k+n-k).(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n.(n-1)!}{k!.(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Ejemplo.- Si $\binom{32}{x}=\binom{32}{x+18}$, Hallar el valor de $E=\binom{x}{4}+\binom{x}{5}$

Solución

$\binom{32}{x}=\binom{32}{x+18}$ de donde x + (x + 18) = 32

por lo tanto x = 7 entonces

$$E=\binom{7}{4}+\binom{7}{5}=\frac{7!}{(7-4)!4!}+\frac{7!}{(7-5)!5!}$$

$$=\frac{4!.5.6.7}{3!.4!}+\frac{7!}{2!.5!}=\frac{5.6.7}{6}+\frac{5!.6.7}{2.5!}=5.7+\frac{6.7}{2}=35+21=56$$

5.28. PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES BINOMIALES.-

① $\binom{n}{n}=1,\ n\in N$

② $\binom{n}{k}=0$ sí $n, k\in N,\ n<k$

③ $\binom{n}{0}=1,\ n\in R$

④ $\binom{n}{1}=n,\ n\in R$

⑤ Propiedad de los coeficientes binomiales complementarios: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $n\geq k,\ n,k\in N$

6 Suma de pares de coeficientes binomiales: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$, si k ∈ N, n ∈ R

7 Suma de los coeficientes binomiales de inferiores iguales y superiores decrecientes.

$$\binom{m}{n}+\binom{m-1}{n}+\binom{m-2}{n}+...+\binom{n}{n}=\binom{m+1}{n+1};\ n \in N$$

8 Suma equivalente en la versión de complemento:

$$\binom{m}{m-n}+\binom{m-1}{m-n-1}+\binom{m-2}{m-n-2}+...+\binom{n}{0}=\binom{m+1}{n+1},\ n \in N$$

9 $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+...+\binom{m}{n}=2^m$, m ∈ N

10 $\binom{m}{1}-\binom{m}{3}+\binom{m}{5}-\binom{m}{7}+...\pm\binom{m}{m-1}=2^{m-1}$, m ∈ N, pares

11 $\binom{m}{0}+\binom{m}{2}+\binom{m}{4}+\binom{m}{6}+...+\binom{m}{m-1}=2^{m-1}$, m ∈ N, impares

12 $\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}-\binom{m}{4}+...\pm\binom{m}{m}=0$, m ∈ N

13 $\binom{m}{p}\binom{n}{0}+\binom{m}{p-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{p-2}\binom{n}{2}+...+\binom{m}{0}\binom{n}{p}=\binom{m+n}{p}$ donde m, n, p ∈ N

14 Igualdad de coeficientes binomiales: $\binom{a}{b}=\binom{p}{q}\Rightarrow\begin{cases}a=p \wedge b=q\ ,\ b,q\in N\\ \quad\vee\\ a=p \wedge b+q=a=p,\ a,b,p,q\in N\end{cases}$

15 Propiedades degradatividad de los coeficientes binomiales:

$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, degraden el superior e inferior, n ∈ R, k ∈ N

$\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$, degrada únicamente el superior, $n\in R$, $k\in N$

$\binom{n}{k}=\frac{n-(k-1)}{k}\binom{n}{k-1}$ degrada únicamente el inferior, $n\in R$, $k\in N$

5.29. EL TRIANGULO DE BLAISE PASCAL O DE TARTAGLIA.-

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

Los elementos equidistantes de cada fila son iguales

5.30. POTENCIAS DE UN BINOMIO.-

a) **BINOMIO DE NEWTON.-** Una aplicación de los números combinatorios se presenta en el desarrollo de la potencia de un binomio con exponente natural que se conoce con el nombre de binomio de Newton que está dado por:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}a^0 b^n$$

mediante el símbolo de la sumatoria, se expresa:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

El binomio de Newton se demuestra por inducción matemática:

i) Para n = 1 se tiene: $a+b=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^{k}=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}a^{1-1}b=a+b$

ii) Para n = h se tiene: $(a+b)^{n}=\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}a^{h-k}b^{k}$, es verdadero por la hipótesis inductiva.

iii) Para n = h + 1, demostraremos que: $(a+b)^{h+1}=\sum_{k=0}^{h+1}\binom{h+1}{k}a^{(h+1)-k}b^{k}$

En efecto se tiene:

$$(a+b)^{h+1}=(a+b)^{h}(a+b)=(\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}a^{h-k}b^{k})(a+b)$$

$$=a\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}a^{h-k}b^{k}+b\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}a^{h-k}b^{k}=\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}a^{h+1-k}b^{k}+\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}a^{h-k}b^{k+1}$$

$$=\binom{h}{0}a^{h+1}+\sum_{k=1}^{h}\binom{h}{k}a^{h+1-k}b^{k}+\sum_{k=1}^{h+1}\binom{h}{k-1}a^{h-k+1}b^{k}$$

$$=\binom{h}{0}a^{h+1}+\binom{h}{h}b^{h+1}+\sum_{k=1}^{h}\binom{h}{k}a^{h+1-k}b^{k}+\sum_{k=1}^{h}\binom{h}{k-1}a^{h+1-k}b^{k}$$

$$=\binom{h+1}{0}a^{h+1}+\binom{h}{h}b^{h+1}+\sum_{k=1}^{h}[\binom{h}{h}+\binom{h}{k-1}]a^{h+1-k}b^{k}$$

$$=\binom{h+1}{0}a^{h+1}+\sum_{k=1}^{h}\binom{h+1}{k}a^{h+1-k}b^{k}+\binom{h+1}{h+1}b^{h+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{h+1}\binom{h+1}{k}a^{h+1-k}b^{k}$$ (propiedades de N° combinatorios)

OBSERVACIÓN.- En el desarrollo del binomio de Newton se tiene:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+...+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+...+\binom{n}{n}b^n$$ donde

se tiene:

$\binom{n}{0}$ es el coeficiente del primer término

$\binom{n}{1}$ es el coeficiente del segundo término

$\binom{n}{k}$ es el coeficiente del k + 1, término

de donde él término que ocupa el lugar k + 1 es: $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

esta fórmula nos permite obtener un término cualquiera sin necesidad de conocer los anteriores.

Ejemplo.-

① Hallar el coeficiente del término independiente de x en el desarrollo de $(x^8-\frac{1}{x^4})^{12}$

Solución

$$(x^8-\frac{1}{x^4})^{12}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(x^8)^{12-k}(-x^{-4})^k=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-1)^k x^{96-12k}$$

Él término independiente corresponde a 96 – 12k = 0 de donde k = 8 luego el coeficiente es: $(-1)^k\binom{12}{k}=(-1)^8\binom{12}{8}=\frac{12!}{8!(12-8)!}=495$

② Hallar el desarrollo del binomio $(x^2y+\frac{2}{x})^5$

Solución

$$(x^2y+\frac{2}{x})^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(x^2y)^{5-k}(\frac{2}{x})^k$$

$$=\binom{5}{0}(x^2y)^5+\binom{5}{1}(x^2y)^4(\frac{2}{x})+\binom{5}{2}(x^2y)^3(\frac{2}{x})^2+\binom{5}{3}(x^2y)^2(\frac{2}{x})^3+$$

$$+\binom{5}{4}(x^2y)(\frac{2}{x})^4+\binom{5}{5}(\frac{2}{x})^5$$

$$=x^{10}y^5+10x^7y^4+40x^4y^3+80xy^2+80x^{-2}y+32x^{-5}$$

(3) Encuéntrese él término que contiene $x^{12}y^2$ en el desarrollo de: $(x^2y-\frac{1}{y^2})^8$

Solución

Suponiendo que k + 1 es él término que contiene a $x^{12}y^2$ esto es:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}(x^2y)^{n-k}(-y^{-2})^k \quad \text{para } n=8$$

$$T_{k+1}=\binom{8}{k}(x^2y)^{8-k}(-y^{-2})^k=\binom{8}{k}x^{2(8-k)}y^{8-3k}(-1)^k$$

Luego $2(8-k)=12$ de donde $k=2$

Por lo tanto $x^{12}y^2$ es el tercer término y su valor es: $\binom{8}{2}x^{12}y^2=28x^{12}y^2$

5.31. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Si $\frac{(n+2)!}{n!}=5+\frac{(n+12)!}{(n+11)!}$, para $n\in N$, encontrar el valor de n.

(2) Resolver $\frac{(n+2)!}{(n-2)!}-\frac{72n!}{(n-2)!}=0$

(3) Demostrar que: $\frac{n!}{(n-3)!}+\frac{3n!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!}=n^3$

(4) Demostrar que: $(n + 1)[n.n! + (2n - 1).(n - 1)! + (n - 1).(n - 2)!] = (n + 2)!$

(5) Sí $\frac{(m+1)!}{m!}+\frac{m!}{(m-2)!}+\frac{(m-1)!}{(m-2)!}=6$ y $n=2m^2+1$. Hallar el valor de $\binom{n}{m}$

(6) Sí $\binom{n}{1}+14\binom{n}{2}+36\binom{n}{3}+24\binom{n}{4}=256$. Hallar el valor de n.

(7) Si $\binom{n+1}{m+1}+\binom{n+1}{m}=1$ y $\binom{n+1}{m}\div\binom{n+1}{m-1}=\frac{5}{3}$, Hallar m.n

(8) Si $\binom{n}{m}=\binom{n}{m+1}$ y $4\binom{n}{m}=5\binom{n}{m-1}$. Hallar m + n

(9) Si $\binom{22}{2n}\div\binom{21}{2n-1}=\frac{11}{7}$ y $\binom{m+3}{3}-\binom{m+2}{2}=m+2$, Hallar el valor de m^2+n^2

(10) Si $\binom{n}{5}=8\binom{n}{4}$ y $\binom{18}{4}-\binom{18}{m+2}=0$, para $m \neq 2$. Hallar el valor de m + n

(11) Si $n \in N$ y $\binom{80}{3n^2-4}=\binom{80}{2n-1}$, Hallar el valor de $A=n^3-5$

(12) Si $\binom{50}{x^2-20}=\binom{50}{118-14x}$. Hallar el producto de todos los posibles valores enteros de x.

(13) Sean $A=\binom{2n-1}{n-2}+\binom{2n-1}{n-1}$ y $B=\binom{2n-3}{n-1}+\binom{2n-3}{n}$ tal que $\frac{A}{B}=\frac{132}{35}$. Hallar n

(14) Sea $x \in N$ tal que $\binom{40}{x^2+15x-10}=\binom{40}{5x+6}$, entonces hallar el valor de $A=\binom{x^3}{3}$

(15) Demostrar que: $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}=(-1)^{n+1}\binom{n}{n+1}$, $\forall\ n\in Z^+$

(16) Determinar el valor de "n" sí: $\frac{(n+1)!.(n+9)!}{(n+10)!+(n+9)!}=28!$ **Rpta.** n = 18

(17) Calcular n en: $\frac{2(2n^2+10n+12).(2n+5)!(2n+4)!}{(2n+5)!\ -(2n+4)!}=86!$ **Rpta.** n = 40

(18) Calcular a y b en $\frac{(120!+1)!-5!!!}{(120!-1)!}=(a!!)^b$ **Rpta.** a = 5, b = 2

(19) Calcular m en $1!.2^2+2!.3^2+3!.4^2+...+20!.21^2=m!-2!$ **Rpta.** m = 23

(20) Calcular n en: $\frac{(n+1)!}{n!}+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-2)!}+...+\frac{2!}{1!}=209$ **Rpta.** n = 19

(21) Calcular n en: $\frac{(n-3)!.(n-4)!}{(n-3)!\ -(n-4)!}=5040(n^2-8n+15)$ **Rpta.** n = 13

(22) Calcular n y m en la relación: $\frac{m!n!}{m!\ +n!}=\frac{12}{n^2-m^2+3}$ sí m!.n = n!

(23) Resolver $[|x|]!+\frac{144}{[|x|]!}=30$, $x\in R-\{0\}$

(24) Calcular "n" en $\frac{3(3n^2+10n+8)(3n+5)!(3n+4)!}{(3n+5)!\ -(3n+4)!}=108!$ **Rpta.** n = 34

(25) Simplificar $\frac{2^n[(2n)!]^2}{(4n)!!.(2n-1)!!}$ **Rpta.** n!

(26) Sí $(x-3)!=1$, cuáles son los posibles valores que puede tomar x. **Rpta.** x = 3 o x=4

(27) Si se cumple que $(a-2)!=6$ entonces el valor de a es. **Rpta.** a = 5

(28) Calcular el valor de "x" sí: $\frac{(x-5)!(x-6)!}{(x-5)! \ -(x-6)!} = 720(x^2-12x+35)$ **Rpta.** x = 14

(29) Demostrar que: $\sum_{\lambda=0}^{n}\binom{\lambda+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$ para todo entero no negativo n y k.

(30) Hallar el coeficiente de x^{21} en $(2x^4-x)^9$

(31) Hallar el coeficiente de x^{14} en $(x^3+\frac{1}{x^2})^{13}$.

(32) Hallar el coeficiente de y^{-7} en $(\frac{1}{4y^3}-\frac{2y^2}{3})^{14}$

(33) Demuéstrese que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

(34) Desarrolle, usando el teorema del binomio.

a) $(x^2y+\frac{1}{x})^4$

b) $(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{y^3})^5$

c) $(x^{-1}+2y^{-2})^6$

d) $(\frac{1}{2x}+y)^5$

e) $(x^2-x+1)^4$

f) $(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2x})^6$

g) $(\frac{2x}{y}+\frac{3y}{x})^5$

h) $(\frac{x^3}{a}-\frac{a^2}{x})^4$

i) $(\frac{2c}{x^2}+\frac{x}{2c^2})^4$

j) $(3x^2+2)^6$

k) $(\sqrt{x}-2)^5$

l) $(\sqrt{x}-\sqrt[3]{y})^6$

(35) Proporciónese el término que contiene a x^8 en el desarrollo de $(2x^3 - \frac{3}{\sqrt{x}})^5$

(36) Proporciónese el término que contiene y^7 en el desarrollo de $(x+y)^{11}$

(37) Proporciónese el término que contiene a x^5 como factor en el desarrollo de $(y^2 - x)^9$

(38) Encuéntrese el término que contiene $x^{12}y^2$ en el desarrollo de $(x^2 y - \frac{1}{y^2})^8$

(39) Determine él término que no tiene factor a x en el desarrollo de:

a) $(x^2 + \frac{1}{x})^9$ b) $(x + \frac{1}{x^2})^{3n}$ c) $(\frac{1}{x^4} + \frac{x^2}{4})^{12}$

(40) Sean x e y dos números reales positivos. tales que x + y = 3, $\binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 = 120$.

Hallar $x^2 + y^2$.

(41) El sexto término de $(\frac{xy}{2} - 2y^2)^n$ es $33ax^7y^{17}$. Hallar $(a+n)^4$

(42) Al desarrollar $(x+ay)^n$, en orden decreciente con respecto a las potencias de x, se tiene el cuarto término igual a $672x^6y^3$, hallar n – a.

(43) Que término del desarrollo de $(\frac{3x^2}{y} - \frac{y^2}{3x^4})^{15}$ está formado por potencias iguales a x e y.

(44) Que término del desarrollo de $(\frac{ax^6}{y^2} - \frac{by}{x^3})^{18}$ tiene a x e y con el mismo exponente.

(45) Si el quinto término del desarrollo de $(2x^2 - \frac{xy^3}{2})^n$ es $2640x^{18}y^{12}$, determinar el coeficiente del término que contiene a x^{15}.

(46) En el desarrollo del binomio $(9x^2 - \frac{xy}{3})^{10}$. Hallar el coeficiente que contiene a x^{12}.

(47) Hallar el término independiente de x e y en el desarrollo de $(\frac{2x^3}{y^2} + \frac{y^4}{4x^6})^{12}$

Rpta. 495

(48) Hallar el término independiente de x en el desarrollo de $(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x})^9$

Rpta. $\frac{7}{18}$

(49) Hallar el coeficiente del término central del desarrollo de $(\frac{x^7}{y^{a+1}} - \frac{y^9}{x^a})^n$, si la parte literal de dicho término es $x^{20}y^{24}$.

Rpta. 70

CAPITULO VI

NÚMEROS COMPLEJOS

6.1. ECUACIONES SIN SOLUCIÓN EN R.-

Consideremos una ecuación sin raíces reales: $x^2+2=0$, es decir: $\{x\in R / x^2+2=0\}=\phi$, esto es debido a que: $\forall x\in R, x^2\geq 0$, luego $x^2+2>0$, $\forall x\in R$..

GENERALIZANDO.- Consideremos la ecuación $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, con coeficientes reales, no tiene solución en R. Sí el discriminante es menor que cero, es decir: $b^2-4ac<0$.

Luego para resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$, ampliaremos a otro conjunto llamado el conjunto de los " Números Complejos".

6.2. DEFINICIÓN.-

Llamaremos números complejos a todo par ordenado de números reales el cual denotaremos por z = (a , b).

Al conjunto de los números complejos denotaremos por:

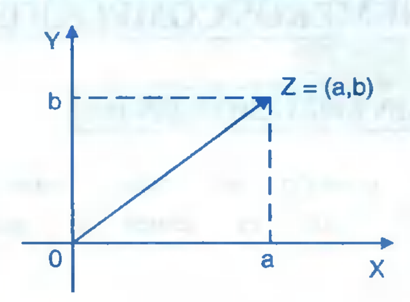
$$C = R \times R = \{(a,b) / a\in R \wedge b\in R\}$$

6.3 DEFINICIÓN.-

La parte real de un número complejo es su primera componente y la parte imaginaria es su segunda componente, luego tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales. Si z = (a,b) es un número complejo, entonces la parte real de z = (a,b) denotaremos por: Re(z) = a, y la parte imaginaria de z = (a,b) denotaremos por: Im(z) = b

6.4. EL PLANO COMPLEJO.-

Entre los números complejos y los puntos del plano cartesiano, existe una correspondencia biunivoca, de tal manera que todo número complejo z = (a,b) se puede representar geométricamente por un segmento orientado (flecha), que tiene su origen, en el origen de coordenadas y su extremo en el punto (a,b).



6.5. DEFINICIÓN.-

Un número complejo es real, si y sólo si, su parte imaginaria es cero; un número complejo es imaginario puro, si y sólo si, su parte real es cero. Es decir: $z = (a,b)$ un número complejo es real $\leftrightarrow$ $Im(z) = b = 0$

$z = (a,b)$ un número complejo es imaginario puro $\leftrightarrow$ $Re(z) = a = 0$

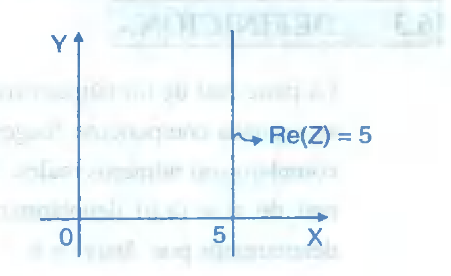
Ejemplo.- Determinar analíticamente y gráficamente los complejos $z = (x,y)$, tal que verifiquen:

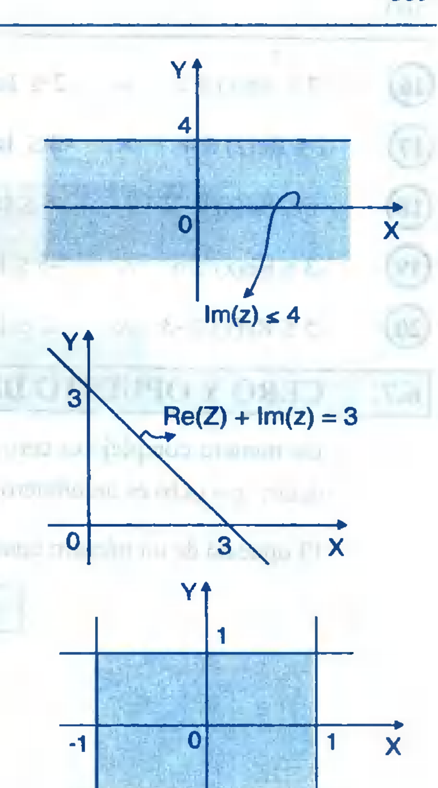
(1) $Re(z) = 5$ (2) $Im(z) \leq 4$

(3) $Re(z) + Im(z) = 3$ (4) $-1 \leq Re(z) \leq 1 \wedge -1 \leq Im(z) \leq 1$

Solución

(1) Sea $z = (x,y)$ un número complejo, entonces $Re(z) = x$, pero como $Re(z) = 5$, entonces $x = 5$, es una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de abscisa $x = 5$





(2) Sea $z = (x,y)$ un número complejo entonces $Im(z) = y$, pero como $Im(z) \leq 4$ entonces $y \leq 4$, que corresponde al semiplano que contiene al origen, cuyo borde es la recta de la ecuación $y = 4$ (ver gráfica).

(3) Sea $z = (x,y)$ un número complejo de donde $Re(z) = x \wedge Im(z) = y$, pero como $Re(z) + Im(z) = 3$, entonces $x + y = 3$, que nos representa la recta que pasa por los puntos $(3,0)$, $(0,3)$.

(4) Sea $z = (x,y)$ un número complejo, de donde $Re(z) = x \wedge Im(z) = y$ pero como $-1 \leq Re(z) \leq 1 \wedge -1 \leq Im(z) \leq 1$ entonces $-1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1$

6.6. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Describir analíticamente y gráficamente las siguientes relaciones:

(1) $Re(z) = -3$

(2) $Im(z) = -2$

(3) $Re(z) < 0$

(4) $Im(z) > 0$

(5) $Re(z) + Im(z) = -2$

(6) $Re(z) - Im(z) = 4$

(7) $Re(z) = Im(z)$

(8) $5\,Re(z) - 3\,Im(z) = 1$

(9) $-2 \leq Re(z) \leq 2$

(10) $-2 \leq Im(z) \leq 2$

(11) $Re(z) + Im(z) < 0$

(12) $Re(z) + Im(z) \leq 1$

(13) $Re(z) + Im(z) > -2$

(14) $4\,Re(z) - 5\,Im(z) < 1$

(15) $-3 \leq Re(z) \leq 2 \quad \wedge \quad -2 \leq Im(z) \leq 3$

(16) $-2 \leq Re(z) \leq 2 \quad \wedge \quad -2 \leq Im(z) \leq 2$

(17) $2 \leq Re(z) \leq 4 \quad \wedge \quad 2 \leq Im(z) \leq 4$

(18) $-6 \leq Re(z) \leq -2 \quad \wedge \quad -6 \leq Im(z) \leq -2$

(19) $-3 \leq Re(z) \leq 5 \quad \wedge \quad -5 \leq Im(z) \leq -2$

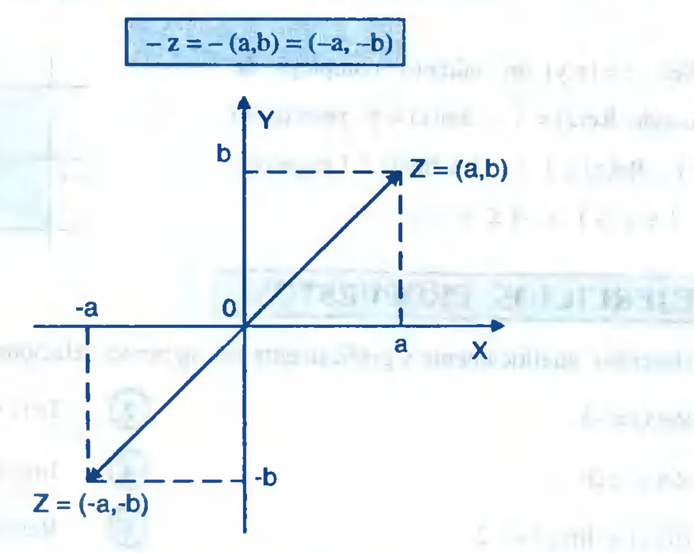
(20) $-5 \leq Re(z) \leq -3 \quad \wedge \quad 2 \leq Im(z) \leq 5$

6.7. CERO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

Un número complejo es cero; si, tanto su parte real, como su parte imaginaria es cero, es decir: $z = (a,b)$ es un número complejo cero $\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$.

El opuesto de un número complejo $z = (a,b)$ es definido por:

$$-z = -(a,b) = (-a, -b)$$



6.8. OPERACIONES EN COMPLEJOS.-

a) IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Dos números complejos son iguales cuando tienen iguales su parte real y su parte imaginaria, Es decir: $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Ejemplo.- $z_1 = (2,3)$ y $z_2 = (2,3)$ son iguales $(z_1 = z_2)$

Ejemplo.- $z_1 = (2,3)$ y $z_2 = (3,5)$ no son iguales $(z_1 \neq z_2)$

Luego: $(a,b) \neq (c,d) \Leftrightarrow a \neq c$ y/o $b \neq d$

b) SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

La suma de dos números complejos, es un número complejo, que tiene por parte real a la suma de las partes reales de los sumandos y por parte imaginaria a la suma de las partes imaginarias de las mismas, es decir:

Sí $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ entonces la suma: $z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$

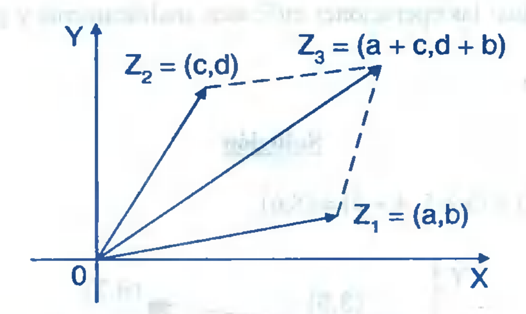
Ejemplo.- Calcular la suma de (2,4) y (3,5) es decir:

$(2,4) + (3,5) = (2+3, 4+5) = (5,8)$

c) REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ dos números complejos, entonces se tiene:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = z_3$$



d) PROPIEDADES DE LA SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1, z_2, z_3 \in C$, entonces:

P_1.- Propiedad de Clausura: $z_1 + z_2 \in C$

P_2.- Propiedad Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

P_3.- Propiedad Asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

P_4 .- Propiedad de Existencia y Unidad del Neutro Aditivo:

Existe el elemento neutro $w \in C$ tal que:

$$z + w = z, \quad \forall z \in C$$

P_5 .- Propiedad de Existencia del Inverso Aditivo, para cualquier $z \in C$ existe otro elemento que denotaremos por $-z$, tal que $z + (-z) = (0,0)$.

NOTA.- La demostración de estas propiedades se deja para el lector.

e) SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ dos números complejos, definimos la diferencia de z_1 y z_2 por: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, es decir;

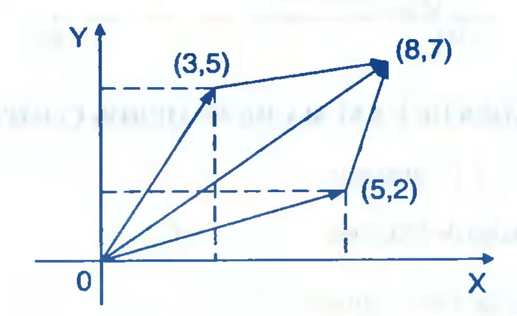
$$z_1 - z_2 = (a,b) - (c,d) = (a-c, b-d)$$

Ejemplos.- Efectuar las operaciones indicadas analíticamente y gráficamente.

① (3,4) + (5,2)

Solución

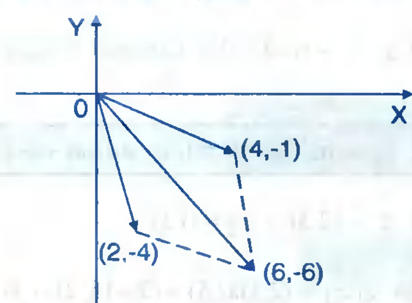
(3,4) + (5,2) = (3 + 5, 4 + 2) = (8,6)



② (4,-2) + (2,-4)

Solución

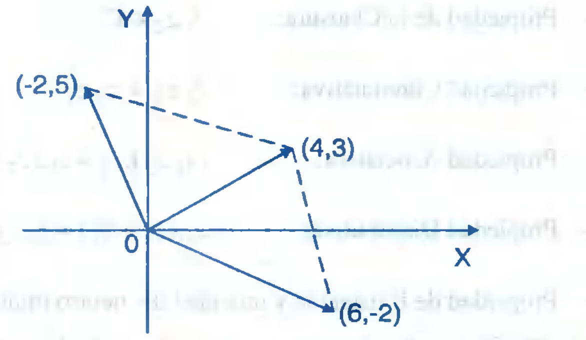
(4,-2) + (2,-4) = (4 + 2, -2 – 4) = (6,-6)



③ (6,-2) – (2,-5)

Solución

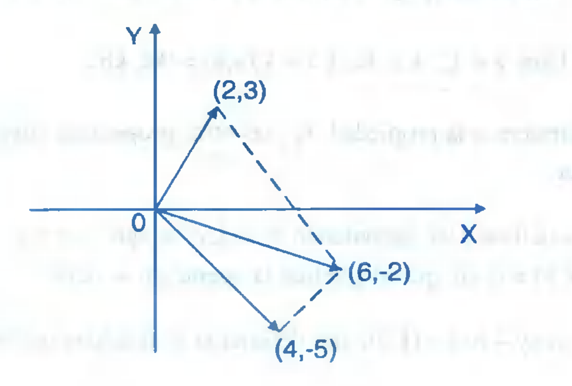
(6,-2) – (2,-5) = (6,-2) + (-2,5) = (6 – 2, -2 + 5) = (4,3)



④ (2,3) – (-4,5)

Solución

(2,3) – (-4,5) = (2,3) + (4,-5) = (2 + 4, 3 – 5) = (6,-2)



f) MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1=(a,b)$ y $z_2=(c,d)$ dos números complejos, al producto de z_1 y z_2 definiremos por:

$$z_1.z_2=(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Ejemplo.- Sean $z_1=(2,3)$ y $z_2=(1,5)$

Luego $z_1.z_2=(2,3).(1,5)=(2-15,\ 10+3)=(-13,13)$

g) PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1, z_2, z_3 \in C$, números complejos, entonces:

P_1 .- Propiedad de la Clausura: $z_1.z_2 \in C$

P_2 .- Propiedad Conmutativa: $z_1.z_2 = z_2.z_1$

P_3 .- Propiedad Asociativa: $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$

P_4 .- Propiedad Distributiva: $z_1.(z_2+z_3)=z_1.z_2+z_1.z_3$

P_5 .- Propiedad de Existencia y unicidad del neutro multiplicativo. Existe un único número complejo u tal que u.z = z, $\forall$ z $\in$ C siendo u = (1,0)

P_6 .- Propiedad de Existencia y unicidad del inverso multiplicativo. Para cada número complejo z $\neq$ (0,0), $\exists$ $\alpha \in$ C tal que, z.α = u siendo $\alpha=z^{-1}$; u=(1,0)

P_7 .- Para z $\in$ C, k $\in$ R, k.z = k.(a,b) = (ka, kb).

Demostraremos la propiedad P_6, las otras propiedades dejamos como ejercicio para el lector.

Sea z = (a,b) $\neq$(0,0), suponiendo α = (x,y) tal que, z.α = u, siendo u = (1,0), es decir: (a,b).(x,y) = (1,0), que al efectuar la operación se tiene:

(ax – by, ay + bx) = (1,0), por definición de igualdad tenemos

$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$ resolviendo el sistema se tiene: $x = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $y = -\dfrac{b}{a^2+b^2}$

Observamos que: (a,b) ≠ (0,0) ⇔ a ≠ 0 y/o b ≠ 0, entonces $a^2+b^2 \neq 0$

por lo tanto: $\alpha = (x,y) = (\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2})$

Ejemplo.- Sí $z = (3,5) \Rightarrow z^{-1} = (\dfrac{3}{34}, -\dfrac{5}{34})$

h) UNIDAD Y RECÍPROCO.-

El elemento neutro multiplicativo es la unidad compleja y denotaremos por u = (1,0) o también 1 = (1,0).

El inverso multiplicativo α de un número complejo z = (a,b) ≠ (0,0) se llama reciproco de z y denotaremos por: $\alpha = z^{-1} = (\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2})$

Observación.- El número complejo (a,0) se identifica con el número real a, y denotaremos como (a, 0) = a, en forma intercambiable.

i) DIVISIÓN DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1, z_2 \in C$, siendo $z_2 \neq (0,0)$, la división de z_1 y z_2 definiremos por:

$\dfrac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1}$ de esta definición obtenemos la regla para la división.

Sí $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d) \neq (0,0)$, entonces: $z_2^{-1} = (\dfrac{c}{c^2+d^2}, -\dfrac{d}{c^2+d^2})$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1} = (a,b).(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}) = (\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2})$$

Luego: $\dfrac{z_1}{z_2} = (\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}, \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2})$

6.9. UNIDAD IMAGINARIA.-

El número complejo imaginario puro de segunda componente igual a 1, se llama unidad imaginaria y denotamos por: $i = (0,1)$.

OBSERVACIÓN.- La multiplicación de un número complejo real por la unidad imaginaria permuta las componentes, es decir:

$(b,0).i = (b,0).(0,1) = (0,b)$

6.10. FORMA STÁNDAR (RECTANGULAR O BINÓMICA) DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sea $z = (a,b)$ un número complejo, por definición de suma tenemos :

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a\,(1,0) + b\,(0,1) = a + bi$$

Luego $z = a + bi$ es la forma estándar (rectangular o binómica) del número complejo z.

6.11. TEOREMA.- Demostrar que: $i^2 = -1$

Demostración

$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$ por lo tanto $i^2 = -1$, como $i^2 = -1$

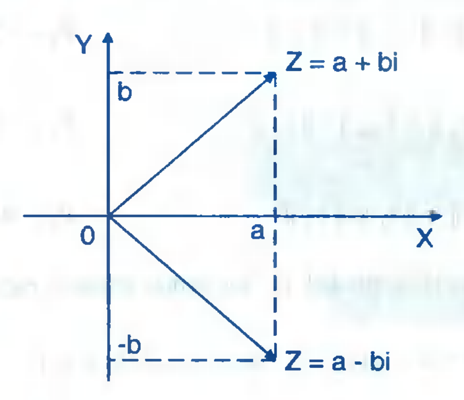
entonces $i = \sqrt{-1}$

6.12. LA CONJUGACIÓN EN C.-

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos conjugado de $z = a + bi$ al número complejo $a - bi$, al cual representaremos por $\bar{z} = a - bi$

b) **DEFINICIÓN.-** Dos números complejos son conjugados si difieren solamente en sus partes imaginarias en los signos.

Los números complejos conjugados caracterizan puntos simétricos respecto al eje real, así: Si $z = a + bi$ su conjugada es: $\bar{z} = a - bi$



PROPIEDADES: Sean $z_1, z_2, \in$ C, Entonces:

P_1.- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

P_2.- $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

P_3.- $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

P_4.- $(\overline{z_1})^{-1} = \overline{(z_1^{-1})}$, $z_1 \neq (0,0)$

P_5.- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq (0,0)$

6.13. MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

El módulo de un número complejo z = a + bi es un número real positivo definido por:

$$\| z \| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente; el módulo de un número complejo z = a + bi, es la longitud del segmento orientado que representa a z = a + bi

Ejemplo: Sí $z = 3 + 4i \Rightarrow \| z \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

a) PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Sean $z_1, z_2, z_3 \in$ C, entonces:

P_1.- Sí $z_1 \neq (0,0) \Rightarrow \| z_1 \| > 0$

P_2.- Sí $\| z_1 \| = 0 \Rightarrow z_1 = (0,0)$

P_3 .- Sí $\| z_1 \| = \| -z_1 \| = \| \overline{z_1} \|$

P_4 .- Sí $\| z_1 \|^2 = z_1 . \overline{z_1}$

P_5 .- $\| z_1 + z_2 \| \leq \| z_1 \| + \| z_2 \|$

P_6 .- $\| \frac{z_1}{z_2} \| = \frac{\| z_1 \|}{\| z_2 \|}$, $z_2 \neq (0,0)$

P_7 .- $\| z_1 . z_2 \| = \| z_1 \| . \| z_2 \|$

P_8 .- $\text{Re}(z) \leq \| z \|$, $\text{Im}(z) \leq \| z \|$

Demostraremos la propiedad P_5, los demás dejamos para el lector:

$$\| z_1 + z_2 \|^2 = (z_1 + z_2).(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2).(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$= z_1 . \overline{z_1} + z_1 . \overline{z_2} + z_2 . \overline{z_1} + z_2 . \overline{z_2} = \| z_1 \|^2 + z_1 . \overline{z_2} + \overline{z_1 . \overline{z_2}} + \| z_2 \|^2$$

$$= \| z_1 \|^2 + 2\,\text{Re}(z_1 . \overline{z_2}) + \| z_2 \|^2 \leq \| z_1 \|^2 + 2 \| z_1 \| . \| \overline{z_2} \| + \| z_2 \|^2$$

$$= \| z_1 \|^2 + 2 \| z_1 \| . \| z_2 \| + \| z_2 \|^2 = (\| z_1 \| + \| z_2 \|)^2$$

Por lo tanto: $\| z_1 + z_2 \|^2 \leq (\| z_1 \| + \| z_2 \|)^2$

$$\therefore \quad \| z_1 + z_2 \| \leq \| z_1 \| + \| z_2 \|$$

6.14. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Hallar los valores de x e y sí : $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$

Solución

Sean $z_1 = 1 + 2i = (1, 2)$

$z_2 = 3 - 5i = (3, -5)$

$z_3 = 1 - 3i = (1, -3)$

Como $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$, entonces

$(1,2)x + (3,-5)y = (1,-3)$

$(x, 2x) + (3y, -5y) = (1,-3)$

$(x+3y\ ,\ 2x-5y)=(1,-3)$, por igualdad

$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-5y=-3 \end{cases}$ resolviendo el sistema se tiene $x=-\dfrac{4}{11}$, $y=\dfrac{5}{11}$

(2) Determinar los números reales a y b sabiendo que: $(-1+i)a\ +\ (1+2i)b=1$

Solución

Sean $z_1=-1+i=(-1,1)$

$z_2=\ 1+2i=(1,2)$

$z_3=1=\ 1+0i\ =(1,0)$

Como $(-1+i)a\ +\ (1+2i)b\ =1$, entonces: $(-1,1)a\ +\ (1,2)b\ =\ (1,0)$

$(-a+b\ ,\ a+2b)\ =\ (1,0)$, por igualdad

$\begin{cases} -a+b=1 \\ a+2b=0 \end{cases}$, resolviendo el sistema $a=-\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$

(3) Expresar cada uno de los siguientes ejercicios como: 1,-1, i, –i

a) i^3

Solución

$i^3=i^2.\ i=-i$,de donde $i^3=-i$

b) i^7

Solución

$i^7=(i^2)^3 i\ =\ (-1)^3 i\ =\ -i$ de donde $i^7=-i$

c) i^8

Solución

$i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1$, de donde $i^8=1$

d) i^{14}

Solución

$i^{14}=(i^2)^7=(-1)^7=-1$, de donde $i^{14}=-1$

e) i^{17}

Solución

$i^{17}=(i^2)^8.i=(-1)^8 i=i$, de donde $i^{17}=i$

4 Efectuar las siguientes operaciones y el resultado expresar en la forma binómica

a) $(5+7i)+(8+2i)$

Solución

$(5+7i)+(8+2i)=(5+8)+(7+2)i=13+9i$

b) $(2+\sqrt{3}i).(5-6\sqrt{3}i)$

Solución

$(2+\sqrt{3}i).(5-6\sqrt{3}i)=(2,\sqrt{3}).(5,-6\sqrt{3})$

$=(10+18,-12\sqrt{3}+5\sqrt{3})=(28,-7\sqrt{3})=28-7\sqrt{3}i$

c) $\dfrac{(2+i).(3-2i).(1+2i)}{(1-i)^2}$

Solución

$(2+i).(3-2i).(1+2i)=(8-i)(1+2i)=10+15i$, además $(1-i)^2=-2i$, luego

$$\frac{(2+i).(3-2i).(1+2i)}{(1-i)^2}=\frac{10+15i}{-2i}=\frac{(10+15i).(i)}{(-2i).i}=\frac{-15+10i}{2}=-\frac{15}{2}+5i$$

d) $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

Solución

$i^4+i^9+i^{16}=1+i+1=2+i$

$$2-i^5+i^{10}-i^{15}=2-i-1+i=1$$

Luego $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}=\dfrac{2+i}{1}=2+i$

e) $\dfrac{3(1+i)^2}{(1-i)^2}-\dfrac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}$

Solución

$$\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2}=3(\frac{1+i}{1-i})^2=2[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}]^2=3[\frac{2i}{2}]^2=-3$$

$$\frac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}=2(\frac{1-i}{1+i})^3=2[\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}]^3=2(\frac{-2i}{2})^3=2i$$

Luego se tiene: $\dfrac{3(1+i)^2}{(1-i)^2}-\dfrac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}=-3-2i$

f) $\dfrac{1+i}{i}+\dfrac{i}{1-i}$

Solución

$$\frac{1+i}{i}+\frac{i}{1-i}=\frac{(1+i)(-i)}{i(-i)}+\frac{i(1+i)}{(i-1)(1+i)}=\frac{1-i}{1}+\frac{i-1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$$

g) $(1+i)^n+(1-i)^n$

Solución

Si n es par entonces:

a) $n=4k,\ k\in Z$. Entonces $(1+i)^n=(1+i)^{4k}=(-4)^k$

$$(1-i)^n=(1-i)^{4k}=(-4)^k$$

$$(1+i)^n+(1-i)^n=(-4)^k+(-4)^k=2(-4)^k,\ k\in Z$$

b) n = 4k + 2 , k ∈ Z entonces: $(1+i)^n = (1+i)^{4k+2} = (-4)^k(+2i)$

$(1-i)^n = (1-i)^{4k+2} = (-4)^k(-2i)$

$(1+i)^n + (1-i)^n = 2i(-4)^k - 2i(-4)^k = 0$

Si n es impar entonces:

a) n = 4k +1, k ∈ Z, entonces:

$(1+i)^n = (1+i)^{4k+1} = (-4)^k(1+i)$

$(1-i)^n = (1-i)^{4k+1} = (-4)^k(1-i)$

$(1+i)^n + (1-i)^n = (-4)^k(1+i) + (-4)^k(1-i) = 2(-4)^k$, k ∈ Z

b) n = 4k + 3, k ∈ Z, entonces

$(1+i)^n = (1+i)^{4k+3} = (-4)^k(-2+2i)$

$(1-i)^n = (1-i)^{4k+3} = (-4)^k(-2-2i)$

$(1+i)^n + (1-i)^n = (-4)^k(-2+2i) + (-4)^k(-2-2i) = (-4)^{k+1}$

(5) Calcular i^n, donde n es un entero.

Solución

Si n es par entonces

a) n = 4k, k ∈ Z, entonces: $i^n = i^{4k} = 1$

b) n = 4k + 2, k ∈ Z, entonces: $i^n = i^{4k+2} = i^{4k}.i^2 = -1$

Si n es impar entonces:

a) n = 4k + 1, k ∈ Z, entonces: $i^n = i^{4k+1} = i^{4k}.i = i$

b) n = 4k + 3, k ∈ Z entonces: $i^n = i^{4k+3} = i^{4k}.i^3 = -i$

(6) Demostrar que: $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}} = i^n(1-i)$

Solución

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}} = \frac{(1+i)^{n-1}(1+i)}{(1-i)^{n-1}} = (\frac{1+i}{1-i})^{n-1}(1+i)$$

$$= (i)^{n-1}(1+i) = \frac{i^n(1+i)}{i} = \frac{i^n(1+i)(-i)}{i(-i)} = i^n(1-i)$$

(7) Probar que:

a) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

Solución

Sea $z = x + y \Rightarrow \bar{z} = x - iy$, luego $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{x+iy+x-iy}{2} = \frac{2x}{2} = x = Re(z)$

$\therefore \quad Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

b) $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Solución

Sea $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{x+iy-(x-iy)}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = Im(z) \quad \therefore \quad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

c) $Im(iz) = Re(z)$

Solución

Sea $z = x + iy \Rightarrow iz = -y + ix \Rightarrow Im(iz) = x$

además $Re(z) = x$ entonces $Re(z) = Im(iz)$

d) $\text{Im}(z_1.z_2) = \text{Re}(z_1).\text{Im}(z_2) + \text{Im}(z_1).\text{Re}(z_2)$

Solución

Por el ejercicio b) se tiene $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

Luego $\text{Im}(z_1.z_2) = \dfrac{z_1.z_2 - \overline{z_1 z_2}}{2i} = \dfrac{2z_1 z_2 - 2\overline{z_1 z_2}}{4i}$

$$\text{Im}(z_1 z_2) = \frac{z_1 z_2 - \overline{z_1 z_2}}{4i} + \frac{z_1 z_2 - \overline{z_1 z_2}}{4i} = \frac{z_1 + \bar{z_1}}{2}.\frac{z_2 - \bar{z_1}}{2i} + \frac{z_1 - \bar{z_1}}{2i}.\frac{z_2 + \bar{z_2}}{2}$$

$$= \text{Re}(z_1).\text{Im}(z_2) + \text{Im}(z_1).\text{Re}(z_2)$$

8 Si z es un número complejo tal que: $\| z \| = 1$, calcular $\| 1 + z \|^2 + \| 1 - z \|^2$

Solución

$$\| 1 + z \|^2 + \| 1 - z \|^2 = (1+z)(\overline{1+z}) + (1-z)(\overline{1-z})$$

$$= 1 + z + \bar{z} + \| z \|^2 + 1 - z - \bar{z} + \| z \|^2 = 2 + 2\| z \|^2 = 2 + 2 = 4$$

9 Demostrar que: $\| z - \frac{3}{4}i \| = \frac{1}{4}$ sí $z = \dfrac{1-a}{1+2ai}$, donde a es un número real.

Solución

$$z - \frac{3}{4}i = \frac{i-a}{1+2ai} - \frac{3}{4}i = \frac{2a+i}{4+8ai}$$

$$z - \frac{3}{4}i = \frac{2a+i}{4+8ai} = \frac{(2a+i)(4-8ai)}{(4+8ai)(4-8ai)} = \frac{16a}{16+64a^2} + \frac{4-16a^2}{16+64a^2}i$$

$$z - \frac{3}{4}i = \frac{a}{1+4a^2} + \frac{1-4a^2}{4+16a^2}i \text{, de donde}$$

$$\| z - \frac{3}{4}i \| = \sqrt{(\frac{a}{1+4a^2})^2 + (\frac{1-4a^2}{4+16a^2})^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

(10) Calcular z^2 siendo $Z=-\|-1+i\|+\sqrt{2}i$

Solución

$\|1-i\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \Rightarrow z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$z^2=(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^2=2-4i-2=-4i$ $\therefore$ $z^2=-4i$


(11) Hallar el número complejo z tal que: $\|z\|=1$ y $\operatorname{Re}(z)=0$

Solución

Sea $z=x+iy \Rightarrow \operatorname{Re}(z)=x=0 \Rightarrow z=0+iy$

Como $\|z\|=1 \Rightarrow \|z\|=\sqrt{y^2}=1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$ $\therefore$ $z=\pm i$

(12) Describir y construir la gráfica del lugar representado para cada una de las ecuaciones siguientes

a) $\|z-i\|=2$

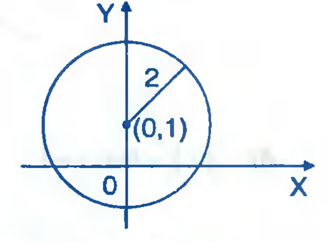
Solución

Como $z=x+iy$

entonces $\|z-i\|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2$

de donde $x^2+(y-1)^2=4$, que es

una circunferencia de centro (0,1) y radio 2.



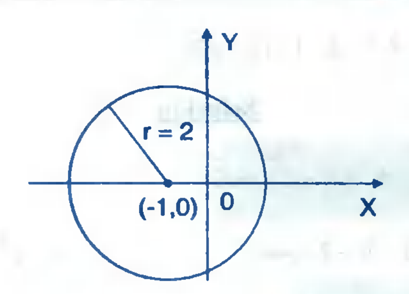
b) $\operatorname{Re}[z(\bar{z}+2)]=3$

Solución

Sea $z=x+iy \Rightarrow \bar{z}=x-iy$

Como $z(\bar{z}+2)=3 \Rightarrow (x+iy)[x-iy+2]=3$

$x^2+2x+y^2+2yi=3$ de donde $x^2+2x+y^2=3$ entonces $(x+1)^2+y^2=4$ que es una circunferencia de centro (-1,0) y radio 2.



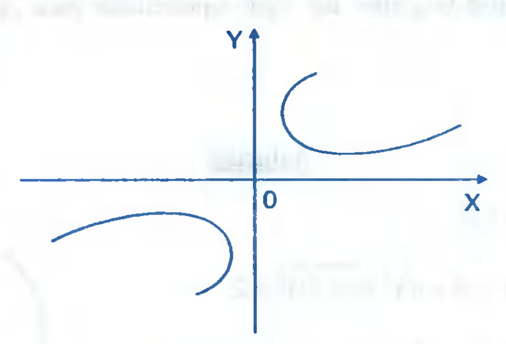
c) $\text{Im}(z^2) = 4$

Solución

Sea $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, de donde

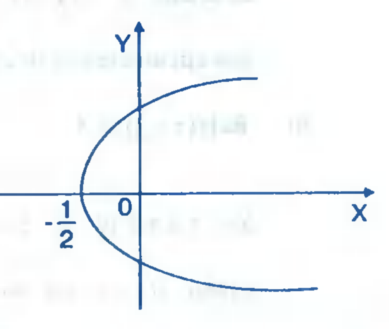
$\text{Im}(z^2) = 2xy$ como $\text{Im}(z^2) = 4$ entonces

$2xy = 4 \Rightarrow xy = 2$ que es la ecuación de una hipérbola, su gráfico es:



d) $\|z\| = \text{Re}(z) + 1$

Solución



Sea $z = x + iy \Rightarrow \text{Re}(z) = x$

$\|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

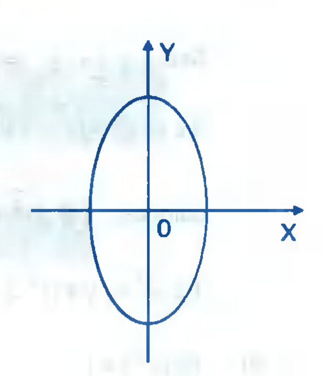
Como $\|z\| = \text{Re}(z) + 1$, entonces

Se tiene $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$

$x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1$ de donde se tiene $y^2 = 2x + 1$ que es la ecuación de la parábola

e) $\| z + 2i \| + \| z - 2i \| = 6$

Solución



Sea $z = x + iy \Rightarrow z + 2i = x + (y + 2)i$

$$\| z+2i \| = \sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

$$z-2i = x+(y-2)i$$

$$\| z-2i \| = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

como $\| z+2i \| + \| z-2i \| = 6$, entonces:

$\sqrt{x^2+(y+2)^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 6$, de donde al quitar el radical y simplificando se tiene: $9x^2 + 8y^2 = 45$, que es la ecuación de una elipse.

13 Describir gráficamente la región representada por cada una de las siguientes desigualdades.

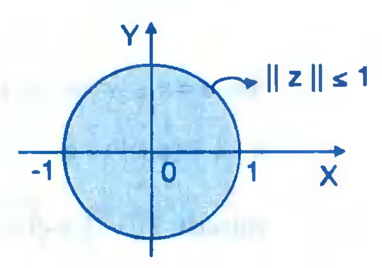
a) $\| z \| \leq 1$

Solución

Sea $z = x + iy \Rightarrow \| z \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Como $\| z \| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$

De donde $x^2 + y^2 \leq 1$, su gráfico es:



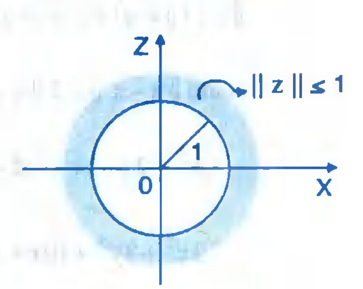
b) $\| z \| \geq 1$

Solución

Sea $z = x + iy \Rightarrow \| z \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Como $\| z \| \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$, de

Donde $x^2 + y^2 \geq 1$, su gráfico es:



c) $1 \le \| z+i \| \le 2$



Solución

Sea $z = x+iy \Rightarrow z+i = x+(y+1)i$

$\| z+i \| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$ como $1 \le \| z+i \| \le 2$

entonces $1 \le \sqrt{x^2+(y+1)^2} \le 2$, de donde

$1 \le x^2+(y+1)^2 \le 4$



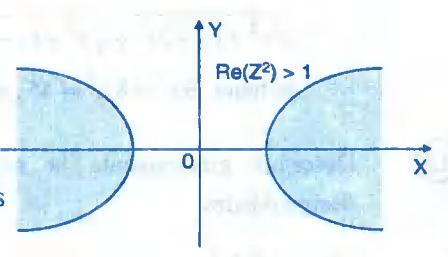
d) $\text{Re}(z^2) > 1$

Solución

Sea $z = x+iy \Rightarrow z^2 = x^2-y^2+2xyi$

Luego $\text{Re}(z^2) = x^2-y^2$, como

$\text{Re}(z^2) > 1 \Rightarrow x^2-y^2 > 1$. Su gráfico es



e) $\| z-1 \| \le 2\| z+1 \|$

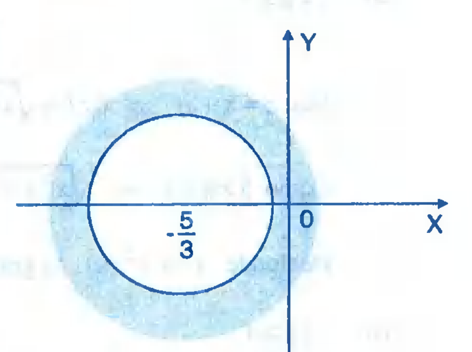
Solución

Sea $z = x+iy \Rightarrow z-1 = (x-1)+iy$

$z+1 = (x+1)+iy$

Además $\| z-1 \| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\| z+1 \| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$



como $\| z-1 \| \le 2\| z+1 \| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} \le 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, de donde

$$x^2-2x+1+y^2 \le 4(x^2+2x+1+y^2)$$

$$3x^2+3y^2+10x+3 \ge 0 \quad \text{entonces} \quad (x+\frac{5}{3})^2+y^2 \ge \frac{16}{9}$$

14 Demostrar la identidad: $\|1-\bar{z}w\|^2 - \|z-w\|^2 = (1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)$

Demostración

Se conoce que $\|z\|^2 = z.\bar{z}$, por lo tanto

$$\|1-\bar{z}w\|^2 = (1-\bar{z}w)(1-z\bar{w})$$

$$\|z-w\|^2 = (z-w).(\bar{z}-\bar{w})$$

$$\|1-\bar{z}w\|^2 - \|z-w\|^2 = (1-\bar{z}w)(1-z\bar{w}) - (z-w)(\bar{z}-\bar{w})$$

$$= (1-\bar{z}w - z\bar{w} + z\bar{z}.w\bar{w}) - (z\bar{z} - w\bar{z} - z\bar{w} + w\bar{w})$$

$$= 1 + z.\bar{z}.w.\bar{w} - z.\bar{z} - w.\bar{w} = 1 + \|z\|^2\|w\|^2 - \|z\|^2 - \|w\|^2$$

$$= (1-\|z\|^2) - \|w\|^2(1-\|z\|^2) = (1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)$$

15 Sí $\|z\| < 1$ y $\|w\| < 1$. Demostrar que: $\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| < 1$, $z, w \in C$

Demostración

Por hipótesis se tiene: $\|z\| < 1$ y $\|w\| < 1 \Rightarrow \|z\|^2 < 1$ y $\|w\|^2 < 1$

Luego $1-\|Z\|^2 > 0$ y $1-\|w\|^2 > 0$, de donde $(1-\|z\|^2).(1-\|w\|^2) > 0$ **... (1)**

En el ejercicio 19) se tiene: $(1-\|z\|^2)-(1-\|w\|^2) = \|1-\bar{z}w\|^2 - \|z-w\|^2$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\|1-\bar{z}w\|^2 - \|z-w\|^2 > 0$

de donde $\|z-w\|^2 < \|1-\bar{z}w\|^2 \Rightarrow \|z-w\| < \|1-\bar{z}w\| \Rightarrow \left\|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right\| < 1$


16 Si $z,w \in C$, Demostrar que: $\text{Re}(\frac{z}{z+w}) + \text{Re}(\frac{w}{z+w}) = 1$

Demostración

Sean $z = a + bi$, $w = c + di$, entonces: $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$$\frac{z}{z+w}=\frac{a+bi}{(a+c)+(b+d)i}=\frac{(a+bi).((a+c)-(b+d)i)}{[(a+c)+(b+di)][(a+c)-(b+d)i]}$$

$$=\frac{a(a+c)+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{a(b+d)+c(b+d)i}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$\text{Re}(\frac{z}{z+w})=\frac{a(a+c)+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{w}{z+w}=\frac{c+di}{(a+c)+(b+d)i}=\frac{(a+di)((a+c)-(b+d)i)}{[(a+c)+(b+d)i][(a+c)-(b+d)i]}$$

$$=\frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}+(\frac{-c(b+d)+d(a+c)}{(a+c)^2+(b+d)^2})i$$

$$\text{Re}(\frac{w}{z+w})=\frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} \qquad \text{... (2)}$$

sumando (1) y (2) se tiene:

$$\text{Re}(\frac{z}{z+w})+\text{Re}(\frac{w}{z+w})=\frac{a(a+c)+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}=\frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+c)^2+(b+d)^2}=1$$

$$\therefore \quad \text{Re}(\frac{z}{z+w})+\text{Re}(\frac{w}{z+w})=1$$

17 Simplificar la expresión: $\dfrac{\sqrt{\text{sen}\,x+i\sqrt{\cos x}}-i\sqrt{\text{sen}\,x-i\sqrt{\cos x}}}{\sqrt{\text{sen}\,x+i\sqrt{\cos x}}-i\sqrt{\text{sen}\,x-i\sqrt{\cos x}}}$

Solución

Multiplicando por su conjugando se tiene:

$$\frac{\sqrt{\text{sen}\,x+i\sqrt{\cos x}}-i\sqrt{\text{sen}\,x-i\sqrt{\cos x}}}{\sqrt{\text{sen}\,x+i\sqrt{\cos x}}+i\sqrt{\text{sen}\,x-i\sqrt{\cos x}}}=\frac{(\sqrt{\text{sen}\,x+i\sqrt{\cos x}}-i\sqrt{\text{sen}\,x-i\sqrt{\cos x}})^2}{\text{sen}\,x+i\sqrt{\cos x}+\text{sen}\,x-i\sqrt{\cos x}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x + i\sqrt{\cos x} - 2i\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos x} - \operatorname{sen} x + i\sqrt{\cos x}}{2\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{2i(\sqrt{\cos x} - \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos x})}{2\operatorname{sen} x} = \frac{i(\sqrt{\cos x} - \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos x})}{\operatorname{sen} x}$$

(18) Probar que: $\| z_1 + z_2 \| + \| z_1 - z_2 \| = 2(\| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2)$

Solución

$$\| z_1 + z_2 \|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}$$

$$= \| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 . \overline{z_1} \quad \ldots (1)$$

$$\| z_1 - z_2 \|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1}$$

$$= \| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2 - z_1 \overline{z_2} - z_2 . \overline{z_1} \quad \ldots (2)$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$\| z_1 + z_2 \|^2 + \| z_1 - z_2 \|^2 = \| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + \| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2 - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1}$$

$$= 2\| z_1 \|^2 + 2\| z_2 \|^2 = 2(\| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2)$$

$$\therefore \quad \| z_1 + z_2 \|^2 + \| z_1 - z_2 \|^2 = 2(\| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2)$$

(19) Hallar el módulo de $\dfrac{1 + \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$

Solución

Sea $z = \dfrac{1 + \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{(1 + \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).(1 - \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)}{(1 - \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).(1 - \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 - \cos\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta.\cos\theta}{1 - \cos\theta} i$

$$\| z \| = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{(1 - \cos\theta)^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{(1 - \cos\theta)^2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}{(1 - \cos\theta)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}}=\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}=\sqrt{c\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=|c\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}|$$

$$\therefore \quad \|z\|=|c\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}|$$

(20) Hallar el módulo de: $\frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}.\frac{6+4i}{5+i}.(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(3+4i)$

Solución

Sea $z_1=\frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)} \Rightarrow \|z_1\|=\frac{\sqrt{13}.5}{\sqrt{52}.\sqrt{289}}=\frac{5}{34}$

$z_2=\frac{(6+4i)(3-i)}{5+i} \Rightarrow \|z_2\|=2\sqrt{5}$

$z_3=(\sqrt{3}-i\sqrt{2})(3+4i) \Rightarrow \|z_3\|=\sqrt{5}.5$

Luego $\|z_1.z_2.z_3\|=\|z_1\|.\|z_2\|.\|z_3\|=\frac{5}{34}.2\sqrt{5}.\sqrt{5}.5=\frac{125}{17}$

$$\therefore \quad \|z_1.z_2.z_3\|=\frac{125}{17}$$

(21) $w=\frac{1+z}{1-z}$, donde $z=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$, hallar w.

Solución

Reemplazando z en w se tiene:

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-2i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$=ctg\frac{\alpha}{2}.\frac{(\cos\frac{\alpha}{2}+isen\frac{\alpha}{2})(sen\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2})}{sen^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=c\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\operatorname{sen}\alpha-i\cos\alpha)$$

22 Demostrar que: Sí $z_1 + z_2 = z_1 + z_3$, Entonces $z_2 = z_3$ (Propiedad de cancelación para la suma)

Solución

Como $z_1 \in C \Rightarrow \exists\ -z_1 \in C$ tal que $z_1 + (-z_1) = (0,0)$

Luego $z_1 + z_2 = z_1 + z_3 \Rightarrow -z_1 + (z_1 + z_2) = -z_1 + (z_1 + z_3)$

$$\Rightarrow (-z_1 + z_1) + z_2 = (-z_1 + z_1) + z_3$$

$$\Rightarrow 0 + z_2 = 0 + z_3$$

$$\Rightarrow z_2 = z_3$$

23 Demostrar que: Sí $z_1 \neq 0$ y sí $z_1 z_2 = z_1 z_3$ Entonces $z_2 = z_3$ (Propiedad de cancelación para la multiplicación)

Solución

Como $z_1 \neq 0 \Rightarrow \exists\ z_1^{-1}$ tal que $z_1.z_1^{-1} = 1$

Luego $z_1.z_2 = z_1.z_3 \Rightarrow z_1^{-1}.(z_1.z_2) = z_1^{-1}.(z_1.z_3)$

$$\Rightarrow 1.z_2 = 1.z_3$$

$$\Rightarrow z_2 = z_3$$


Sí $z_1.z_2 = 0$ entonces $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$

Solución

Suponiendo que $z_1 \neq 0 \Rightarrow \exists\ z_1^{-1}$ tal que $z_1.z_1^{-1} = 1$

Como $z_1.z_2 = 0 \Rightarrow z_1^{-1}.(z_1.z_2) = z_1^{-1}.0$

$$\Rightarrow (z_1^{-1}.z_1).z_2 = 0$$

$$\Rightarrow 1.z_2 = 0 \text{ de donde } z_2 = 0$$

en forma similar para $z_1 = 0$

Suponiendo que $z_2 \neq 0 \Rightarrow \exists\ z_2^{-1}$ tal que $z_2.z_2^{-1} = 1$

Como $z_1.z_2 = 0 \Rightarrow z_2^{-1}.(z_1.z_2) = z_2^{-1}.0$

$\Rightarrow (z_2^{-1}.z_2).z_1 = 0$

$\Rightarrow 1.z_1 = 0$ de donde $z_1 = 0$

(25) Hallar dos números complejos z_1 y z_2 cuya suma sea el número real x y cuya diferencia sea el número imaginario iy.

Solución

Por condición del problema se tiene: $\begin{cases} z_1 + z_2 = x & (1) \\ z_1 - z_2 = iy & (2) \end{cases}$

Sumando (1) y (2) se tiene: $2z_1 = x + iy$ de donde $z_1 = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}i$

restando (1) y (2) se tiene: $2z_2 = x - iy$ de donde $Z_2 = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}i$

(26) Demostrar que: $\| z \|^2 \geq 2 \| Re(z) \| . \| Im(z) \|$

Solución

Sea z = x + iy $\Rightarrow \| z \| = \sqrt{x^2 + y^2}$, además Re(z) = x, Im(z) = y

Luego $\| z \| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \Rightarrow \| z \|^2 = | Re(z) |^2 + | Im(z) |^2$ ... (1)

como $(| Re(z) | - | Im(z) |)^2 \geq 0$, de donde

$Re^2(z) + Im(z)^2 \geq 2 | Re(z) | . | Im(z) |$ ... (2)

por lo tanto de (1) y (2) se tiene: $\| z \|^2 \geq 2 | Re(z) | . | Im(z) |$

27 Demostrar que: $\sqrt{2}\,\|z\|^2 \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

Solución

Como $\|z\|^2 \geq 2|\operatorname{Re}(z)|.|\operatorname{Im}(z)|$ sumando $\|z\|^2$

$$2\|z\|^2 \geq \|z\|^2 + 2|\operatorname{Re}(z)|.|\operatorname{Im}(z)|$$

$$2\|z\|^2 \geq |\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2 + 2|\operatorname{Re}(z)|.|\operatorname{Im}(z)|$$

$$2\|z\|^2 \geq (|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{2}\,\|z\| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$



28 Probar que $\left|\dfrac{\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)}{\sqrt{2}}\right| \leq \|z\| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

Solución

Sea $z = x + iy$ de donde $\operatorname{Re}(z) = x$, $\operatorname{Im}(z) = y$

Además $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, la demostración del problema equivale probar que:

$$\left|\frac{x+y}{2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y|$$

como $x,y \in R$ entonces $(x-y)^2 \geq 0$, $\forall\, x,y \in R$

$$(x-y)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$$

$$2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$$

$$\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \geq |x+y|$$

de donde $\left|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Luego $\left|\dfrac{\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)}{\sqrt{2}}\right| \leq \|z\|$ **... (1)**

Como $|x|.|y| \geq 0$, $\forall$ x, y $\in$ R, entonces

$2|x|.|y| \geq 0 \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 + 2|x|.|y| \geq |x|^2 + |y|^2 \geq 0$

$$(|x|+|y|)^2 \geq |x|^2 + |y|^2 \geq 0$$

$$|x|+|y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{Re}(z) + \text{Im}(z) \geq \|z\|$$

Luego $\|z\| \leq |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$ **... (2)**

de (1) y (2) se tiene: $\left|\dfrac{\text{Re}(z)+\text{Im}(z)}{\sqrt{2}}\right| \leq \|z\| \leq |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$

(29) Hallar z tal que: $\|z\| - z = 1 + 2i$

Solución

Sea $z = x + iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$, al reemplazar se tiene:

$\sqrt{x^2+y^2} - x - iy = 1 + 2i$, por igualdad

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -2 \\ \sqrt{x^2+4} = 1 + x \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

Luego $z = \dfrac{3}{2} - 2i$

(30) Sí z=cos θ + i senθ, $z^n = 1$, $z \neq 1$ y $M = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + n.z^{n-1}$. Hallar Re(M) y Im(M)

Solución

Como $M = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + n.z^{n-1}$, multiplicando por z

$zM = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + n.z^n$, ahora restando se tiene

$M - zM = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} - nz^n$ **... (1)**

como $z^n = 1 \Rightarrow z^n - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z^2 + z + 1) = 0$

como $z \neq 1 \quad z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z^2 + z + 1 = 0$ ... **(2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: $M - zM = 0 - nz^n$

$M(1-z) = -n.z^n$ de donde $M = -\dfrac{n}{1-z}$ puesto que $z^n = 1$

Como $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, entonces

$$M = \frac{-n}{1-\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} = \frac{-n}{(1-\cos\theta) - i\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{-n}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - 2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{-n}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2})}$$

$$M = \frac{-n(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2})}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = -\frac{n}{2} - \frac{n}{2} c\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} i$$

de donde $\operatorname{Re}(M) = -\dfrac{n}{2}$ y $\operatorname{Im}(M) = -\dfrac{n}{2} c\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$

31 Sí $w = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$. Hallar $(1+w)^n$

Solución

$$1 + w = 1 + \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} i = 2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})$$

$$(1+w)^n = 2^n \cos^n\frac{\theta}{2}(\cos\frac{n\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}) = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

32 Simplificar $(1+w)^n$, donde $w = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$

Solución

$$1+w=1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=2\cos^2\frac{\pi}{3}+2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}i$$

$$=2\cos\frac{\pi}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$(1+w)^n=(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3})^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}=e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

(33) Hallar la suma de $\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 3x+...+\operatorname{sen}^2(2n-1)x$

Solución

Aplicando la identidad $\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$

$$\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 3x+\operatorname{sen}^2 5x+...+\operatorname{sen}^2(2n-1)x$$

$$=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 10x}{2}+...+\frac{1-\cos 2(2n-1)}{2}$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x+\cos 10x+...+\cos 2(2n-1))$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x+\cos 10x+...+\cos 2(2n-1)) \quad ...(1)$$

A = cos 2x + cos 6x + cos 10x + … + cos 2(2n – 1)x

B = sen 2x + sen 6x + sen 10x + … + sen 2(2n – 1)x

iB = i sen 2x + i sen 6x + i sen 10x + … + i sen 2(2n – 1)x

ahora sumando A y iB se tiene:

A+ iB = (cos 2x + i sen 2x) + (cos 6x + i sen 6x) +…+ (cos 2(2n – 1) + i sen 2(2n – 1))

$$=z^2+z^6+z^{10}+...+z^{2(2n-1)}$$

donde z = cos x + i sen x $\Rightarrow$ $z^n=\cos nx+i\operatorname{sen} nx$

$$A + iB = z^2(1 + z^4 + z^8 + ... + z^{4(n-1)}) = z^2(\frac{1+(z^4)^n}{1+z^4}) = z^2(\frac{1-\cos 4nx - i\,\text{sen}\,4nx}{1-\cos 4x - i\,\text{sen}\,4x})$$

$$= z^2(\frac{2\,\text{sen}^2\,2nx - 2i\,\text{sen}\,2nx\cos 2nx}{2\,\text{sen}^2\,2x - 2i\,\text{sen}\,2x.\cos 2x})$$

$$A+iB = z^2.\frac{2\,\text{sen}\,2nx}{2\,\text{sen}\,2x}(\frac{\text{sen}\,2nx - i\cos 2nx}{\text{sen}\,2x - i\cos 2x}) = z^2\frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}[\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-2nx) - i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}-2nx)}{\cos(\frac{\pi}{2}-2x) - i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}-2x)}]$$

$$= \frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}(\cos 2x + i\,\text{sen}\,2x)[\cos(-2nx+2x) + i\,\text{sen}(2nx - x)]$$

$$= \frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}[\cos(2x-2nx-2x) + i\,\text{sen}(2nx-2x+2x)] = \frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}[\cos 2nx - i\,\text{sen}\,2nx]$$

$$A = \frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}\cos 2nx = \frac{\text{sen}\,4nx}{2\,\text{sen}\,2x} \quad \text{y} \quad B = \frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}\text{sen}\,2nx = \frac{\text{sen}^2\,2nx}{\text{sen}\,2x}$$

6.15. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Hallar los números reales x e y tal que: 2x–3iy –2y–5–10i = (x+y–2)–(y–x+3)i

Rpta. x = 1 , y = -1

(2) Que valores han de tomar x e y para satisfacer la ecuación

(2 – 5i)x + (1 + 3i)y – 8 + 9i = 0

Rpta. x = 3 , y = 2

(3) Resolver el sistema de ecuaciones en C. $\begin{cases}(1+i)x - iy = 2\\(2+i)x + (2-i)y = 2i\end{cases}$

Rpta. $x = -\frac{2}{13} - \frac{10}{13}i$

$y = -\frac{12}{13} + \frac{11}{13}i$

(4) Hallar los valores de a y b sí (a + b) + (a – b)i = 7 + 2i

Rpta. a = 4.5, b = 2.5

(5) Hallar los valores de a y b sí: $(a+b)+(a-b)i=(2+5i)^2+i(2-3i)$

Rpta. a = 2 , b = -20

(6) Si z = x + iy, donde x,y ∈ R, hallar los valores de x e y cuando $\frac{3z}{1-i}+\frac{3z}{i}=\frac{4}{3-i}$.

Rpta. x = 0.27, y = 0.53

(7) Efectuar las siguientes operaciones y el resultado expresar en la forma binómica.

a) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}i$

b) $z=\frac{(3-i)(2+i)}{i}$ **Rpta.** z = 1 – 7i

c) $z=1+\cfrac{i}{1+\cfrac{i}{1+\cfrac{i}{1+i}}}$ **Rpta.** $z=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$

d) $\frac{1+3i}{i(4-5i)}+\frac{2}{i}$ **Rpta.** $\frac{22}{41}-\frac{75}{41}i$

e) $\frac{5(7+2i)}{3-4i}-i(4-6i)$ **Rpta.** $-\frac{17}{5}-\frac{66}{25}i$

f) $(\frac{1+i}{1-i})^2+(\frac{1-i}{1+i})^2$ **Rpta.** -2 + 0i

g) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$ **Rpta.** 1 + 0i

h) $\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}$ **Rpta.** 0 – i

i) $\frac{1+i\,\text{tg}\,\alpha}{1-i\,\text{tg}\,\alpha}$ **Rpta.** cos 2α + i sen 2α

j) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ **Rpta.** $\dfrac{44}{318}-\dfrac{5}{318}i$

k) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$ **Rpta.** $-\dfrac{1}{25}-\dfrac{32}{25}i$

l) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ **Rpta.** 2

(8) Calcular $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde n es un entero positivo. **Rpta.** $2i^{n-1}$

(9) Resolver el sistema de ecuaciones:

a) $\begin{cases}(3+i)x+(4+2i)y=2+6i\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i\end{cases}$ **Rpta.** $x=1+i$, $y=i$

b) $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6\\(3+2i)x+(3-2i)y=8\end{cases}$ **Rpta.** $x=2+i$, $y=2-i$

c) $\begin{cases}x+iy-2z=10\\z-y+2iz=20\\ix+3iy-(1+i)z=30\end{cases}$ **Rpta.** $x=3-11i$, $y=3-9i$, $z=1-7i$

(10) Demuestre que: **a)** $\text{Re}(z\bar{w}+\bar{z}w)=\bar{z}w+z\bar{w}$, z, w ∈ C

b) $\text{Im}(z\bar{w}-\bar{z}w)=z\bar{w}-\bar{z}w$, z, w ∈ C

(11) Resolver el sistema de ecuaciones:

a) $\begin{cases}x+iy=1\\ix+y=1+i\end{cases}$ **Rpta.** $x=1-\dfrac{i}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$

b) $\begin{cases}(1-i)x+2iy=3\\4x+(1-i)y=2+i\end{cases}$ **Rpta.** $x=\dfrac{i}{2}+\dfrac{7}{10}$, $y=\dfrac{1}{10}-\dfrac{9i}{10}$

(12) Si x e y son reales, resolver la ecuación: $\frac{ix}{1+iy}=\frac{3x+4i}{x+3y}$

Rpta. $x=\pm 2$, $y=\pm\frac{3}{2}$

(13) Si $z = x + iy$, probar que: $|x|+|y| \le \sqrt{2}\,|x+iy|$

(14) Probar que sí $z_1, z_2 \in C$ entonces: $\text{Re}(z_1.z_2)=\text{Re}(z_1)\text{Re}(z_2)-\text{Im}(z_1)\text{Im}(z_2)$

(15) Probar que: $\forall z_1,z_2 \in C$ entonces $\|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2=2(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2)$

(16) Sí $z_1=1-i$, $z_2=-2+4i$, $Z_3=\sqrt{3}-2i$. Hallar el valor numérico de la expresión

a) $\left\|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+1}\right\|$ **Rpta.** $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{2}\left(\frac{z_3}{\overline{\overline{z_3}}}+\frac{\overline{z_3}}{z_3}\right)$ **Rpta.** $-\frac{1}{7}$

c) $\text{Im}\left(\frac{z_1.z_2}{z_3}\right)$ **Rpta.** $\frac{6\sqrt{3}+4}{7}$

d) $\text{Re}(2z_1^3+3z_2^2-5z_3^2)$ **Rpta.** -35

(17) Sí $w=3iz-z^2$ y $z = x + iy$. Hallar $\|w\|^2$ en términos de x e y.

Rpta. $x^4+y^4+2x^2y^2-6x^2y-6y^3+9x^3+9y^2$

(18) Resolver las siguientes ecuaciones en z.

a) $iz = 1$ **Rpta.** $z = -i$

b) $(1 + iz) = 1$ **Rpta.** $Z=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

c) $(2 - i)z = i$ **Rpta.** $z=-\frac{1}{5}+\frac{2i}{5}$

d) $\frac{1}{z} = i$ **Rpta.** $z = -i$

e) $iz = (1+i)(1-i)$ **Rpta.** $z = -2i$

19 Si $z = x + iy$, siendo x e y reales. Demostrar que el lugar geométrico $\|\frac{z-2}{z+2}\| = 2$ es una circunferencia y determina un centro y radio.

20 Describir geométricamente la región representada por cada una de las siguientes desigualdades.

a) $1 \leq \| z+1 \| \leq 2$

b) $\| z+3i \| > 4$

c) $\| z+2-3i \| + \| z-2+3i \| < 10$

d) $2 < \| z \| < 4$

e) $4 < \| z-1 \| + \| z+1 \| < 5$

f) $\| 2z+3 \| < 1$

g) $\| z-i \| < \| z+i \|$

h) $\| z \| \leq \| 2z+1 \|$

i) $\| z+1 \| > 2$

j) $-2 \leq Im(z) \leq 3 \wedge 1 \leq Re(z) < 5$

k) $-0.5 \leq Re(z) < 0.5 \wedge \| z \| = 2$

l) $-2 \leq Im(z) \leq 2 \wedge -2 \leq Re(z) \leq 2$

21 Qué lugar describe el punto $z = x + iy$, cuando satisface a las siguientes ecuaciones.

a) $\| z-2 \| + \| z \| = 4$

b) $\| z-2 \| - \| z \| = 1$

c) $\| z-2 \| - \| z \| = -1$

d) $\| z-i \| + \| z+i \| = 5$

e) $z + \bar{z} = 1$

f) $\bar{z} + z = \| z \|^2$

g) $\| z-i \| = \| z+1 \|$

h) $z^{-1} + z = 0$

i) $\bar{z} - z^{-1} = 0$

j) $z + z^{-1} \in R$

k) $\| z+i \| = \| z+2i \|$

l) $\| z-1 \| = 5$

ll) $\| z-4 \| = 3$

m) $\|\frac{z+2}{z-1}\| = 4$

n) $Im(z^2) = 4$

22 Sí $z = 2 + 3i$, $w = 1 + 2i$, $v = 3 + i$

Hallar **a)** $Re(z - w)$ **b)** $Im(\frac{zw}{v})$

c) $\frac{1}{z} + \frac{1}{w}$ **d)** $\frac{z - w}{v}$

23 Demostrar que la elipse $\|z + 3\| + \|z - 3\| = 10$ se puede representar en forma rectangular $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

24 Describir cada uno de los siguientes lugares geométricos expresándolos en términos de las coordenadas conjugadas $z, \bar{z}$.

a) $z.\bar{z} = 16$ **b)** $z.\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 3 = 0$

c) $z + \bar{z} = 14$ **d)** $\bar{z} = z + 6i$

Rpta. **a)** $x^2 + y^2 = 16$ **b)** $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 10$

c) $x = 2$ **d)** $y = -3$

25 Mostrar que la ecuación de una recta es determinado por dos puntos z_1 y z_2 que cumple con la ecuación $Im(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}) = 0$

26 Determinar analíticamente y gráficamente los subconjuntos de C que verifican.

a) $\| z + 1 \| + \| z - 1 \| = 3$ **Rpta.** $\frac{4x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1$

b) $\| z + c \| . \| z - c \| = c^2$ **Rpta.** $(x^2 + y^2) - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$

27 Verificar la identidad, donde $z, w \in C$. $\| \frac{z + w}{2} - (zw)^2 \| + \| \frac{z + w}{2} + (zw)^2 \| = \| z \| + \| w \|$

28 Sí $|a_i| < 1$, $\lambda_1 \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = 1$. Probar que $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n| < 1$

(29) Simplificar: $\dfrac{(\cos 2a - i\,\text{sen}\,2a)(\cos b - i\,\text{sen}\,b)^2}{\cos(a+b)+i\,\text{sen}(a+b)} + \dfrac{(\cos 2a + i\,\text{sen}\,2a)(\cos b - i\,\text{sen}\,b)^2}{\cos(a+b)-i\,\text{sen}(a+b)}$

Rpta. 2cos (3a – b)

(30) Si z = x + iy, hallar:

a) $\text{Re}(\frac{1}{z})$ **b)** $\text{Im}(\frac{1}{z})$ **c)** $\text{Im}(z^3)$

d) $\text{Re}(\frac{1}{Z^2})$ **e)** $\text{Re}(z^2+z)$ **f)** $\text{Re}(-iz^2)$

g) $\text{Re}(\frac{1}{Z-i})$

Rpta. **a)** $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ **b)** $\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ **c)** x^3-3xy^2

d) $\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ **e)** x^2-y^2+x **f)** 2xy

g) $\dfrac{x}{x^2+(y-1)^2}$

(31) Si z,w ∈ C. Demostrar que: $\text{Im}(\frac{z}{z+w})+\text{Im}(\frac{w}{z+w})=0$

(32) Si z,w ∈ C. Probar la desigualdad: $\dfrac{\|w\|z+\|z\|w}{\|z+w\|} \le \dfrac{2\|zw\|}{\|z\|+\|zw\|}$

(33) Sea $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, donde a,b,c,d ∈ R. Demostrar que: $w-\overline{w}=\dfrac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2}$, z ∈ C

(34) Calcular $\overline{z}^2$ siendo $z=-\|-1+i\|+\sqrt{2}i$. **Rpta.** 4i

(35) Dado z = 1 + sen a + i cos a. Determinar $\|z^2-\overline{z}\|$

Rpta. $[(\text{sena}-\cos 2\text{a})^2+(3\cos\text{a}-\text{sen}2\text{a})^2]^{1/2}$

(36) Calcular $\frac{(1-i\sqrt{3}).(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)}{2(1-i).(\cos\theta-i\,\text{sen}\,\theta)}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(2\theta-\frac{\pi}{2})+i\,\text{sen}(2\theta-\frac{\pi}{2})]$

(37) Demostrar que sí $\| z \| < \frac{1}{2}$, entonces $|(1+i)Z^3+iZ| < \frac{3}{4}$

(38) Sí $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$. Hallar el valor numérico de:

a) $\| 3z_1 - 4z_2 \|$ **Rpta.** $\sqrt{157}$

b) $\| \frac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1-z_2+3-i} \|$ **Rpta.** 1

(39) Si z y w son complejos y $u=\sqrt{zw}$. Probar que: $\| z \| + \| w \| = \| \frac{z+w}{2} - u \| + \| \frac{z+w}{2} + u \|$

(40) Mostrar que una ecuación para una circunferencia que pasa por 3 puntos z_1, z_2, z_3 está dado por: $(\frac{z-z_1}{z-z_2})/(\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}) = (\frac{\overline{z}-\overline{z_1}}{\overline{z}-\overline{z_2}})/(\frac{\overline{z_3}-\overline{z_1}}{\overline{z_3}-\overline{z_1}})$

(41) Hallar z tal que $\| z \| + z = 2 + i$ **Rpta.** $z = \frac{3}{4} + i$

(42) Hallar todos los $z \in C$ tales que $\text{Im}(z + \frac{1}{z}) = 0$

(43) Sea $p > 0$ y $p \neq 1$, probar que $\| \frac{1-z}{1+z} \| = p$ representa a una circunferencia

(44) Hallar todos los z que satisface la relación $z(1 + ai) = 1 - ai$

(45) Demostrar que: $\text{Re}(z_1.\overline{z_2}) = \frac{1}{2}(z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2)$

(46) Demostrar que: $\text{Im}(z_1.\overline{z_2}) = \frac{1}{2i}(z_1.\overline{z_2} - \overline{z_1}.z_2)$

(47) Hallar los $z = x + iy$ que satisfacen la condición dada:

a) $\| z - 3i \| - \| z + 2i \| < 9$ b) $\| 1 + z^2 \| < \| 2z \|$

c) $\| z + 2 \| - \| z - 2 \| > 5$ d) $\| z - 3 \| + \| z - 4 \| \leq 5$

e) $\| \frac{z-2}{z+2} \| < 2$ f) $\| \frac{z-2}{z+2} \| > 2$

(48) Sean a, b y c tres constantes complejas, z una variable compleja. Probar que: $a + a + bz + bz + (c - c)z.z = 0$ es la ecuación de una circunferencia.

(49) Sea a y b dos constantes complejas, si $b \neq 0$ probar que: $a + a + bz + bz = 0$ es la ecuación de una recta, donde z es una variable compleja.

(50) Si $\| z_1 \| < 1$ y $\| z_2 \| < 1$, Probar que: $\| z_1 + z_2 \| < \| 1 + \bar{z}_1 z_2 \|$

(51) Si $\| z \| \neq 0$, probar que $\| \frac{z}{\| z \|} - 1 \| \leq | \arg(z) |$

(52) Si $\| z \| \neq 0$, Demostrar que: $\| z - 1 \| \leq | \| z \| - 1 | + \| z \| . | \arg(z) |$

(53) Demostrar que: $\| z_1 + z_2 \| \geq \frac{1}{2}(\| z_1 + z_2 \|) \| \frac{z_1}{\| z_1 \|} + \frac{z_2}{\| z_2 \|} \|$

(54) Si $\| z_1 \| \leq 1$ y $\| z_2 \| \leq 1$, probar que: $\| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \| \leq 1$. ¿En qué caso se cumple la igualdad?

(55) Demostrar que: $\| z_1 \| + \| z_2 \| = \| \frac{z_1 + z_2}{z_1} - (z_1 . z_2)^2 \| + \| \frac{z_1 + z_2}{z_1} + (z_1 . z_2)^2 \|$

(56) Demostrar que: $\| z_0 + z_1 + ... + z_n \| \geq \| z_0 \| - \| z_1 \| - \| z_2 \| - ... - \| z_n \|$

(57) Determinar el conjunto de puntos del plano que satisface a la relación: $\| z - 1 + i \| = 2$.

Rpta. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$


Hallar los conjuntos de puntos del plano de la variable z que se determina por las condiciones dadas.

a) $\left\| \frac{z-1}{z+1} \right\| \leq 1$

b) $\| z^2 - 1 \| \geq a^2$, a > 0

c) $4 \leq \| z-1 \| + \| z+1 \| \leq 8$

d) $\| z-i \| - \| z+i \| = 2$

e) $\| z \| - 3\,\text{Im}(z) = 6$

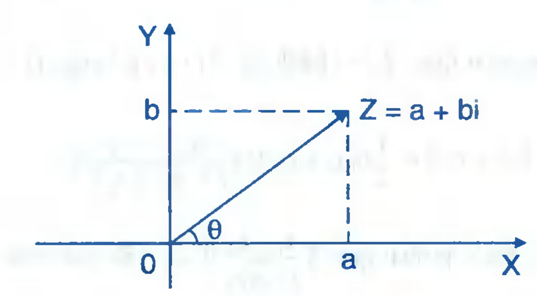
f) $\| z-2 \| = \| 1-2\bar{z} \|$


¿Qué curva determina la ecuación $| z+c | + | z-c | = 2a$, donde a y $c \in R^+$, a > c?


¿Qué curva del plano XOY se determina por la ecuación $z.\bar{z} + i(z-\bar{z}) - 2 = 0$?

6.16. FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

Sea z = a + bi, un número complejo distinto de cero, entonces el módulo de z es $r = \| z \| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$



Denotaremos por θ el ángulo formado por el segmento orientado que representa al número complejo z, con el eje X, en sentido antihorario.

Luego del gráfico se tiene: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$, dé donde $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

Como z = a + bi, al reemplazar a y b se tiene: **z = r(cos θ + i sen θ)**

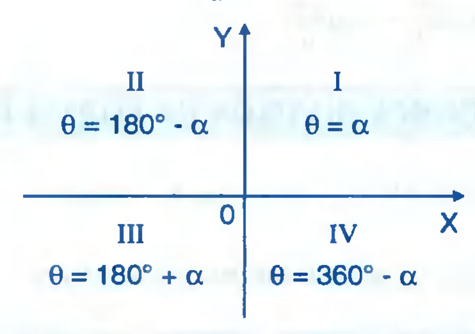
Que es llamado forma trigonométrica o forma polar del número complejo z.

Al ángulo θ se le llama argumento de z y r = ‖ z ‖ es el módulo de z que denotaremos por:

$\theta = \arg(z)$, $\quad r = \|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$

por lo tanto: $\quad z = a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$r = \|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\theta = \operatorname{arctg}(\frac{b}{a})$



Ejemplo.- Expresar $z = 1+\sqrt{3}i$ en forma trigonométrica o polar.

<u>Solución</u>

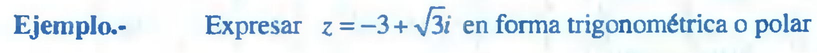
Calculamos su módulo y su argumento

$r = \|z\| = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{1}) \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°$

$z = 1+\sqrt{3}i = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

z = 2(cos 60° + i sen 60°)



Ejemplo.- Expresar $z = -3+\sqrt{3}i$ en forma trigonométrica o polar



<u>Solución</u>

Calculando su módulo y su argumento. $r = \| z \| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = |Z| = 2\sqrt{3}$

$\theta = \text{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{-3})$ de donde $\theta \in$ 2do. cuadrante.

Es decir $\theta = 180° - \alpha$, donde $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = -3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6})$$

6.17. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN FORMA POLAR.-

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$

Dos números complejos en su forma trigonométrica, entonces:

$$z_1.z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)r_2(\cos_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$$

Sí $z_2 \neq (0.0)$ y $r_2 \neq (0,0)$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2)]$$

Ejemplo.- Sí $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})$ y $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3})$

Entonces $Z_1.Z_2 = (3)(4)[\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})] = 12(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2})$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3})}{3(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})} = \frac{4}{3}[\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})] = \frac{4}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})$$

6.18. POTENCIAS Y RAICES DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

TEOREMA (FÓRMULA DE MOIVRE)

Para todo z = a + bi y todo entero positivo n se cumple la siguiente relación.

$$(a+bi)^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Llamada fórmula de MOIVRE

Demostración

La demostración lo haremos por inducción

i) Para n = 1, a + bi = r(cos θ + i sen θ)

ii) Para n = h, $(a+bi)^h = r^h(\cos h\theta + i \operatorname{sen} h\theta)$

iii) Para n = h+1,

$$(a+bi)^{h+1} = (a+bi)^h(a+bi) = r^h(\cos h\theta + i \operatorname{sen} h\theta) r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$= r^{h+1}(\cos(h\theta+\theta) + i \operatorname{sen}(h\theta+\theta)) = r^{h+1}[\cos(h+1)\theta + i \operatorname{sen}(h+1)\theta]$$

Por lo tanto se cumple la fórmula para todo entero positivo n.

Ejemplo.- Calcular $(1+\sqrt{3}i)^7$

Solución

$$Z = 1+\sqrt{3}i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{1+3} = 2 \text{ y } \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$(1+\sqrt{3}i)^7 = 2^7(\cos\frac{7\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}) = 128(\cos\frac{7\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{3})$$

TEOREMA.- Si z = a + bi es un número complejo y n es un entero positivo. La raíz n – ésima de z es $z^{1/n} = r^{1/n}[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}]$ para valores de k = 0,1,…,n – 1

Demostración

Sea w = x + iy, la raíz n –ésima de z

Es decir: $w^n = z$ pero como $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$$w = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

$(x+iy)^n = a+bi$, reemplazando se tiene: $\rho^n(\cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

de donde $\rho^n = r$, $\alpha n = \theta + 2k\pi$, k = 0,1,2,..., n – 1

Luego $\rho = r^{1/n}$, $\alpha = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}$, k = 0,1,2,.., n – 1

Como $w = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ se tiene: $w = r^{1/n}[\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{\theta+2k\pi}{n}]$

como w es la raíz n – ésima de z, se tiene:

$$Z^{1/n} = r^{1/n}[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}] \text{ para } k = 0,1,2,.., n-1$$

Ejemplo.- Hallar las raíces de $(-4+4i)^{1/5}$

<u>Solución</u>

Calculando su módulo y su argumento

$z = -4 + 4i \Rightarrow r = \|z\| = 4\sqrt{2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(\dfrac{4}{-4}) \Rightarrow \theta \in$ 2do. cuadrante

Luego $\theta = 180° - \alpha$, donde $\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

Por lo tanto $\theta = 180° - 45° \Rightarrow \theta = 135°$

$$(-4+4i)^{1/5} = (4\sqrt{2})^{1/5}[\cos\frac{135°+2k\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{135°+2k\pi}{5}]$$

$$= \sqrt{2}[\cos\frac{135°+2k\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{135°+2k\pi}{5}]$$

para k = 0, $w_1 = \sqrt{2}(\cos 27° + i\operatorname{sen} 27°)$

$k = 1,\quad w_2 = \sqrt{2}(\cos 99° + i \operatorname{sen} 99°)$

$k = 2,\quad w_3 = \sqrt{2}(\cos 171° + i \operatorname{sen} 171°)$

$k = 3,\quad w_4 = \sqrt{2}(\cos 243° + i \operatorname{sen} 243°)$

$k = 4,\quad w_5 = \sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 135°)$

TEOREMA.- Sea $z = a + bi$, definimos $z^{\frac{m}{n}} = (z^{\frac{1}{n}})^m$, para m y n enteros positivos, donde m y n son primos entre sí, se cumple la relación siguiente:

$$z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)] \quad \text{siendo} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}\ , \quad \theta = \operatorname{arctg}(\frac{b}{a})$$

Ejemplo.- Efectuar la operación $(1 + \sqrt{3}i)^{5/6}$

Solución

Calculamos $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(\frac{b}{a})$

$$r = \sqrt{1+3}\ ,\quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$(1+\sqrt{3}i)^{5/6} = 2^{5/6}[\cos\frac{5}{6}(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) + i \operatorname{sen}\frac{5}{6}(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)]$$

para $k = 0$, $w_1 = 2^{5/6}(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$

$k = 1$, $w_2 = 2^{5/6}(\cos 350° + i \operatorname{sen} 350°)$

$k = 2$, $w_3 = 2^{5/6}(\cos 290° + i \operatorname{sen} 290°)$

$k = 3$, $w_4 = 2^{5/6}(\cos 230° + i \operatorname{sen} 230°)$

$k = 4$, $w_5 = 2^{5/6}(\cos 170° + i \operatorname{sen} 170°)$

$k = 5$, $w_6 = 2^{5/6}(\cos 110° + i \operatorname{sen} 110°)$

6.19. EXPONENCIALES COMPLEJOS (FÓRMULA DE EULER).-

Por el momento admitiremos la definición de la exponencial real.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

que más adelante demostraremos, en dicha expresión observamos que:

$e^0 = 1$, $\quad e^{x+y} = e^x . e^y$

Definimos la exponencial compleja por: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ (e: número de Euler)

que es llamado la fórmula de Euler.

Sí $z = x + iy \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

Cuando $y = 0$, $e^z = e^x$ se obtiene la función exponencial real.

Cuando $x = 0$, $e^z = e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, se obtiene la fórmula de Euler.

PROPIEDADES.- Sean $z, w \in C$

$P_1.-\quad e^{z+w} = e^z . e^w$

$P_2.-\quad \dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

$P_3.-$ Si $e^z = 1 \Rightarrow z = 2n\pi i$, n es un entero.

$P_4.-\quad (e^z)^n = e^{nz}$, n es un entero

Si en la fórmula de Euler sustituimos x por –x, es decir:

$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ se obtiene: $e^{-ix} = \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x)$ de donde $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$

Luego $\quad e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

$\quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \qquad$ Sumando

$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$, ósea que: $\quad \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

analógicamente para el sen x

$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$, restando se tiene:

$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \operatorname{sen} x$, de donde: $\boxed{\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$

Por lo tanto: $\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{array}}$

Estas fórmulas sirven para el estudio de las funciones trigonométricas.

Si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ entonces $z = re^{i\theta}$ es la fórmula exponencial del complejo, donde $r = \| z \|$ y θ se denomina argumento de z que es denotado por $\theta = \arg(z)$

Ejemplo.- Sí $z = e^{i\theta} \Rightarrow \| z \| = 1$

Solución

Como $z = e^{i\theta} \Rightarrow z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ de donde $\| z \| = \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = 1 \Rightarrow \| z \| = 1$

Ejemplo.- Probar que: $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

Solución

$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 0 + i = i \qquad \therefore \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

6.20. LOGARITMO EN C.-

La exponencial compleja $z = re^{i\theta}$ es un número complejo, el valor de θ se denomina argumento principal de z, que denotaremos por: $\theta = \arg(z)$

Para todo complejo $z\neq 0$, le corresponde solamente un valor de θ con $0\leq\theta\leq 2\pi$.

Sin embargo cualquier otro intervalo de longitud 2π por ejemplo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ se puede emplear.

El logaritmo complejo es la inversa de la exponencial compleja, es decir:

Si $z = re^{i\theta}$ es un número complejo $\Rightarrow \exists\ w \in C$ único tal que $r = \| z \|$ y $\theta = \arg(z)$

Generalizando se tiene: $$\boxed{\text{Ln } z = w = \ln r + i(\theta + 2k\pi)}$$

El valor principal de $\ln z$ es el que se obtiene cuando $k = 0$, es decir: V.P. de $\ln z = \ln r + i\theta$

Ejemplo.- Hallar $\ln z$, donde $z = 1 - i$

Solución

$$z = 1 - i \Rightarrow r = \| z \| = \sqrt{2},\ \ tg\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\ln z = \ln(1 - i) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi) = \ln\sqrt{2} + (\frac{7}{4} + 2k)\pi i$$

y el V.P. de $\ln z = \ln\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4} i$

6.21. EXPONENCIAL COMPLEJA GENERAL.-

Sean z_1 y z_2 donde $z_1 \neq 0$, entonces consideremos la exponencial compleja $w = z_1^{\,z_2}$, aplicando logaritmos en base natural se tiene:

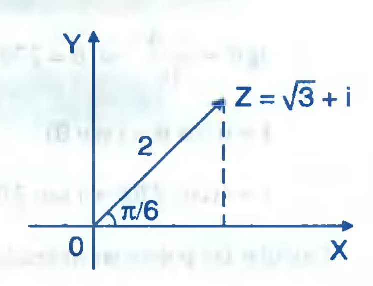
$\ln w = \ln z_1^{\,z_2} = z_2 \ln z_1$, y por definición se tiene: $\boxed{w = e^{z_2 \ln z_1}}$

6.22. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Obtener la forma polar o trigonométrica de los siguientes números complejos.

a) $z=\sqrt{3}+i$

Solución



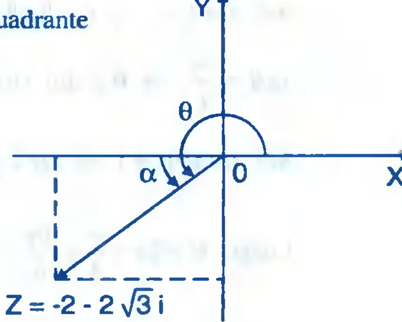
Sea $z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

Donde $r = \|z\| = 2$ y $\text{tg}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$

$z=\sqrt{3}+i=2(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{6})$

b) $z=-2-2\sqrt{3}i$

Solución



$r = \|z\| = 4$ y $\text{tg}\,\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} \Rightarrow \theta \in$ 3er cuadrante

sea $\alpha \,/\, \text{tg}\,\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

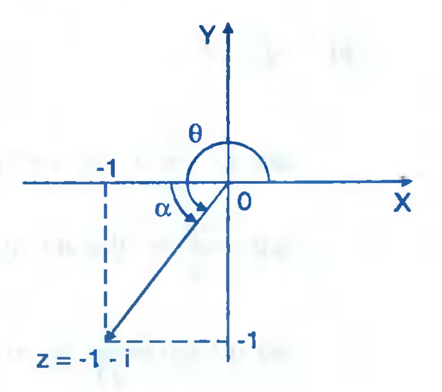
Luego $\theta = 180° + \dfrac{\pi}{3} = 240°$

Como $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$z = 4(\cos 240° + i\,\text{sen}\,240°)$

c) $z = -1 - i$

Solución



$z = -1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{-1}{1} \Rightarrow \theta \in$ 3er cuadrante

Sea $\alpha \,/\, \text{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

Luego $\theta = 180° + 45° = 225°$

$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ entonces $z = \sqrt{2}(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°)$

d) $z = -4i$

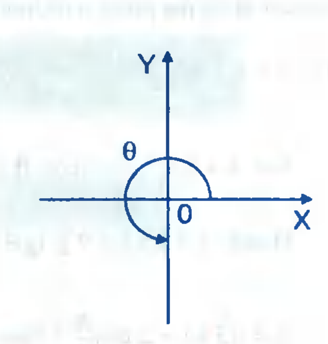
Solución

$r = \|z\| = 4$

$$tg\theta = \frac{-4}{0} \Rightarrow \theta = 270°$$

$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$z = 4(\cos 270° + i\,\text{sen}\,270°)$



(2) Calcular las potencias indicadas

a) $(1-i)^5$

Solución

Sea $z = 1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}$

$$tg\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta \in \text{4to cuadrante}$$

Sea $\alpha / tg\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Luego $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$$(1-i)^5 = r^5(\cos 5\theta + i\,\text{sen}\,5\theta) = 4\sqrt{2}(\cos\frac{35}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{35}{4}\pi)$$

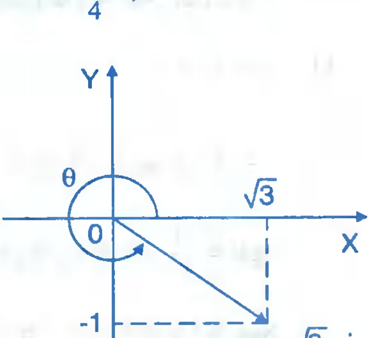
b) $(\sqrt{3}-i)^6$

Solución

Sea $z = \sqrt{3} - i \Rightarrow r = \|z\| = 2$

$$tg\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \in \text{4to cuadrante}$$

Sea $\alpha / tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$



Luego $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$$(\sqrt{3} - i)^6 = r^6(\cos 6\theta + i\,\text{sen}\,6\theta) = 64(\cos 11\pi + i\,\text{sen}\,11\pi)$$

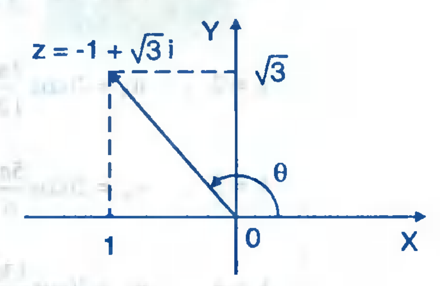
c) $(-1+\sqrt{3}i)^7$

Solución

Sea $z = -1+\sqrt{3}i \Rightarrow$ r = || z || = 2

$\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow$ θ∈ 2to cuadrante

Sea α / $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$



Luego $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$(-1+\sqrt{3}\;\; i)^7 = 128(\cos\frac{14\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{14\pi}{3})$$

3 Efectuar las operaciones indicadas.

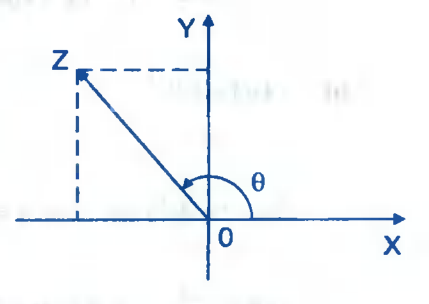
a) $(-128+128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{8}}$

Solución

Sea $z = -128+128\sqrt{3}i \Rightarrow$ r = || z || = 256

$\text{tg}\,\theta = \frac{128\sqrt{3}}{-128} \Rightarrow \theta \in$ 2do. cuadrante

Sea α / $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$



Luego $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$(-128+128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{8}} = r^{\frac{1}{8}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{\theta+2k\pi}{8}) \quad \text{donde} \quad k = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

$$(-128+128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{8}} = (256)^{\frac{1}{8}}(\cos\frac{2\pi+6k\pi}{24} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi+6k\pi}{24})$$

para $k = 0$, $w_1 = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12})$

$k = 1$, $w_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3})$

$k = 2$, $w_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12})$

$k = 3$, $w_4 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6})$

$k = 4$, $w_5 = 2(\cos\frac{13\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{12})$

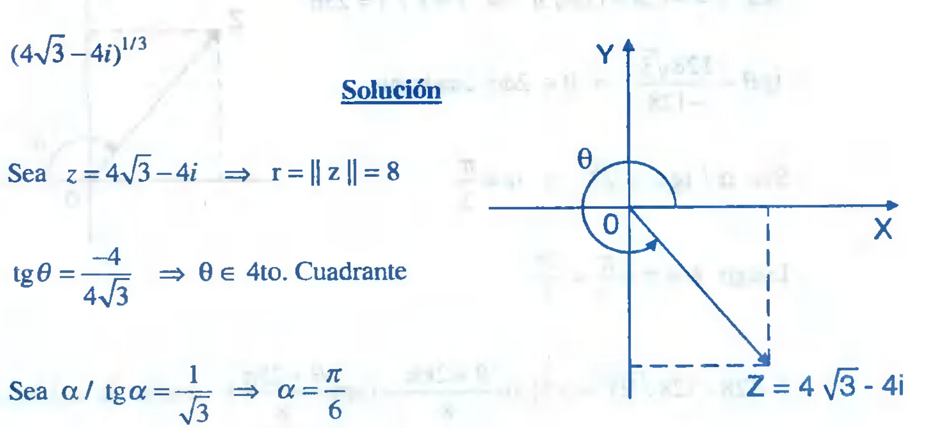
$k = 5$, $w_6 = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3})$

$k = 6$, $w_7 = 2(\cos\frac{19\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{19\pi}{12})$

$k = 7$, $w_8 = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6})$

b) $(4\sqrt{3}-4i)^{1/3}$

Solución



Sea $z = 4\sqrt{3}-4i \Rightarrow r = \|z\| = 8$

$\text{tg}\,\theta = \frac{-4}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \in$ 4to. Cuadrante

Sea α / $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Luego $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$$(4\sqrt{3} - 4i)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{3})$$

$$(4\sqrt{3} - 4i)^{\frac{1}{3}} = 2(\cos\frac{11\pi + 12k\pi}{18} + i\,\text{sen}\frac{11\pi + 12k\pi}{18})$$

para k = 0 , $w_1 = 2(\cos\frac{11\pi}{18} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{18})$

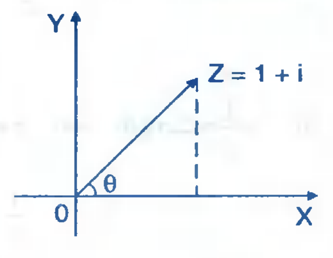
k = 1 , $w_2 = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{6})$

k = 2 , $w_3 = 2(\cos\frac{35\pi}{18} + i\,\text{sen}\frac{35\pi}{18})$

4 Demostrar que: $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{n\pi}{4})$

Solución

Sea $z = 1 + i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}$



$\text{tg}\,\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

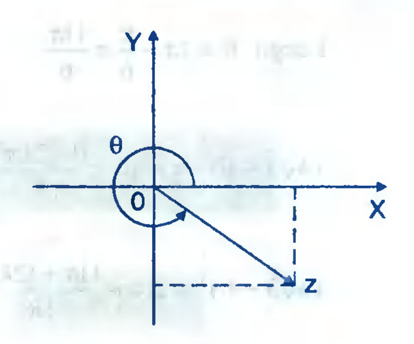
$$(1+i)^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{n\pi}{4})$$

5 Demostrar que: $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6} - i\,\text{sen}\frac{n\pi}{6})$

Solución

Sea $z=\sqrt{3}-i \Rightarrow r=\|z\|=2$



$\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta\in$ 4to. Cuadrante

Sea α / $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}$

Luego $\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$ o $\theta=-\frac{\pi}{6}$

$$(\sqrt{3}-i)^n=2^n(\cos n\theta+i\operatorname{sen} n\theta)=2^n[\cos(-\frac{n\pi}{6})+i\operatorname{sen}(-\frac{n\pi}{6})]=2^n[\cos\frac{n\pi}{6}-i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}]$$

(6) Calcular $(1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)^n$

Solución

$$1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})$$

$$(1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)^n=[2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})]^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{n\alpha}{2})$$

(7) Demostrar que: Sí $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$. Entonces $z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos(m\theta)$

Solución

Sí $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow z=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$

$$\frac{1}{z}=\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta$$

aplicando MOIVRE se tiene: $z^m=\cos m\theta+i\operatorname{sen} m\theta$

$$\frac{1}{z^m}=\cos m\theta-i\operatorname{sen} m\theta \qquad \text{Sumando}$$

$$z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta$$

8 Usando la fórmula de MOIVRE, demostrar las siguientes fórmulas:

a) $\operatorname{sen} 2x = 2\cos x \operatorname{sen} x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Solución

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^2 = \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x \quad \text{... (1)}$$

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^2 = \cos^2 x + 2i\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + i(2\cos x \operatorname{sen} x) \quad \text{... (2)}$$

de (1) y (2) se tiene: $\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + i(2\cos x \operatorname{sen} x)$

De donde: $\operatorname{sen} 2x = 2\cos x \operatorname{sen} x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

b) $\operatorname{sen} 3x = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$; $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x$

Solución

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x \quad \text{... (1)}$$

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x \operatorname{sen} x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x - i \operatorname{sen}^3 x$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x + (3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x)i \quad \text{... (2)}$$

de (1) y (2) se tiene:

$$\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x + (3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x)i$$

de donde por igualdad se tiene: $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x$

$$\operatorname{sen} 3x = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$$

9 Desarrollar $\cos^3 \theta$ en términos de sen θ y cos θ de múltiplos de θ.

Solución

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = 8\cos^3\theta$$

$$8\cos^3\theta = (z+\frac{1}{z})^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3(z+\frac{1}{z}) = 2\cos 3\theta + 6\cos\theta$$

$$\cos^3\theta = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$$

(10) Probar que: $\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta = \frac{1}{16}(\operatorname{sen}5\theta - \operatorname{sen}3\theta - 2\operatorname{sen}\theta)$

Solución

$$(2i\operatorname{sen}\theta)^3(2\cos\theta)^2 = (z-\frac{1}{z})^3.(z+\frac{1}{z})^2 = (z^5-\frac{1}{z^5})-(z^3-\frac{1}{z^3})-2(z-\frac{1}{z})$$

$$32i\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta = 2i\operatorname{sen}5\theta - 2i\operatorname{sen}3\theta - 4i\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta = \frac{1}{16}(\operatorname{sen}5\theta - \operatorname{sen}3\theta - 2\operatorname{sen}\theta)$$

(11) Demostrar que la raíz cuadrada de $z = a + bi$ es el complejo $x + iy$, donde:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\|z\|+a}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{\|z\|-a}{2}}$$

Solución

Si $x+iy$ es la raíz cuadrada de $z = a + bi \Rightarrow (x+iy)^2 = a+bi$, aplicando módulos

$\|x+iy\|^2 = \|a+bi\|$ y por definición se tiene:

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ es decir $x^2 + y^2 = \|z\|$ **... (1)**

Como $(x+iy)^2 = a+bi$, desarrollando $x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi$, por igualdad

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & \dots (2) \\ 2xy = b & \dots (3) \end{cases}$$, sumando y restando (1) y (2)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \|z\| \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = \|z\|+a \\ 2y^2 = \|z\|-a \end{cases}, \text{ de donde } x = \pm\sqrt{\frac{\|z\|+a}{2}}, \; y = \pm\sqrt{\frac{\|z\|-a}{2}}$$

Aquí se obtiene cuatro pares de miembros reales, de los cuales seleccionamos dos de la ecuación (3).

Si $b > 0 \Rightarrow$ x, y se eligen con el mismo signo.

Si $b < 0 \Rightarrow$ x, y se eligen con distinto signo.

(12) Resolver la ecuación en **C**; $z^2 = 2i$

Solución

Resolver esta ecuación es equivalente a sacar la raíz cuadrada.

Luego $a = 0,\ b = 2,\ \| z \| = 2$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\| z \| + a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2+0}{2}} = \pm 1 \quad ; \quad y = \pm\sqrt{\frac{\| z \| - a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2-0}{2}} = \pm 1$$

como $b > 0 \Rightarrow z = \sqrt{2i} = x + iy = \pm(1+i)$

(13) Resolver la ecuación $z^2 = -3-4i$

Solución

Como $\| z \| = \sqrt{9+16} = 5$, $a = -3$, $b = -4$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\| z \| + a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5-3}{2}} = \pm 1 \quad ; \quad y = \pm\sqrt{\frac{\| z \| - a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5+3}{2}} = \pm 2$$

Como $b < 0$, x e y se eligen con signo distinto, es decir (1,-2) , (-1,2)

Luego. $z = \sqrt{-3-4i} = \pm(1-2i)$

(14) Escribir las expresiones siguientes en la forma: a + bi

a) $e^{1+\frac{\pi}{3}i}$

Solución

$$e^{1+\frac{\pi}{3}i} = e.e^{\frac{\pi}{3}i} = e[\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}] = e(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

b) $e^{1-\frac{\pi}{4}i}$

Solución

$$e^{1-\frac{\pi}{4}i}=e.e^{-\frac{\pi}{4}i}=e[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{4})]$$

$$=e[\cos\frac{\pi}{4}-i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}]=e(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}e}{e}(1-i)$$

(15) Si $z=6e^{\frac{\pi}{3}i}$, Hallar el valor numérico de $|e^{iz}|$

Solución

Como $z=6e^{\frac{\pi}{3}i}=6[\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}]=3+3\sqrt{3}i$

$\Rightarrow\ iz=-3\sqrt{3}+3i$, de donde $e^{iz}=e^{-3\sqrt{3}+3i}=e^{-3\sqrt{3}}(\cos 3+i\,\text{sen}\,3)$

$\|e^{iz}\|=e^{-3\sqrt{3}}$

(16) Si z = x + iy, Hallar el lugar geométrico $\arg(z+1)=\frac{\pi}{3}$

Solución

Se conoce $\arg(z)=\theta\ \Rightarrow\ \arg(z)=\text{arctg}(\frac{y}{x})$

Sí z = x + iy $\Rightarrow$ z + 1 = x + 1 + iy

$\arg(z+1)=\text{arctg}(\frac{y}{x+1})=\frac{\pi}{3}$, de donde $\frac{y}{y+1}=\text{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ y=\sqrt{3}(x+1)$

(17) Si z = x + iy, halle la ecuación del lugar geométrico $\arg(z^2)=-\frac{\pi}{4}$

Solución

Si $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\arg(z^2) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow y^2 = x^2 + 2xy$$

(18) Demostrar que: $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + ... + \operatorname{sen} nx = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2})x.\operatorname{sen}(\frac{nx}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}$

Solución

T = sen x + sen 2x + ... + sen nx

S = cos x + cos 2x + ... + cos nx

Sea $\alpha = \cos\frac{x}{2} + i\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, luego

$$\alpha^2 = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

$$\alpha^4 = \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x$$

$\alpha^{2n} = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$, entonces

$$s + iT = \alpha^2 + \alpha^4 + ... + \alpha^{2n} = \alpha^2\left(\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1}\right) = \alpha^2\alpha^n \frac{(\alpha^n - \alpha^{-n})}{\alpha(\alpha - \alpha^{-1})} = \alpha^{n+1}\left(\frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha - \alpha^{-1}}\right)$$

donde $\alpha^{n+1} = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)$

$$\alpha^n = \cos\frac{n}{2}x + i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}$$

$\alpha^{-n} = \cos\frac{n}{2}x - i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}$, por tanto $S + iT = \cos\left(\frac{n+1}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)\dfrac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$

$$\therefore \quad \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+...+\operatorname{sen} nx=\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

(19) Calcular

a) $\ln i^{1/2}$

Solución

Se conoce que: $\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi)$ donde $r=\|z\|=1$ y $\theta=\operatorname{arctg}(z) \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

$$\ln i^{1/2}=\frac{1}{2}\ln i=\frac{1}{2}(\ln 1+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)) \Rightarrow \ln i^{1/2}=\frac{i}{2}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$$

b) $\ln(1+i)$

Solución

$$z=1+i \Rightarrow \gamma=\|z\|=\sqrt{2}, \quad \theta=\operatorname{arctg}(\frac{-1}{1})=315^0=\frac{7\pi}{4}$$

$$\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i(\frac{7\pi}{6}+2k\pi)$$

(20) Resolver la ecuación $x^{2i}-2x^i+2=0$

Solución

$x^i=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$ de donde se obtiene $x^i=1+i \vee x^i=1-i$

aplicando logaritmo se tiene: $i\ln x=\ln(1+i) \vee i\ln x=\ln(1-i)$

$$i\ln x=\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi) \vee i\ln x=\ln\sqrt{2}+i(\frac{7\pi}{4}+2k\pi)$$

$$\ln x=\frac{\pi}{4}2k\pi-i\ln\sqrt{2} \vee \ln x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi-i\ln\sqrt{2}$$

$x=e^{\frac{\pi}{4}-i\ln 2} \vee x=e^{\frac{7\pi}{4}-i\ln 2}$ donde $k=0$.

6.23. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

① Calcular z^4 siendo:

a) $z = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha - i\operatorname{sen}\alpha}$, a ∈ R, $0 \le \alpha \le 2\pi$

b) $z = (-\sqrt{3} + i)^{-1}$ **c)** $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3} - i}$

Rpta. **a)** $-\dfrac{a^4}{\operatorname{sen}^4\alpha}$ **b)** $-\dfrac{1}{32} + i\dfrac{\sqrt{2}}{32}$ **c)** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$

② Sabiendo que n = 3k demostrar que: $(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^n + (-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^n = 2$

③ Calcular 1 + 2 cos x + 2 cos 2x + ... + 2 cos nx, sug. $\cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$

④ Si z = x + iy, hallar la ecuación del lugar geométrico definida por $\arg(z+2) = \dfrac{\pi}{6}$

Rpta. $y = \dfrac{x+2}{3}$

⑤ Si z = x + iy, hallar las ecuaciones del lugar geométrico definido por:

a) $\arg(\dfrac{z+2}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$ **Rpta.** $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$

b) $\arg(\dfrac{z-1}{x-2}) = \dfrac{\pi}{2}$ **Rpta.** $x^2 + y^2 + x - 2 = 0$

⑥ Si z = x + iy, demostrar que el lugar geométrico $\arg(\dfrac{z-1}{z-2}) = \dfrac{\pi}{6}$ es una circunferencia, hallar su centro y radio.

⑦ Demostrar que: $\arg(\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}) = \dfrac{\pi}{2}$, entonces $\| z_1 \| = \| z_2 \|$

8 Demostrar que: $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$

9 Efectuar las operaciones siguientes:

a) $(-1+i)^6$ **b)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{10}$ **c)** $(1+\sqrt{3}i)^7$

d) $(2+2i)^{-4}$ **e)** $(1+i)^{-8}$

10 Calcular las raíces siguientes:

a) $\sqrt[4]{1-i}$ **b)** $\sqrt[3]{-i}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$

d) $\sqrt[3]{8}$ **e)** $\sqrt[4]{-4}$ **f)** $\sqrt[6]{1}$

g) $\sqrt[3]{i}$ **h)** $\sqrt[5]{2-2\sqrt{3}i}$ **i)** $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$

j) $(-1)^{4/5}$ **k)** $(1+\sqrt{3}i)^{5/6}$ **l)** $(-2i)^{2/3}$

ll) $\sqrt[3]{2+i}$ **m)** $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ **n)** $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$

ñ) $\sqrt[6]{\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}}$ **o)** $(2\sqrt{3}-2i)^{1/2}$ **p)** $(2+2\sqrt{3}i)^{1/3}$

q) $(-4+4i)^{1/5}$ **r)** $(-16i)^{1/4}$ **s)** $(i)^{2/3}$

11 Demostrar que:

a) $e^{2\pi i}=1$ **b)** $e^{i\pi}=-1$ **c)** $e^{2\pm 3\pi i}=-e^2$

d) $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$ **e)** $e^{z+\pi i}=-e^z$ **f)** $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$

12 Sí $z=re^{i\theta}\ \Rightarrow\ \bar{z}=re^{-i\theta}$

(13) Hallar el módulo de los números complejos

a) e^{2+i} b) e^{2-3i} c) e^{3+4i} d) e^{-3-4i}

Rpta. a) e^2 b) e^2 c) e^3 d) e^{-3}

(14) Expresar en la forma binómica los números complejos.

a) $e^{\frac{\pi}{6}i}$ b) $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ c) $e^{\frac{\pi}{4}i}+e^{-\frac{\pi}{4}i}$

d) $2ie^{2\pi i}$ e) $6e^{\frac{\pi}{6}i}$ f) $\dfrac{1+e^{\frac{\pi}{4}i}}{1-e^{\frac{\pi}{4}i}}$

(15) Hallar la solución de las ecuaciones en C. $z^2=-2\sqrt{3}+2i$

Rpta. $z=\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(16) Simplificar las expresiones siguientes:

a) $Z=\dfrac{1+\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta}$ b) $z=(\dfrac{1+i\,\text{tg}\,\theta}{1-i\,\text{tg}\,\theta})^n+(\dfrac{1-\text{ictg}\,\theta}{1+\text{ictg}\,\theta})^n$

c) $z=(\dfrac{i^{-i^i}+1}{i^{-i}-1})^n+(\dfrac{(-1)^{(-1)^{(-1)}}+i}{(-i)^{-i}+1})^n$

(17) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $e^{2z-1}=1$ b) $e^Z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ c) $i^i=e^{\ln z+i}$

d) $\ln z=2+\dfrac{\pi}{4}i$ e) $\cos z=1-i$ f) $\text{sen}\,Z=2+\dfrac{i}{4}$

(18) Dado $z=-\|-1+2i\|+\sqrt{2}i$, Hallar $\ln z$ **Rpta.** $\ln\bar{z}=\ln\sqrt{7}+i(\theta+2k\pi)$

(19) Determinar los valores principales de las exponenciales siguientes:

a) $z=\sqrt{2}-i$ b) $z=(1-i\sqrt{3})^{1/i}$ c) $z=(3i)^{2i}$

Rpta. a) $z=e^{(1-i)\ln(\sqrt{2}-i)}$ b) $z=e^{\frac{11}{6-i\ln 2}}$ c) $e^{-\frac{3\pi}{2}+3i\ln 22}$

(20) Calcular: a) $[\frac{1}{2}e^{-1-3i}]^{3\pi i}$ b) $(1-i)^{4i}$

c) $(1+i)^{-i}$ d) $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{-i}$

(21) Calcular: a) ln(-i) b) $\ln i^{1/3}$

c) ln(1 + i) d) $\ln(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$

(22) Obtener los siguientes complejos.

a) $z=\sum_{k=0}^{100} i^k$ b) $z=\prod_{k=1}^{100} i^k$

Sugerencia: $\prod_{k=1}^{100} i^k = i^{\sum_{k=1}^{100} k}$

(23) Sí $\cos z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$, $\operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Demostrar que:

a) cos z = cos x . cosh y – i sen x . senh y

b) sen z = sen x . cosh y + i cos x . senh y

(24) Si $z_1 , z_2 \in C$, Probar que: $\arg(z_1 z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)+2k\pi$ k=0,±1,±2,...

(25) Demostrar que: a) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

6.24. MISCELANIA DE EJERCICIOS.-

(1) Hallar las soluciones reales de las ecuaciones

a) (3x – i)(2 + i) + (x – iy)(1 + 2i) = 5 + 6i **Rpta.** $x=\frac{20}{17}$, $y=\frac{-36}{17}$

b) $(x-iy)(a-bi)=i^5$, donde a y b son números reales $|a|\neq|b|$.

Rpta. $x=\frac{b}{a^2-b^2}$, $y=\frac{a}{a^2-b^2}$

c) (4 + 2i)x + (5 – 3i)y = 13 + i **Rpta.** x = 2, y = 1

(2) Si z = (a,b) y w = (c,d) resolver el sistema: iz + (1+ i)w = 3 + i ; $(1+i)z-(6-i)w=4$

(3) Demostrar que: $\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i$ (x es real)

(4) Expresar x e y mediante u y v sí: $\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{u+iv}=1$, x,y,u,v son reales

Rpta. $x=\frac{u^2+v^2-u}{(1-u)^2+v^2}$, $y=-\frac{v}{(1-u)^2+v^2}$

(5) Comprobar que:

a) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}=\frac{i}{2}$ b) $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}=-\frac{2i}{5}$

(6) Si z = x + iy demostrar que: $z.\overline{z}=x^2+y^2$

(7) Demostrar si θ es un ángulo arbitrario, entonces: $\frac{1}{\cos\theta\pm i\,\text{sen}\,\theta}=\cos\theta\mp i\,\text{sen}\,\theta$

(8) Demostrar que:

a) $\overline{z+3i}=\overline{z}-3i$ b) $\overline{iz}=-i\overline{z}$ c) $\overline{\left(\frac{(2+i)^2}{3-4i}\right)}=1$

(9) Si a y b son números reales, Demostrar que: $\left\| \frac{a+bi}{b+ai} \right\| = 1$

(10) ¿Cuál es $\text{Re}(z^2 - 2z)$ e $\text{Im}(z^3 - 2z)$ de donde $z = x + iy$?

(11) Comprobar que si $\| z_2 \| \neq \| z_3 \|$ se cumple $\left\| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right\| \leq \left\| \frac{\| z_1 \|}{\| z_2 \| - \| z_3 \|} \right\|$

(12) Demostrar que: $\left\| \frac{\| z_1 \| - \| z_2 \|}{\| z_1 \| + \| z_2 \|} \right\| \leq 1, \quad Z_1 + Z_2 \neq 0$

(13) Reducir las siguientes expresiones algebraicas a + bi

a) $(1-i)^2 + (2+i)^2$ **Rpta.** 3 + 2i

b) $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$ **Rpta.** 2i

c) $\frac{1+i}{(3-i)(1-i)}$ **Rpta.** $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i$

d) $\frac{1+i}{(2+i)(1+2i)}$ **Rpta.** 1 – i

e) $\frac{3+2i}{1+i}$ **Rpta.** $\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$

f) $\frac{1}{i}$ **Rpta.** -i

g) $\frac{z+2}{z+1}$ Sí z = x + iy **Rpta.** $\frac{x^2+y^2+3x+2}{x^2+y^2+2x+1} - \frac{iy}{x^2+y^2+2x+1}$

h) (1 + i)(2 – i)(1 – i) **Rpta.** 4 – 2i

i) $\frac{12+8i}{2-3i} + \frac{52+13i}{13i}$ **Rpta.** 1 – 4i

j) $\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$ **Rpta.** $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

k) $\dfrac{i\,\text{Re}(Z)}{\text{Im}(iZ)}$ **Rpta.** i

(14) Reducir las siguientes expresiones a la forma a + bi

a) $[1+\text{Re}(z)+i\,\text{Im}(z)]\,[1-\text{Re}(z)-i\,\text{Im}(z)]$ **Rpta.** $[1-\text{Re}(z)]^2+[\text{Im}(z)]^2$

b) $[\dfrac{34}{(1-4i)(5+3i)}]^2$ **Rpta.** 2i

c) $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i)$ **Rpta.** $12+5i$

d) $\dfrac{4+i}{2-i}+\dfrac{5-3i}{3-i}$ **Rpta.** $\dfrac{16}{5}+\dfrac{3}{5}i$

e) $\dfrac{1}{1+4i}+\dfrac{1}{4-i}$ **Rpta.** $\dfrac{5}{17}-\dfrac{3i}{7}$

f) $\dfrac{(1+i)(1+i)}{3-i}-\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$ **Rpta.** -2i

g) $\dfrac{(5+5i)(-\sqrt{3}+3i)}{-\sqrt{3}-i}$ **Rpta.** $5\sqrt{3}(1-i)$

h) $(-\sqrt{3}+3i)^6$ **Rpta.** 1728

i) $(2\sqrt{3}+2i)(3-3\sqrt{3}i)$ **Rpta.** $12\sqrt{3}-12i$

j) $\dfrac{8+8\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}+2i}$ **Rpta.** $2\sqrt{3}+2i$

k) $(\dfrac{4+4\sqrt{3}i}{2+2i})^2$ **Rpta.** $4\sqrt{3}+4i$

l) $\dfrac{1}{(a+bi)^2}+\dfrac{1}{(a-bi)^2}$ **Rpta.** $\dfrac{2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$

(15) Hallar el valor absoluto o módulo de:

a) $\dfrac{(4-3i)(\frac{1}{2}+i)^4}{(1-\frac{3}{4}i)(-3+4i)}$ **Rpta.** 1

b) $(\dfrac{1+i}{1-i})^8$ **Rpta.** 1

c) $(3+4i)^3(-1-i)$

d) $(3+4i)(\sqrt{6}+i)(2-\sqrt{3}i)$ **Rpta** 35

e) $\dfrac{(6+7i).(4-2i)}{4+2i}.(-\dfrac{1}{7+6i})$ **Rpta.** 1

f) $\dfrac{(1+i).(\sqrt{3}+7i)}{4+6i}$ **Rpta.** $\sqrt{2}$

(16) Si $z = 1 + i$, representar geométricamente los puntos z, $\dfrac{1}{z}$, z^2, z^{-3}

(17) Si $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-i$, representar geométricamente los puntos z_1, z_2, z_1+z_2, z_1z_2, $(\dfrac{\overline{z_2}}{z_1})$

(18) Si $z = x + iy$, hallar:

a) $Re(\dfrac{1}{Z})$ **b)** $Im(\dfrac{1}{z})$ **c)** $Im(z^3)$

d) $Re(\dfrac{1}{z^2})$ **e)** $Re(z^2+z)$ **f)** $Re(-iz)$

g) $Im(4iz^2-6z+8i)$ **h)** $Re(\dfrac{1}{Z}-i)$



19 Demostrar que sí $(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^n = 1$ entonces $(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)^n = 1$

20 Siendo z un número complejo demuéstrese que:

a) $\|z\| \geq |\text{Re}(z)|$ **b)** $\|z\| \geq |\text{Im}(z)|$

c) $\|z\|^2 \geq 2\,|\text{Re}(z)|\,|\text{Im}(z)|$ **d)** $\sqrt{2}\,\|z\| \geq |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$

21 Si $w = \dfrac{i(1-z)}{1+z}$, Demuestre que $\|z\| < 1$ implica $\text{Im}(w) > 0$

22 Indicar que líneas se determina por las siguientes ecuaciones:

a) $\text{Im}(z^2) = 2$ **Rpta.** Hipérbola xy = 1

b) $\text{Re}(z^{-2}) = 1$ **Rpta.** Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

c) $\text{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{2}$ **Rpta.** Circunferencia $x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$

d) $\text{Im}(z^2 - \bar{z}) = 2 - \text{Im}(z)$ **Rpta.** Hipérbola xy = -1

e) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$ **Rpta.** Hipérbola $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$

f) $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$ **Rpta.** $(x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$

g) $\|z - i\| + \|z + i\| = 4$ **Rpta.** Elípse $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

h) $\|z\| - 2\,\text{Im}(z) = 6$ **Rpta.** Hipérbola $\dfrac{(y+\frac{9}{4})^2}{(\frac{3}{4})^2} - \dfrac{x^2}{(\frac{5}{2})^2} = 1$

i) $3\,\|z\| - \text{Re}(z) = 12$ **Rpta.** Elípse $\dfrac{(x-\frac{3}{2})^2}{(\frac{3}{2})^2} + \dfrac{y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$

j) $\| z-1+i \| = 1$

k) $Re(\bar{z}-i) = 2$

l) $\| z-i \| = \| z+i \|$

ll) $\| z-i \| = \frac{Re(z)}{2}$

o) $Re(z^2 - \bar{z}) = 0$

m) $Re(1+z) = \| z \|$

n) $\| z+i \| = 2\, Im(z)$

ñ) $Re(z-i) = 2$

(23) Determinar la región que describe la región siguiente:

a) $\|z-1\| \le Re(z)$

b) $0 < Re(z) \le Im(z)$

c) $0 \le \arg(z) \le \frac{\pi}{2}$

d) $0 < \arg(\frac{1}{z}) \le \frac{\pi}{2}$

e) $\| z-2+i \| \le 1$

f) $\| 2z+3 \| > 4$

g) $0 \le \arg(z) \le \frac{\pi}{4}$

h) $\| z-4 \| > \| z \|$

i) $| Re(z) | \le \| z \|$

j) $Re(\frac{1}{z}) \le \frac{1}{2}$

k) $\| z \| > 2 + Im(z)$

l) $\| z \| - Re(z) \le 0$

ll) $\frac{1}{4} \le Re(\frac{1}{z}) + Im(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}$

m) $1 \le \| z+2+i \| \le 2$

n) $\| z-1 \| \le \| z-i \|$

(24) Determinar la forma polar de

a) $z = \frac{2}{1+\sqrt{3}i}$

b) $z = \frac{i}{-2-2i}$

c) $z = (\sqrt{3}-i)^6$

(25) Usar la forma polar de un número complejo para demostrar que:

a) $(1+3i)^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$

b) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$

(26) Demostrar que si c es una constante real positiva, entonces la ecuación representa un círculo sí $c \neq 1$ y una recta sí $c = 1$.

 **27** Demostrar que z = a + bi es una solución de la ecuación:

$$z^3-4(a+bi)z^2+5(a^2-b^2+2abi)z-2(a^3-3ab^2+i(3a^2b-b^3))=0$$

 **28** Demostrar que si $\|z-4i\|+\|z+4i\|=10$ es una elipse.

29 Calcular las potencias indicadas.

a) $(2-2i)^7$ **Rpta.** $2^{10}(1+i)$

b) $(\sqrt{3}-3i)^6$ **Rpta.** 1728

c) $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^{40}$ **Rpta.** $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$

d) $(\frac{1-i}{1+i})^8$ **Rpta.** 1

e) $(\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i})^6$ **Rpta.** $\frac{i}{512}$

f) $(\frac{6\sqrt{3}+6i}{6+6i})^{-3}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}-\frac{i}{4}$

g) $(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})^4$ **h)** $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^8$

 **30** Hallar las raíces indicadas:



a) $\sqrt[3]{1+i}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$ **c)** $\sqrt[5]{2+2\sqrt{3}i}$

d) $\sqrt[5]{-32}$ **e)** $\sqrt[4]{16-16\sqrt{3}i}$ **f)** $(4\sqrt{3}-4i)^{1/3}$

g) $(16\sqrt{2}+\frac{32}{\sqrt{2}})^{1/5}$ **h)** $(\frac{1+i}{1-i})^{1/6}$ **i)** $\sqrt[4]{-1}$

j) $\sqrt[4]{-i}$ **k)** $\sqrt[4]{8-5\sqrt{3}i}$

l) $\sqrt[5]{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6})}$ **ll)** $[(2^4+2^4 i)(2^4-2^4 i)]^{1/9}$

31 Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $z^2+9=0$ **b)** $z^2-2z+2=0$

c) $z^2+2z+5=0$ **d)** $z^5+1=0$

e) $z^8+1=0$ **f)** $z^6-1=0$

g) $z^{12}-1=0$ **h)** $z^8-1=0$

i) $z^{12}+1=0$ **j)** $z^6-1=0$

32 Aplicando la fórmula de Movre expresar las potencias de sen θ y cos θ las siguientes funciones de ángulos múltiples.

a) sen 4θ **Rpta.** $4\,\text{sen}\,\theta.\cos^3\theta-4\,\text{sen}^3\theta\cos\theta$

b) cos 4θ **Rpta.** $\cos^4\theta-6\cos^2\theta.\text{sen}^2\theta+\text{sen}^4\theta$

c) sen 5θ **Rpta.** $5\,\text{sen}\,\theta.\cos^4\theta-10\cos^2\theta.\text{sen}^3\theta+\text{sen}^5\theta$

d) cos 5θ **Rpta.** $\cos^5\theta-10\cos^3\theta.\text{sen}^2\theta+5\cos\theta.\text{sen}^4\theta$

33 Si $e^{iz}=\cos z+i\,\text{sen}\,z$, demuéstrese que:

a) $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ **b)** $\text{sen}\,z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

34 Verificar que:

a) senh iz = i sen z **b)** cosh iz = cos z

c) sen iz = i senh z **d)** cos iz = cosh z

e) i tgh z = tg(iz) **f)** ctg iz = -i ctgh z

35 Calcular a y b en: $[e^{-\ln(\frac{i}{1-\sqrt{-2}})}]^2 + a + bi = e^{\frac{\pi}{2}i}$



36 Demuéstrese que:

a) $e^{\overline{i\theta}} = e^{-i\theta}$

b) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

c) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

d) $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

e) $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

f) $\cos^3\theta = \dfrac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$

g) $\cos i\bar{z} = \cos iz$

h) $\operatorname{sen} i\bar{z} \neq \operatorname{sen} iz$

i) senh (z + i) = - senh z

j) cos(z + iπ) = - cosh z



37 Efectuar las operaciones indicadas y expresar el resultado en la forma x + iy.

a) $3e^{i\frac{\pi}{3}}.2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

b) $5e^{\frac{2\pi}{3}i}.4e^{\frac{7\pi}{6}i}$

c) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}.3e^{\frac{\pi}{2}i}$

d) $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{4}i}$

e) $\dfrac{2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}{3e^{\frac{\pi}{2}i}}$

f) $\dfrac{7e^{i\theta}}{3e^{i\pi}}$



38 Determinar todas las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) cos z = 2

b) sen z = cosh 4

c) $\cosh z = \dfrac{1}{2}$

d) senh z = i

e) cosh z = -2



39 Expresar en la forma compleja los siguientes ejercicios.

a) $\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{5}}$ **Rpta.** $\dfrac{11}{17} - i\dfrac{\sqrt{15}}{17}$

b) $\dfrac{(1+i)^2}{4-i}$ **Rpta.** $-\dfrac{10}{17}+\dfrac{6}{7}i$

c) $\sqrt{-7+24i}$ **Rpta.** $\pm(3+4i)$

d) $z=1-i+\dfrac{3-4i}{1-\sqrt{3}i+\dfrac{(3-\sqrt{3})-(1+3\sqrt{3})i}{3-i}}$

e) $\dfrac{7-i}{3+i}\cdot\dfrac{3-i}{7+i}\cdot\dfrac{5-2i}{5+2i}$ f) $\dfrac{5+3i}{4+i\dfrac{1-i}{4-i+\dfrac{2i}{3-i}}}$

40 Determinar los $z \in C$ tales que $\operatorname{Im}(z+\dfrac{1}{z})=0$

41 Hallar todos los valores reales de x y los correspondientes de w que hacen que el número complejo $w=(x-i)[(x+3)-9i]$ sea imaginario puro.

Rpta. $x=\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}$, $w=(12-15\sqrt{5})i$

$x=\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}$, $w=(12+15\sqrt{5})i$

42 Si $z \in C$, Demostrar que $(\bar{z})^2=\overline{z^2}$

43 Hallar el módulo de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$ **Rpta.** $\dfrac{5}{34}$ b) $\dfrac{(6+4i)(3-i)}{5+i}$ **Rpta.** $2\sqrt{5}$

44 Demostrar que: $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$

45 Calcular:

a) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$ b) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{8}$ c) $(\sqrt{3}-3i)^6$

d) $(\sqrt{3}+i)^6$ **e)** $(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i})^{12}$ **f)** $(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})^{16}$

g) $\frac{(3+3i)^{n-3}}{(3-3i)^n}$

(46) Hallar todos los valores de las raíces de las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[3]{i}$ **b)** $\sqrt[4]{-1}$ **c)** $\sqrt{3+4i}$ **d)** $\sqrt{21i-20}$

(47) Expresar el siguiente número complejo en su forma polar:

$$z=1-i+\frac{3-4i}{1-\sqrt{3}i+\frac{(3+\sqrt{3})-(1+3\sqrt{3})i}{3-i}}$$

Rpta. $z=2.8e^{i\alpha}$ donde $\alpha=\text{arctg}(-0.416)$

(48) Dado $z=(5-i)^4(1+i)$ probar que: $\frac{\pi}{4}=4\,\text{arctg}\frac{1}{5}-\text{arctg}\frac{1}{239}$

(49) Hallar **a)** $\text{Re}(e^{iz^2})$ **b)** $\text{Im}(e^{i\bar{z}_2})$

Rpta. **a)** $e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$ **b)** $e^{-2xy}\,\text{sen}(y^2-x^2)$

(50) Hallar una fórmula reducida para:

a) 1 + cos x + cos 2x + ... + cos (n –1)x

b) sen x + sen 2x + ... + sen (n – 1)x

c) cos x + cos 3x + ... + cos (2n – 1)x

d) sen x + sen 3x + ... + sen (2n – 1)x

Rpta. **a)** $\frac{1-\cos x-\cos nx+\cos(n-1)x}{2(1-\cos x)}$ **b)** $\frac{\text{sen}(n-1)-x\,\text{sen}\,nx+\text{sen}\,x}{2(1-\cos x)}$

(51) Hallar z, tal que $\| e^{iz} \| < 1$

(52) Hallar **a)** $\text{Re}(e^{iz^n})$ **b)** $\text{Im}(e^{iz^n})$, $n \in Z$

(53) Sea $z = x + iy = re^{i\theta}$, Demostrar que: a) $r^n \cos n\theta = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{4} x^{n-4} y^4 + \dots$

b) $r^n \operatorname{sen} n\theta = \binom{n}{1} x^{n-1} y - \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \dots$

(54) Calcular z^4 siendo:

a) $z = (-\sqrt{3+i})^{-1}$ **Rpta.** $-\frac{1}{32} + \frac{i\sqrt{3}}{32}$

b) $z = \frac{1+i}{\sqrt{3-i}}$ **Rpta.** $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

(55) Determinar los valores principales de las expresiones siguientes:

a) $w = (\sqrt{2} - i)^{1-i}$ **b)** $w = (3i)^{2i}$ **c)** $w = (1 - i\sqrt{3})^{1/i}$

Rpta. **a)** $\rho = \sqrt{3}$ **b)** $\varphi = \operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ **c)** $w = e^{(1-i)\ln(\sqrt{2}-i)}$

(56) Obtener el valor principal de z en los siguientes casos:

a) $(1-i)^z = 1$ **b)** $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^z = i$

Rpta. **a)** $z = 0$ **b)** $z = \frac{3}{2}$

(57) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^{2i} - 2x^i + 2 = 0$ **b)** $x^{2\sqrt{3}i} - x^{\sqrt{3}i} + 1 = 0$

Rpta. **a)** $x = e^{\frac{\pi}{4} - i\ln 2}$, $x = e^{\frac{7\pi}{4} - i\sqrt{2}}$

b) $x = e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{4}i}$, $x = e^{\frac{5\sqrt{3}\pi}{9}i}$

(58) Probar que $z \neq 0$

a) $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$ **b)** $\operatorname{Im}(\frac{1}{z}) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) > 0$

CAPITULO VII

TEORÍA DE ECUACIONES

7.1. DEFINICIÓN.-

Llamaremos polinomios de grado n en la variable x a la expresión algebraica definido en la forma:

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \qquad ... (1)$$

donde n ≥ 0 es entero positivo y $a_0, a_1, ..., a_n$ son números arbitrarios llamados coeficientes y además $a_n \neq 0$ es llamado coeficiente principal.

Al coeficiente a_0 le llamaremos término independiente; a cualquier número constante diferente de cero le llamaremos polinomio de grado cero.

Él número cero es el único polinomio constante que su grado no está definido.

Cuando en un polinomio el coeficiente principal es $(a_n = 1)$ le llamaremos polinomio mónico.

Ejemplo.- El polinomio $P(x)=x^4+2x^3+4x+5$, es un polinomio mónico.

NOTACIÓN.-

1. Con K, denotamos a uno de los conjunto Z, Q, R, ó C.
2. A los polinomios denotaremos en la forma P(x), Q(x), R(x), H(x), etc.
3. El conjunto de todos los polinomios en x, con coeficientes en K, denotaremos por K[x], es decir: $K[x]=\{P(x)/P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x-1+...+a_1 x+a_0,\ n\geq 0,\ a_i \in K\}$
4. Si el grado del polinomio P(x) es n denotaremos en la forma grad (P(x)) = n.

En el conjunto K[x] definimos dos operaciones, una de suma (+) y la otra de producto (.) es decir:

Sí $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ y $Q(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0$

son dos polinomios en x, entonces:

$$P(x)+Q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_i+b_i)x^i+...$$

$P(x).Q(x)=c_0+c_1 x+...+c_{m+n}x^{m+n}$, donde

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ . \\ . \\ . \\ c_j = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + ... + a_j b_0 \\ . \\ . \\ . \\ c_{m+n} = a_n b_n \end{cases}$$

Ejemplo.- Hallar la suma y el producto de los polinomios:

$$P(x)=5+3x-x^2 \quad \text{y} \quad Q(x)=4+6x-10x^4$$

Solución

a) $P(x)+Q(x)=(5+3x-x^2)+(4+6x^2-10x^4)$

$$=(5+4)+(3+0)x+(-1+6)x^2+(0+0)x^3+(0-10)x^4 = 9+3x+5x^2-10x^4$$

b) $P(x).Q(x)=(5+3x-x^2).(4+6x^2-10x^4)$

$$=20+12x+26x^2+18x^3-56x^4-30x^5+10x^6$$

7.2. ECUACIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO.-

Las ecuaciones polinómicas de segundo grado son de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \qquad \text{... (1)}$$

donde a,b,c $\in$ R

7.3. RAICES Y DISCRIMINANTES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA.-

Para determinar la naturaleza de las raíces de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, a $\neq 0$ completamos cuadrados, es decir:

$ax^2 + bx + c = 0$ como $a \neq 0$ entonces $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ sacando la raíz cuadrada $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ de donde

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{... (2)}$$

ahora denotaremos por $\Delta = b^2 - 4ac$, al cuál le llamaremos discriminante.

Luego analizamos sus raíces.

1ro. Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos raíces reales distintas x_1, x_2 dadas por la fórmula (2).

En este caso siempre es posible factorizar $ax^2 + bx + c$ como $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2do. Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, tiene una raíz real (doble) $x_1 = x_2 = x = -\frac{b}{a}$.

Luego en este caso la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es un cuadrado perfecto.

$$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2$$

3ro. Si $\Delta=b^2-4ac<0$, en este caso se tiene:

Si a > 0, $ax^2+bx+c>0$, $\forall$ x $\in$ R, nunca se anula

Si a < 0, $ax^2+bx+c<0$, $\forall$ x $\in$ R, nunca se anula

Por lo tanto la ecuación $ax^2+bx+c=0$, no tiene soluciones reales.

7.4. RELACIÓN ENTRE RAICES Y COEFICIENTES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA.-

Suponiendo que x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2+bx+c=0$, entonces:

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$$

$$\boxed{x^2+bx+c=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2}$$

por el criterio de la identidad se tiene: $\boxed{\begin{array}{l} x_1+x_2=-b \\ x_1.x_2=c \end{array}}$

por lo tanto:

a) La suma de las raíces de una ecuación cuadrática es igual al coeficiente de x, con el signo cambiado.

b) El producto de ambas raíces es igual al término independiente.

Ejemplo.- Hallar el valor de k para que la suma de las raíces de la ecuación $2kx^2-(12k+1)x+2=0$ sea 7.

Solución

A la ecuación $2kx^2-(12k+1)x+2=0$, escribiremos así.

$x^2 - \frac{12k+1}{2k}x + \frac{1}{k} = 0$, suponiendo que x_1, x_2 son las raíces entonces:

$$x_1 + x_2 = -b = \frac{12k+1}{2k} = 7 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

Ejemplo.- Hallar el valor de k para que el producto de las raíces de la ecuación $(k-2)x^2 - x + 2k = 0$ sea 6.

Solución

Suponiendo que x_1, x_2 sean las raíces. $x_1.x_2 = c$ (c término independiente)

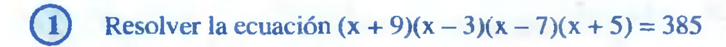
para esto a la ecuación $(k-2)x^2 - 5x + 2k = 0$ escribiremos en la forma:

$$x^2 - \frac{5}{k-2} + \frac{2k}{k-2} = 0$$

$$x_1.x_2 = c = \frac{2k}{k-2} = 6 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

7.5. ECUACIONES REDUCIBLES A CUADRÁTICAS.-

Como su nombre lo indica son aquellas ecuaciones que no son cuadráticas, pero que mediante una sustitución adecuada se transforma en una ecuación cuadrática, ilustraremos estos casos con los ejemplos siguientes:



(1) Resolver la ecuación (x + 9)(x – 3)(x – 7)(x + 5) = 385

Solución

Primeramente ordenaremos los factores.

$[(x + 9)(x - 7)][(x - 3)(x + 5)] = 385 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + 2x - 6)(x^2 + 2x - 15) = 385$

observamos que la sustitución adecuada es $m = x^2 + 2x$

$(m - 63)(m - 15) = 385 \quad \Rightarrow \quad (m^2 - 78m + 945) = 385$

$m^2 - 78m + 560 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m-8)(m-70) = 0$ de donde m = 8, m = 70

$$\begin{cases} x^2+2x-8=0 \\ x^2+2x-70=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=4 & , & x_2=-2 \\ x_3=-1+\sqrt{71} & , & x_4=-1-\sqrt{71} \end{matrix}$$

(2) Resolver la ecuación $\frac{x^2-9}{x}-\frac{5x}{x^2-9}=4$

Solución

A la ecuación $\frac{x^2-9}{x}-\frac{5x}{x^2-9}=4$, expresaremos así:

$\frac{x^2-9}{x}-\frac{5}{\frac{x^2-9}{x}}=4$, observamos que la sustitución adecuada es $\frac{x^2-9}{x}=m$,

entonces $m-\frac{5}{m}=4$, de donde $m^2-4m-5=0 \Rightarrow$ (m–5)(m+1)=0 $\Rightarrow$ m=5, m= -1

Sí m = 5 $\Rightarrow \frac{x^2-9}{x}=5 \Rightarrow x^2-5x-9=0$

$x=\frac{5\pm\sqrt{25+36}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$, de donde $x_1=\frac{5+\sqrt{61}}{2}$, $x^2=\frac{5-\sqrt{61}}{2}$

Sí m = -1 $\Rightarrow \frac{x^2-9}{x}=-1 \Rightarrow x^2+x-9=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+36}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$, de donde $x_3=\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$, $x_4=\frac{-1-\sqrt{37}}{2}$

7.6. ECUACIONES IRRACIONALES.-

Las ecuaciones irracionales son aquellas ecuaciones que contienen radicales. La solución se obtiene por el método de eliminación de los radicales, luego se resuelve la ecuación resultante por los métodos conocidos, sin embargo, al sustituir todas las raíces posibles en la ecuación original puede resultar que algunas de estas raíces no sean solución de la ecuación original debido a que el método de eliminación de radicales requiere elevar a una determinada potencia a los dos miembros de una igualdad y en éste procedimiento puede introducirse raíces que no corresponde a la ecuación original.

Veremos algunos ejemplos.

Ejemplos.- Resolver las ecuaciones siguientes:

① $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-2}$

Solución

El método consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1})^2=(\sqrt{3x-2})^2$

$2x-3+x-1+2\sqrt{2x-3}\sqrt{x-1}=3x-2$, simplificando

$\sqrt{2x-3}\sqrt{x-1}=1$, elevando al cuadrado $2x^2-5x+3=1 \Rightarrow 2x^2-5x+2=0$

$(2x-1)(x-2)=0$ de donde $x=\dfrac{1}{2}$, $x=2$, ahora comprobando se tiene:

para $x=\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{1-3}+\sqrt{\dfrac{1}{2}-1}=\sqrt{\dfrac{3}{2}-1} \Rightarrow \sqrt{2}i+\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}i\neq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ falso

$x=2$, $\sqrt{4-3}+\sqrt{2-1}=\sqrt{6-2} \Rightarrow 1+1=2=2$ verifica

Luego el conjunto solución es $\{2\}$

② $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$

Solución

Cuando en un miembro se encuentra dos radicales y en el otro miembro no hay radical es más fácil, pasar un radical al otro miembro de elevar al cuadrado, es decir:

$\sqrt{2x+8}=7-\sqrt{x+5}$, elevando al cuadrado

$2x+8=49-14\sqrt{x+5}+x+5$, simplificando

$x-46=-14\sqrt{x+5}$, elevando al cuadrado

$x^2-288x+1136=0 \Rightarrow (x-284)(x-4)=0$ de donde $x=4$, $x=284$

ahora comprobaremos cual es la solución para x = 4, $\sqrt{8+8}+\sqrt{4+5}=4+3=7$

x = 284, $\sqrt{568+8}+\sqrt{284+5}=24+17\neq 7$ falso

por lo tanto la solución es {4}

7.7. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN.-

Consideremos dos polinomios P(x) y Q(x) dados por $P(x)=2x^5+3x^4+5x^3+6x^2-x+6$; $Q(x)=x^3+7x^2+8x-1$ ahora efectuaremos la división de P(x) entre Q(x), y para esto adecuamos cada polinomio en potencia decreciente de x.

$$\begin{array}{l|l}
P(x)=2x^5+3x^4+5x^3+6x^2-x+6 & x^2-3x+2=Q(x) \\
\quad -2x^5+6x^4-4x^3 & 2x^3+9x^2+28x+72=C(x) \\
\hline
\qquad 9x^4+x^3+6x^2-x+6 & \\
\qquad -9x^4+27x^3-18x^2 & \\
\hline
\qquad\quad 28x^3-12x^2-x+6 & \\
\qquad\quad -28x^3+84x^2-56x & \\
\hline
\qquad\qquad 72x^2-57x+6 & \\
\qquad\qquad -72x^2+216x+144 & \\
\hline
\qquad\qquad\quad 159x-138=R(x) &
\end{array}$$

COMENTARIO.-

Primero se divide $2x^5$ entre x^2, que resulta $2x^3$; luego se multiplica $2x^3$ por Q(x) y el resultado con signo cambiado, se escribe debajo de P(x) y se efectúa la suma se repite este proceso tomando $P(x)-2x^3Q(x)$ en lugar de P(x), hasta obtener el residuo R(x), en este ejemplo, el cociente es $C(x)=2x^3+9x^2+28x+72$ y el residuo es R(x) = 159x – 138

Luego el resultado podemos indicar escribiendo:

$$2x^5+3x^4+5x^3+6x^2-x+6=(x^3-3x+2)(2x^3+9x^2+28x+72)+159x-138 \qquad \text{ósea}$$

P(x) = Q(x).C(x) + R(x)

Con este ejemplo de ilustración mencionaremos el teorema del algoritmo de la división.

7.8. TEOREMA (ALGORITMO DE LA DIVISIÓN PARA POLINOMIOS).-

Dado dos polinomios P(x), Q(x) ∈ K[x], donde n ≥ 1 es el grado de P(x) y m es el grado de Q(x) con 1 ≤ m ≤ n entonces existen dos polinomios de modo que:

P(x) = Q(x).C(x) + R(x) donde el grado de R(x) es menor que el grado de Q(x).

7.9. LA DIVISIÓN SINTÉTICA.-

La división sintética es un procedimiento práctico para encontrar el cociente y el resto de la división de un polinomio P(x) entre x – r, a la división sintética también se le conoce con el nombre de "Regla de Ruffini".

Supongamos que $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ de grado n, dividiendo entre el polinomio x – r. de grado 1, entonces por el teorema del algoritmo existe $Q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1$ de grado n – 1 y R(x) un polinomio constante tal que:

$$P(x) = Q(x).(x-r) + R(x) \qquad \textbf{... (1)}$$

Ahora reemplazando el polinomio Q(x) y R(x) en (1)

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+..+a_1 x + a_0 = (b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_2 x + b_1)(x-r)+R$$

$$= b_{n-1}x^n + (b_{-2}-rb_{n-1})x^{n-1}+(b_{n-3}-rb_{n-2})x^{n-2}+...+(b_1-rb_2)x+(R-rb_1)$$

por igualdad de polinomios se tiene:

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - rb_{-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - rb_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ a_1 = b_1 - rb_2 \\ a_0 = R - rb_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + rb_{n-1} \\ b_{n-3} = a_{n-2} + rb_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ b_1 = a_1 + rb_2 \\ R = a_0 + rb_1 \end{cases}$$

estas relaciones nos permite expresar los coeficientes sucesivos de C(x) y R(x) en términos de los coeficientes de P(x) y C(x), previamente determinado:

a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0	r
	rb_{n-1}		rb_3	rb_2	rb_1	
$b_{n-1}=a_n$	b_{n-2}		b_2	b_1	R	

Los números de la primera fila son los coeficientes de P(x) dispuestos en forma decreciente a las potencias de x, como $a_n = b_{n-1}$, ésta lo bajamos a la tercera fila y el producto rb_{n-1} se escribe como primer elemento de la segunda fila y b_{n-2} es la suma de los elementos que están encima de el y así sucesivamente de la tercera fila de ésta tabla escribiremos el cociente $C(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1$ y el resto $R(x)=a_0+rb_1$.

OBSERVACIÓN.-

1ro. Cuando el divisor es un polinomio de segundo grado factorizable de la forma (x – a)(x – b), también es aplicable la división sintética.

Es decir: Si P(x) es el polinomio dividendo y (x – a) es el polinomio Divisor, entonces por la división sintética podemos encontrar el cociente $C'(x)$ y el resto R_1 tal que $P(x)=(x-a)C'(x)+R_1$ **... (1)**

Ahora tomamos a $C'(x)$ como polinomio dividendo y (x – b) como polinomio divisor de donde encontramos el cociente C(x) y el resto R_2 tal que:

$$C'(x)=(x-b).C(x)+R_2 \quad \textbf{... (2)}$$

Luego sustituyendo (2) en (1) se tiene: $P(x)=(x-a)(x-b).C(x)+R_2(x-a)+R_1$

de donde se observa que C(x) es el cociente y el resto es $R=R_2(x-a)+R_1$

EJEMPLO DE APLICACIÓN.-

Por división sintética, hallar el cociente y resto de la división $P(x)=2x^4-7x^3+12x^2-11x-7$ entre $2x^2-3x-2$

Solución

Factorizando $2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2)$, ahora hallaremos sucesivamente $C'(x)$ y C(x) de la división de P(x) entre (x – 2)(2x + 1).

	2	-7	12	-11	-7	
		4	-6	12	2	2
$C'(x)$	2	-3	6	1	-5	
		-1	2	-4		$-\frac{1}{2}$
C(x)	2	-4	8	-3		

$C(x) = 2x^2 - 4x + 8$, $R(x) = -3(x-2) - 5 = 1 - 3x$

2do. Cuando el divisor es un polinomio de segundo grado factorizable o no factorizable o un polinomio de grado mayor que 2, también se aplica la división sintética y esto se realiza por el método de "HORNER".

7.10. TEOREMA DEL RESTO.-

Si al polinomio P(x) se divide entre x – r, siendo R una constante arbitraria, hasta obtener el cociente C(x) y su residuo R entonces P(r) = R, en efecto: por el algoritmo de la división se tiene:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - r \\ \hline R & C(x) \end{array} \quad \text{entonces } P(x) = C(x).(x - r) + R$$

Como ésta igualdad es válida para todo x, en particular es válida para x = r, de donde:

$$P(r) = (r - r).C(r) + R$$

$$= 0.C(r) + R = R \text{ entonces } P(r) = R$$

Ejemplo.- Hallar el residuo de la división de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3$ entre x – 1

Solución

Por el teorema del resto se tiene P(-1) = R

R = P(-1) = -1 – 3 + 3 – 3 = -4 ⇒ R = -4

7.11. TEOREMA DEL FACTOR.-

Si P(x) es un polinomio, entonces diremos que r es una raíz de P(x) si y sólo si x – r es un factor de P(x).

Demostración

Por el teorema del algoritmo de la división se tiene: P(x) = (x – r).C(x) + R

Por el teorema del resto se tiene que R = P(r), pero como r es una raíz de P(x) (o un cero) es decir: P(r) = (r – r).C(r) + R = R = 0 ⇒ R = 0

Por lo tanto P(x) = (x – r).C(x)

Luego x – r es un factor de P(x) recíprocamente, si se tiene que x – r es un factor de P(x) ⇒ P(x) = C(x).(x – r), como el resto es R = P(r) = 0 entonces P(r) = C(r).(r – r) = 0, esto quiere decir que r es una raíz de P(x).

7.12. RAICES DE UN POLINOMIO.-

De acuerdo al teorema del factor se conoce que dado un polinomio P(x) con grado n ≥ 1, un número r se llama raíz o cero del polinomio P(x) sí P(r) = 0.

Ejemplo.-Sea $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ el número r=-1 es raíz de P(x) puesto que P(-1)=0.

7.13. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA.-

Todo polinomio P(x) de grado n ≥ 1, definido por $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$ tiene por lo menos una raíz la cual puede ser real o compleja.

Por ahora admitiremos válida la proposición, ya que no es posible dar una demostración elemental de el.

7.14. NÚMERO DE RAICES DE UNA ECUACIÓN POLINÓMICA.-

a) **TEOREMA.-** Todo polinomio de P(x) de grado n ≥ 1 de la forma $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, tiene exactamente n raíces.

Demostración

Mediante el teorema fundamental del álgebra se tiene: que el polinomio P(x) tiene al menos una raíz r_1 y por el teorema del factor tenemos: $\boxed{P(x)=(x-r_1).C_1(x)}$

donde $C_1(x)$ es el cociente de la división de P(x) por $x-r_1$.

En forma similar $C_1(x)$ tiene una raíz r_2, de modo que al aplicar el teorema del factor se tiene: $C_1(x)=(x-r_2).C_2(x)$ por lo tanto $P(x)=(x-r_1).(x-r_2).C_2(x)$

ahora comentamos: Como cada nuevo cociente es de grado menor en una unidad al del cociente anterior, podemos continuar el proceso hasta finalmente obtener:

$$P(x)=(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n) \qquad \textbf{... (1)}$$

donde cada r_i es una raíz o cero de P(x).

Si en la ecuación (1) hacemos x = r, donde r es un número arbitrariamente tenemos:

$$P(r)=(r-r_1).(r-r_2)...(r-r_n)$$

Si $r \neq r_i$, ∀i ninguno de los factores $(r-r_i)$ es cero, donde $a_n \neq 0$, P(r) ≠ 0 y r no es un cero de P(x), se concluye que hay exactamente n raíces con lo cual el teorema queda demostrado.

7.15. DEFINICIÓN.-

A la raíz r de un polinomio P(x) diremos que es de multiplicidad m ≥ 1 sí $P(x)=(x-r)^m C(x)$, donde C(x) ≠ 0.

Ejemplo.- El polinomio $P(x)=(x+)(x-2)^4(x-3)^2$ es de grado 7 y sus raíces son −1,2,2,2,2,3,3, en donde $r_1=-1$ es una raíz simple

$r_2=2$ es una raíz de multiplicidad 4

$r_3=3$ es una raíz de multiplicidad 3.

7.16. RAICES ENTERAS.-

Si en la ecuación polinomica P(x) = 0, tenemos raíces entera, entonces estas raíces son divisores del término independiente.

Ejemplo.- Hallar las raíces enteras de $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

Solución

Las posibles raíces enteras son los divisores de 3 es decir, ±1, ±3, ahora comprobaremos

P(1) = 2 − 1 − 4 + 3 = 0 ⇒ P(1) = 0 ⇒ r = 1

Es una raíz entera P(-1) = -2 − 1 + 4 + 3 = 4 ≠ 0 no es raíz

P(3) = 54 − 9 − 12 + 3 = 36 ≠ 0 no es una raíz

Ejemplo.- Hallar las raíces enteras de $P(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$

Solución

Las posibles raíces enteras son los divisores de 6, es decir:

±1, ±2, ±3, ±6, ahora probaremos:

P(1) = 1 + 1 − 1 − 7 − 6) −12

P(-1) = 1 − 1 − 1 + 7 − 6 = 0

P(2) = 16 + 8 − 4 − 14 − 6 = 0

P(-2) = 16 − 8 − 4 + 14 − 6 = 12

P(3) = 81 + 27 − 9 − 21 − 6 = 62

P(-3) = 81 – 27 – 9 + 21 – 6 = 60

P(6) = 1296 + 216 – 36 – 42 – 6 = 1428

P(-6) = 1296 – 216 – 36 + 42 – 6 = 1080

Como P(-1) = 0 y P(2) = 0 entonces r = -1, r = 2 son las raíces enteras.

7.17. FORMA FACTORIZADA DE UN POLINOMIO.-

TEOREMA.- Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ se anula para $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ valores diferentes, entonces el polinomio P(x) puede expresarse en la forma: $P(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n)$

Demostración

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Si $x = r_1$ anula a P(x) entonces por el teorema del factor se tiene que $x - r_1$ es un factor de P(x), por lo tanto $P(x) = (x - r_1).C_1(x)$

Si $x = r_2$ es una raíz de P(x) $\Rightarrow$ $P(r_2) = (r_2 - r_1).C_1(r_2)$ $\Rightarrow$ $P(r_2) = 0 \Rightarrow$ $x - r_2$ es un factor de $C_1(x)$.

Luego $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)C_2(x)$

En forma similar para $x = r_3$ se tiene:

$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)C_3(x)$

.

.

.

$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n)C_n(x)$

donde $a_n = C_n(x)$; por lo tanto: $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n)$

7.18. RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES Y LAS RAICES DE UNA ECUACIÓN POLINÓMICA.-

Consideremos la ecuación polinómica P(x) = 0, de grado n,. es decir:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, con $a_n \neq 0$

como $a_n \neq 0$, a al ecuación podamos escribir en la forma:

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + ... + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

$$\boxed{x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n = 0} \quad ...(1)$$

por descomposición factorial se tiene: $(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n) = 0$ **... (2)**

donde $r_1, r_2, ..., r_n$ son las raíces de la ecuación P(x), ahora efectuaremos el producto de la ecuación (2) e igualando coeficientes con la ecuación (1).

$\sum_{i=1}^{n} r_i = r_1 + r_2 + ... + r_n = -b_1$, suma de raíces

$\sum_{i<j}^{n} r_i r_j = r_1 r_2 + r_2 r_3 + ... + r_{n-1} r_n = b_2$, suma de los productos de las raíces de dos en dos.

$\sum_{i<j<h}^{n} r_i r_j r_h = r_1 r_2 r_3 + ... + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -b_3$ suma de los productos de las raíces de tres en tres.

$r_1 r_2 r_3 .... r_n = (-1)^n b_n$, producto de todas las raíces, casos particulares:

para n = 2, ósea: $P(x) = x^2 + x + b = 0$ **... (1)**

$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) = 0$, r_1, r_2 son raíces efectuando las operaciones.

$P(x) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$ **... (2)**

igualando coeficientes de (1) y (2) se tiene: $\begin{cases} r_1 + r_2 = -a \\ r_1 r_2 = b \end{cases}$

ahora veremos para n = 3, ósea $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ **... (3)**

si r_1, r_2, r_3 son las raíces de (3) entonces: $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$

efectuando operaciones se tiene: $P(x)=x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x-r_1r_2r_3$

igualando los coeficientes con la ecuación (3)

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3=a \\ r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=b \\ r_1r_2r_3=c \end{cases}$$

7.19. NATURALEZA DE LAS RAICES DE POLINOMIOS RALES.-

Mediante el teorema fundamental del álgebra, se conoce que todas las raíces de un polinomio con coeficientes reales se encuentra C, en donde algunas de estas raíces son reales y las otras complejas.

Veremos enseguida que las raíces, tanto complejas como irracionales, se presentan por pares.

a) TEOREMA.- Consideremos un polinomio real no constante $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ sí un número complejo r = α + iβ, β ≠ 0, α, β ∈ R, r es una raíz de P(x) = 0 entonces su conjugado $\bar{r}=\alpha-i\beta$ también es raíz de P(x) = 0.

Demostración

Si r es una raíz entera de P(x) = 0, esto es:

$a_n(r)^n+a_{n-1}(r)^{n-1}+...+a_1(r)+a_0=0$, como los a_i son reales, tomando conjugados se tiene: $a_n(\bar{r})^n+a_{n-1}(\bar{r})^{n-1}+...+a_1(\bar{r})+a_0=0$, lo cual demuestra que $\bar{r}$ es una raíz de P(x) = 0.

b) COROLARIO.- Todo polinomio real P(x) con coeficientes reales y de grado impar, tiene por lo menos una raíz real.

Demostración

Sí n = 1 $\Rightarrow$ P(x) = ax + b, $a \neq 0$, $a,b \in R$

Entonces $x = -\frac{b}{a}$ es una raíz real de P(x)

Si $n \geq 3$ y $r_1 = \alpha + \beta_i$, $\beta \neq 0$ es una raíz de P(x).

Luego por el teorema (2.19) a), $r_2 = \alpha_1 - \beta_1 i$ también es una raíz de P(x), por lo tanto por el teorema del factor: $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q(x) = (x^2 - 2\alpha x + \beta^2 + \alpha^2)Q(x)$

donde el grado de Q(x) es $n - 2 \geq 1$, donde n – 2 es impar por ser n impar.

Razonando por inducción podemos afirmar que Q(x) tiene una raíz real que también es raíz de P(x).

c) **COROLARIO.-** A todo polinomio real P(x) con coeficientes reales podemos escribirlo como un producto de factores lineales y cuadrático con coeficientes reales donde a cada factor lineal le corresponde un cero real y a cada factor cuadrático le corresponde un par de ceros complejos conjugados.

d) **TEOREMA.-** Si un binomio irracional cuadrático $a + \sqrt{b}$ es raíz del polinomio real: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con coeficientes racionales entonces el binomio irracional cuadrático $a - \sqrt{b}$ es también raíz de P(x)=0

Demostración

Como $r = a + \sqrt{b}$ es raíz de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, entonces se cumple: $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0$

Ahora aplicamos conjugada se tiene:

$a_n (\bar{r})^n + a_{n-1} (\bar{r})^{n-1} + ... + a_1 (\bar{r}) + a_0 = 0$, lo cual quiere decir que $\bar{r} = a - \sqrt{b}$ es raíz de P(x) = 0.

7.20. RAICES RACIONALES DE UN POLINOMIO.-

Consideremos un polinomio $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$, con $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, cuyos coeficientes son enteros.

Si él número racional $\frac{p}{q}$ es raíz de P(x) = 0 entonces P es divisor del término independiente a_0 y q es divisor exacto de a_n.

Ejemplo.- La ecuación polinómica $P(x)=9x^4-42x^3+13x^2+84x+36=0$ tiene cuatro raíces.

Las raíces enteras posibles son los divisores del término independiente 36; ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12, ±18, ±36 raíces fraccionarias posibles $\frac{p}{q}$ donde p es divisor de 36; q es divisor de 9: ±1, ±3, ±9 entonces las raíces posibles son $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{2}{9}$, $\pm\frac{4}{3}$, $\pm\frac{4}{9}$.

7.21. TEOREMA DEL LIMITE SUPERIOR DE LAS RAICES REALES (LAGRANGE).-

Si en la ecuación $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0 = 0$, de coeficientes reales, k representa el número de términos positivos o nulos anteriores al 1er. término negativo y G es el mayor valor absoluto de los coeficientes negativos, entonces toda raíz real de P(x)=0 es menor que $1+\sqrt[k]{\frac{G}{a_n}}$ (a_n es el coeficiente de x^n) es decir que $1+\sqrt[k]{\frac{G}{a_n}}$ es una cota superior de las raíces positivas del polinomio.

Ejemplo.- Hallar la cota superior de las raíces $P(x)=3x^5+7x^4-18x^3+5x^2-12x+1=0$ de acuerdo al criterio la cota superior es: $L=1+\sqrt[k]{\frac{G}{a_n}}$, donde $a_n=3$, k = 2, G= |-18| = 18, reemplazando

$$L=1+\sqrt{\frac{18}{3}}=1+\sqrt{6}\cong 4$$ cota superior.

7.22. VARIACIÓN DE SIGNOS DE UN POLINOMIO.-

Si en un polinomio ordenado en forma descendiente dos términos difieren en signo, se dice que dicho polinomio tiene una variación de signos.

Ejemplo.- $P(x)=8x^4+7x^3-2x^2-3x+5$, 2 variaciones

$P(x)=7x^3+8x^2+7x-1$, 1 variación

$P(x)=7x^2+5x+8$, ninguna variación

7.23. REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES.-

Si P(x) = 0 es una ecuación polinómica entera con coeficientes reales y con raíces reales, entonces:

i) Él número de raíces positivas con coeficientes reales es igual al número de variaciones de signos de dicho polinomio o es menor que este número en un número entero positivo par.

ii) El número de raíces negativos es igual al número de raíces positivas de P(x).

Ejemplo.- $P(x)=8x^5-7x^4+5x^3-2x^2-x+5=0$ tiene 4 variaciones de signo.

$P(-x)=-8x^5-7x^4-5x^3-2x^2+3x+5$ tiene 1 variación de signos

$$\begin{cases} 4^+ & 1^- & & \\ 2^+ & 1^- & 2 & \text{imaginarios} \\ 0 & 1^- & 4 & \text{imaginarios} \end{cases}$$

7.24. ECUACIONES BINÓMICAS.-

Una ecuación binómica es la que consta de dos términos de la forma.

$$x^n \pm a = 0$$

La solución de estas ecuaciones se encuentra pór medio del teorema de MOIVRE o por factorización.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $x^3+1=0$

Solución

Resolviendo por factorización se tiene:

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$ de donde $x+1=0 \lor x^2-x+1=0$

$x=-1 \lor x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, otra forma es por MOIVRE.

$x^3+1=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1} \Rightarrow z=-1+0i$

$r=\|z\|=1,\quad tg\theta=\frac{0}{-1}=0 \Rightarrow \theta=180°=\pi$

$x=\sqrt[3]{-1}=\|z\|^{\frac{1}{3}}\,[\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\theta+2k\pi}{3}]$, donde $k=0,1,2.$

$k=0,\quad x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k=1,\quad x_2=\cos 3\pi+i\,\text{sen}\,3\pi=-1+0.i=-1$

$k=2,\quad x_3=\cos\frac{7\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{7\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

7.25. ECUACIONES TRINÓMICAS BICUADRADAS.-

Estas ecuaciones son de la forma siguiente: $ax^{2n}+bx^n+c=0$

Estas ecuaciones se resuelven transformándolas en una ecuación cuadrática haciendo la sustitución siguiente $y=x^n \Rightarrow y^2=x^{2n}$

Luego la ecuación transformada será: $ay^2+by+c=0$

Ejemplo.- Resolver la ecuación siguiente: $x^{2/n}+6=5x^{1/n}$

Solución

La ecuación dada es: $x^{2/n} - 5x^{1/n} + 6 = 0$

sea $y = x^{1/n} \Rightarrow y^2 = x^{2/n}$, reemplazando $y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow (y-2)(y-3) = 0$ de donde

$$\begin{cases} y = 2 = x^{1/n} \\ y = 3 = x^{1/n} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2^n \\ x_2 = 3^n \end{array}$$

7.26. ECUACIONES RECÍPROCAS.-

A los polinomios que tienen la propiedad característica de tener los coeficientes extremos y los equidistantes de los extremos iguales se denomina polinomios recíprocos, es decir:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

la ecuación P(x) = 0 se denomina ecuación recíproca, el nombre es debido a que el cambio de x es por su recíproco $\frac{1}{x}$, la ecuación no se altera como caso particular veremos a un polinomio de 4to. grado.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

para resolver esta ecuación la transformamos al dividir por x^2, es decir:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$$

Sea $Z = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad Z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \quad \Rightarrow \quad Z^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Reemplazando se tiene: $a(Z^2 - 2) + bZ + c = 0$, de donde $aZ^2 + bZ + c - 2a = 0$

Que es una ecuación de segundo grado.

Ejemplo.- Resolver la ecuación siguiente: $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

Solución

Como la ecuación $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$ es recíproca entonces lo dividimos entre x^2, es decir:

$$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow (x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})-4=0 \qquad \ldots (1)$$

Sea $Z=x+\frac{1}{x} \Rightarrow Z^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \Rightarrow Z^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$

Reemplazando en la ecuación (1).

$$Z^2-2+Z-4=0 \Rightarrow Z^2+Z-6=0 \Rightarrow (Z+3)(Z-2)=0 \Rightarrow Z=-3,\ Z=2$$

como $x+\frac{1}{x}=Z$ entonces se tiene:

para $Z=2$, $x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ de multiplicidad 2

para $Z=-3$, $x+\frac{1}{x}=-3 \Rightarrow x^2+3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

7.27. ECUACIONES POLINÓMICAS DE TERCER ORDEN.-

Consideremos la ecuación polinómica de tercer grado

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0,\quad a_3\neq 0 \qquad \ldots (1)$$

como $a_3\neq 0$, entonces la ecuación (1) se transforma en la forma

$$x^3+bx^2+cx+d=0 \qquad \ldots (2)$$

La ecuación polinómica (2) lo transformamos en otra ecuación polinómica mediante la sustitución

$$x=y-\frac{b}{3}$$

es decir: $(y-\frac{b}{3})^3+b(y-\frac{b}{3})^2+c(y-\frac{b}{3})+d=0$

desarrollando y simplificando se tiene: $y^3+(c-\frac{b}{3})y+d-\frac{bc}{3}-\frac{b^3}{27}=0$

$$y^3+py+q=0 \qquad \dots (3)$$

donde $p=c-\frac{b}{3}$, $q=d-\frac{bc}{3}-\frac{b^3}{27}$

ahora hacemos y= A + B, de donde $y^3=A^3+B^3+3AB(A+B) \Rightarrow y^3=A^3+B^3+3ABy$

$$y^3-3ABy-(A^3+B^3) \qquad \dots (4)$$

comparando (3) y (4) se tiene: 3AB = -p , $A^3+B^3=-q$

como $B=-\frac{p}{3A} \Rightarrow A^3-\frac{p^3}{27A^3}=-q$, de donde $(A^3)^2+qA^3-\frac{p^3}{27}=0$

resolviendo como una ecuación cuadrática en A^3 se tiene: $A^3=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$

en forma similar para B^3, luego se tiene: $A^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$, $B^3=\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$

Sea α la raíz real y w, w^2 las raíces imaginarias de la unidad.

$$A=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} \to \alpha,\ \alpha w,\ \alpha w^2$$

$$B=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} \to \beta,\ \beta w,\ \beta w^2$$

Fórmula de Cardano

Luego $y = \begin{cases} y_1 = \alpha + \beta \\ y_2 = \alpha w + \beta w^2 \\ y_3 = \alpha w^2 + \beta w \end{cases}$

Como $x = y - \frac{b}{3}$, la soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \beta - \frac{b}{3} \\ x_2 &= \alpha w + \beta w^2 - \frac{b}{3} \\ x_3 &= \alpha w^2 + \beta w - \frac{b}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación de tercer grado: $x^3 - 9x^2 - 9x - 15 = 0$

Solución

Sea $x = y - (-\frac{9}{3}) = y + 3$, reemplazando en la ecuación:

$(y+3)^3 - 9(y+3)^2 - 9(y+3) - 15 = 0$, desarrollando y simplificando se tiene:

$y^3 - 36y - 96 = 0$, donde p = -36, q = -96

sea y = A + B siendo: $A = \sqrt[3]{\dfrac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$, $B = \sqrt[3]{\dfrac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$

$$A = \sqrt[3]{\frac{96 + \sqrt{9216 - 1728}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{96 + 8\sqrt{117}}{2}} = \sqrt[3]{4(12 + \sqrt{117})}$$

$$B = \sqrt[3]{\frac{96 - \sqrt{9216 - 1728}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{96 - 8\sqrt{117}}{2}} = \sqrt[3]{4(12 - \sqrt{117})}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{4(12 + \sqrt{117})} + \sqrt[3]{4(12 - \sqrt{117})}$$

$$y_2 = \sqrt[3]{4(12 + \sqrt{117})}\,w + \sqrt[3]{4(12 - \sqrt{117})}\,w^2$$

$$y_3 = \sqrt[3]{4(12 + \sqrt{117})}\,w^2 + \sqrt[3]{4(12 - \sqrt{117})}\,w$$

como $x = y - \frac{b}{3}$, la solución es: $x_1 = \sqrt[3]{4(12+\sqrt{117})} + \sqrt[3]{4(12-\sqrt{117})} + 3$

$$x_2 = \sqrt[3]{4(12+\sqrt{117})} + \sqrt[3]{4(12-\sqrt{117})} + 3$$

$$x_3 = \sqrt[3]{4(12+\sqrt{117})w^2} + \sqrt[3]{4(12-\sqrt{117})w} + 3$$

7.28. ECUACIONES CUÁRTICAS.-

La ecuación de cuarto grado es de la forma: $x^4 + 2px^3 + qx^2 + 2rx + s = 0$ **... (1)**

para obtener la solución, a la ecuación (1) descomponemos en 2 ecuaciones de segundo grado y estos se consigue de la siguiente manera:

Sumamos a cada miembro de la ecuación (1) $(ax+b)^2$

$$x^4 + 2px^3 + (q+a^2)x^2 + 2(r+ab)x + s + b^2 = (ax+b)^2 \quad \textbf{... (2)}$$

donde a, b son cantidades por determinar de tal manera que el primer miembro sea un cuadrado perfecto.

Supongamos que el primer miembro de la ecuación (2) sea igual a $(x^2 + px + k)^2$ es decir:

$$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2k)x^2 + 2pkx + k^2 = (ax+b)^2 \quad \textbf{... (3)}$$

comparando las ecuaciones (2) y (3) se tiene:

$\begin{cases} p^2 + 2k = q + a^2 \\ pk = r + ab \\ k^2 = s + b^2 \end{cases}$ eliminando a y b de estas ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} p^2 + 2k = q + a^2 \\ k^2 = s + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = p^2 + 2k - q \\ b^2 = k^2 - s \end{cases}$$

pk=r+ab $\Rightarrow$ pk – r = ab, elevando al cuadrado $(pk - r)^2 = a^2b^2 = (p^2 + 2k - q)(k^2 - s)$

efectuando operaciones y agrupando se tiene: $2k^3 - qk^2 + 2(pr - s)k - p^2 s + qs - r^2 = 0$

de esta ecuación siempre se halla un valor real para k y con estos valores se hallan los valores de a y b.

como $(x^2 + px + k)^2 = (ax + b)^2$, de donde

$(x^2 + px + k)^2 - (ax + b)^2 = 0$, por diferencia de cuadrados

$[x^2 + (p + a)x + (k + b)][x^2 + (p - a)x + (k - b)] = 0$

Luego los valores de x se obtienen de las dos ecuaciones cuadráticas.

$$x^2 + (p + a)x + k + b = 0$$
$$x^2 + (p - a)x + k - b = 0$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación cuadrática $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

Solución

Como la ecuación de cuarto grado es de la forma: $x^4 + 2px^3 + qx^2 + 2rx + s = 0$

entonces comparando con la ecuación dada se tiene:

p =1, q = -7, r = -4, s = 12, además se conoce que:

$2k^3 - qk^2 + 2(pr - s)k - p^2 s + qs - r^2 = 0$

al reemplazar los valores de p,q,r y s, se tiene: $2k^3 + 7k^2 - 32k - 112 = 0$

Luego por Ruffini se tiene el valor de k.

2	7	-32	-112	
	8	60	112	k = 4
2	15	28	0	

como $\begin{cases} a^2 = p^2 + 2k - q \\ b^2 = k^2 - s \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 4 \\ b = 2 \end{matrix}$

como las ecuaciones de cuarto grado se descompone

$$\begin{cases} x^2+(p-a)x+k-b=0 \\ x^2+(p+a)x+k+b=0 \end{cases}$$

reemplazando p =1, a = 4, b = 2, k = 4

$$\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2+5x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=1 \quad , \quad x_2=2 \\ x_3=-2, \quad x_4=-3 \end{matrix}$$

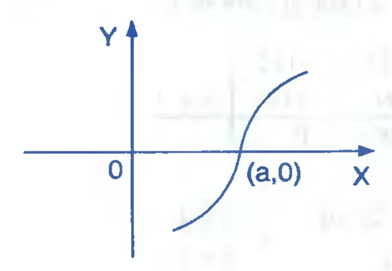
7.29. GRÁFICA DE UN POLINOMIO.-

Como un polinomio P(x) es una función continua, entonces las coordenadas de los puntos de la gráfica de un polinomio se determina dando valores reales a la variable x, luego calculamos dando valores reales a la variable x, los valores correspondientes a P(x) y por lo tanto la gráfica del polinomio P(x) es el conjunto de puntos $\{(x,P(x)) / x \in R\}$.

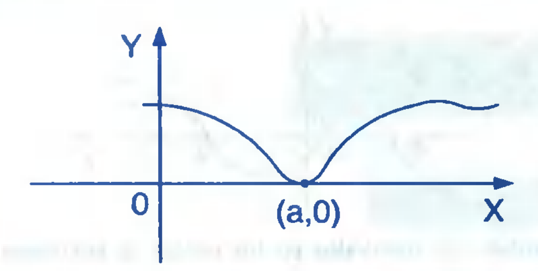
Ahora veremos algunos criterios que nos permita aproximar la gráfica de un polinomio evitando de ésta manera la forma laboriosa de tabular los puntos (x, P(x)).

En primer lugar, los puntos de la gráfica que corresponde a los ceros o raíces reales de un polinomio P(x) están sobre el eje X y son de la forma (x,0).

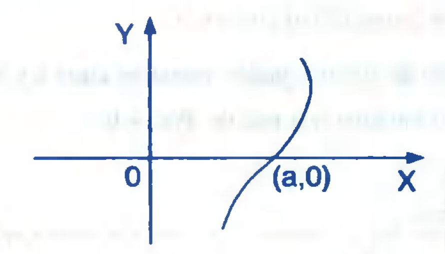
1° Si x = a es una raíz real simple de la ecuación P(x) = 0 la gráfica de P(x) corta al eje X en el punto (a,0).



2° Si x = a es una raíz de multiplicidad m par, la gráfica de P(x) es tangente al eje X en el punto (a,0).



3° Si x = a es una raíz de multiplicidad m impar, la gráfica de P(x) es tangente y corta al eje X en el punto (a,0) en este caso se dice que (a,0) es un punto de inflexión de la gráfica de P(x).



Mediante el criterio de los puntos críticos se determina en que intervalos la gráfica está sobre el eje X y en que intervalos está la gráfica debajo del eje X.

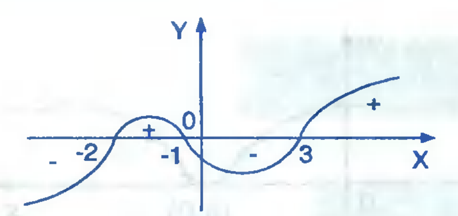
Ejemplo.- Graficar el polinomio $P(x) = x^3 - 7x - 6$

Solución

Calculando las raíces de la ecuación P(x) = 0

1	0	-7	-6	x = -1
	-1	1	6	
1	-1	-6	0	x = -2
	-2	6		
1	-3	0		x = 3
	3			
1	0			

ahora ubicamos las raíces de $P(x) = 0$ en el eje X y luego aplicamos el criterio de los puntos críticos.

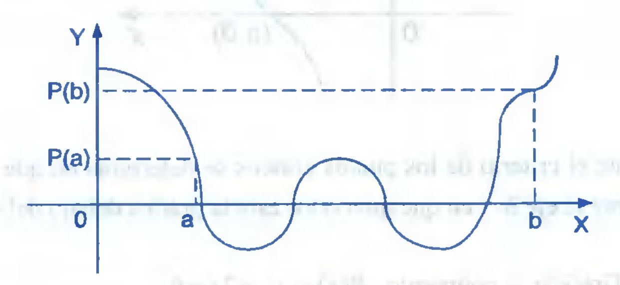


Se puede determinar, los intervalos en los cuáles se encuentra las raíces reales de la ecuación $P(x) = 0$, mediante la siguiente regla.

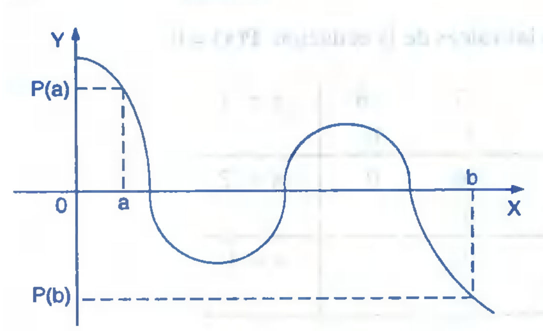
7.30. REGLA.-

Sean a y b dos enteros consecutivos con $a < b$.

i) Si P(a) y P(b) son de signos iguales, entonces entre a y b existe por lo menos un par de raíces reales o ninguna raíz real de $P(x) = 0$.



ii) Si P(a) y P(b) son de signos contrarios entre a y b existe un número impar de raíces reales de $P(x) = 0$.



Ejemplo.- Hallar el intervalo donde se encuentra las raíces de la ecuación $x^2+3x-2=0$.

Solución

Calculando la cota superior de las raíces de $x^2+3x-2=0$

$L=1+\sqrt[k]{\frac{G}{a_n}}$ donde k = 2 es el número de términos anteriores al 1er. termino negativo.

G = 0 es el mayor valor absoluto de los coeficientes negativos

$a_n=1$ es el coeficiente de x^2, reemplazando tenemos: L = 1 + 0 = 1

Sí $P(x)=x^2+3x-2$ de donde:

$\begin{cases} P(0)=-2 \\ P(1)=2 \end{cases} \Rightarrow$ existe una raíz real en (0,1)

$\begin{cases} P(-1)=4 \\ P(-2)=-4 \end{cases} \Rightarrow$ en (-1,-2) no existe otra raíz

$\begin{cases} P(-3)=9-9-2=-2 \\ P(-4)=16-14=2 \end{cases} \Rightarrow \exists$ otra raíz en (-4,-3)

Ejemplo.- Determinar donde se encuentra las raíces de $x^3-3x^2+3x+2=0$.

Solución

Calculando la cota superior de las raíces.

$L=1+\sqrt[k]{\frac{G}{a_n}}$ donde k = 1, G = 4, $a_n=1$, reemplazando se tiene:

L = 1 + 4 = 5 cota superior

$P(x)=x^3-4x^2+3x+2$ de donde

P(5) = 42

P(4) = 14

P(3) = 2

P(2) = 0 es una raíz

P(1)=2

$$\left.\begin{array}{l} P(0)=2 \\ P(-1)=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ una raíz real en } (-1,0)$$

P(-2) = -28

7.31. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES CON EL MÉTODO DE NEWTON.-

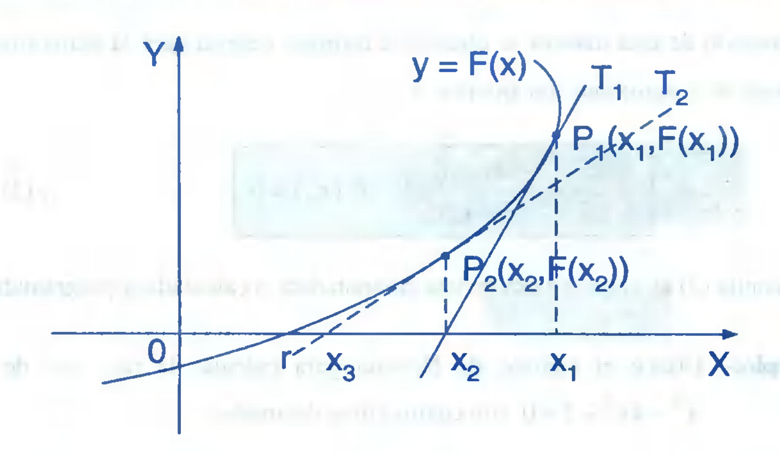
Consideremos la ecuación de la forma: F(x) = 0 **... (1)**

A las soluciones de la ecuación 1 se le llama raíces de la ecuación ó ceros de la función F

Si F es una función polinomial de grado menor que cinco, existen fórmulas para calcular sus raíces, por ejemplo para el caso de la función lineal o la función cuadrática, para el caso de una función polinómica de grado tres o cuatro, el método general de obtener las raíces es complicado; además para obtener las raíces de una función polinómica de grado cinco o mayor existe un teorema, que corresponde a "Niels Abel 1802 – 1829" el cuál manifiesta que no puede haber fórmula general en términos de un número finito de operaciones sobre los coeficientes, sin embargo existen procesos numéricos para aproximar soluciones de ecuaciones y que debido al uso creciente de las computadoras y calculadoras programables son de mayor importancia que antes, uno de estos métodos es la aplicación de la derivada y que fue desarrollada por Sr. Isaac Newton en el siglo XVII y que se conoce con el nombre de el **Método de Newton**.

El **Método de Newton** es un procedimiento que aproxima una raíz de la ecuación F(x)=0, es decir:

Un número r tal que F(r) = 0, para esto daremos una interpretación geométrica tomando la gráfica de y = F(x).



El número r es la intersección de la gráfica de F con el eje X, para obtener una primera aproximación para r, se toma un número x_1 observando la gráfica y se traza la recta tangente T_1 a la gráfica de F en el punto $(x_1, F(x_1))$ que intercepta al eje X en x_2, ahora x_2 sirve como una segunda aproximación de r, nuevamente el proceso trazando la recta tangente a la gráfica de F en el punto $P_2(x_2, F(x_2))$ que intercepta al eje X en x_3 el cual es una tercera aproximación, se continua el proceso hasta que se tenga el grado de precisión requerido para obtener las aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$, a partir de la primera aproximación x_1 se usan las ecuaciones de las rectas tangentes.

La recta tangente T_1 en el punto $P_1(x_1, F(x_1))$ tiene una pendiente $F'(x_1)$ y por lo tanto su ecuación es: $T_1: \quad y - F(x_1) = F'(x_1)(x - x_1)$

La intersección de T_1 con el eje X es cuando $x = x_2$, y = 0.

$$0 - F(x_1) = F'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} \quad \text{Sí} \quad F'(x) \neq 0$$

en $x = x_2$, la ecuación de la recta tangente T_2 es: $T_2: \quad y - F(x_2) = F'(x_2)(x - x_2)$

La intersección de T_2 con el eje X es cuando $x = x_3$, y = 0

$$0 - F(x_2) = F'(x_2)(x_3 - x_2) \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_2 - \frac{F(x_2)}{F'(x_2)} \quad \text{Sí} \quad F'(x_2) \neq 0$$

continuando de esta manera se obtiene la fórmula general para la aproximación x_{n+1} en términos de la aproximación anterior x_n.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \text{ Sí } F'(x_n) \neq 0 \qquad \dots (2)$$

La fórmula (2) es la que se usa en una computadora o calculadora programable.

Ejemplo.- Utilice el método de Newton para calcular la raíz real de la ecuación $x^3 - 4x^2 - 2 = 0$ con cuatro cifras decimales.

Solución

Sea $F(x) = x^3 - 4x^2 - 2 \Rightarrow F'(x) = 3x^2 - 8x$

Los extremos relativos se encuentran cuando $F'(x) = 0$

$3x^2 - 8x = x(3x-8) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{8}{3}$

F(0) = -2, F(2) = -10, F(3) = -11, F(4) = -2, F(5) = 23

La raíz se encuentra entre 4 y 5.

Luego una primera aproximación seria $x_1 = 4.5$

n	x_n	$x_n^3 - 4x_n^2 - 2$	$3x_n^2 - 8x_n$	$\frac{x_n^3 - 4x_n^2 - 2}{3x_n^2 - 8x_n}$	x_{n+1}
1	4.5	8.125	24.85	0.33	4.17
2	4.17	0.96	18.81	0.05	4.12
3	4.12	0.03	17.96	0.0017	4.11
4	4.11	-0.13	17.8	-0.007	4.117
5	4.117	-0.02	17.91	-0.001	4.118

7.32. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Problemas sobre ecuaciones de segundo grado

(1) Hallar el valor de k para que la suma de las raíces de la ecuación $2kx^2-(12k+1)x+12=0$ sea 7. **Rpta.** $k=\frac{1}{2}$

(2) Hallar el valor de k para que el producto de las raíces de la ecuación $(k-2)x^2-5x+2k=0$ sea 6. **Rpta.** k = 3

(3) Hallar el valor de k en la ecuación $x^2+(2k+5)x+k=0$ si una raíz excede a la otra en 3 unidades. **Rpta.** k = -2

(4) Determinar los valores de m para que la ecuación $x^2-2(1+3m)x+7(3+2m)=0$, tenga una solución. **Rpta.** m = 2, $m=-\frac{10}{9}$

(5) Si α y β son las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, hallar el valor de:

a) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ **Rpta.** $b(3ac-b^2)$

b) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$ **Rpta.** $\frac{b}{c^3}(3ac-b^2)$

(6) Hallar la suma de las raíces de la ecuación $(2k+2)x^2+4x-4kx+k-2=0$, sabiendo que estas son inversas. **Rpta.** $\frac{10}{3}$

(7) Para que valores de m, la suma de las raíces de la ecuación $\frac{x^2-x}{4x-5}=\frac{m-1}{m+1}$, es igual al duplo del producto de las raíces de dicha ecuación menos 1.

(8) Si r y s son las raíces de la ecuación $mx^2-2(m-1)x+m=0$, con m constante y cumplen $\frac{r}{s}+\frac{s}{r}=4$, Hallar la suma de todos los valores de m que satisfacen tal propiedad.

Rpta. -4

(9) Si {a,b} es el conjunto solución de la ecuación $3x^2 - 2(m+1)x + (m-1) = 0$, hallar m para que se cumple $9ab^2 + 3a^3 + 9a^2b + 3b^3 = 192$ **Rpta.** m = 5

(10) Hallar m para que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2 - (m+3)x + m + 2 = 0$ sea igual a 2. **Rpta.** {-1,-3}

(11) Determinar k en la ecuación $x^2 + kx + 12 = 0$, de modo que entre las raíces r y s exista la relación $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{9}$ **Rpta.** $-\frac{32}{3}$

(12) Hallar todos los valores no negativos de P para los cuáles las raíces de la ecuación cuadrática $(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0$ sean reales y positivos. **Rpta.** $<3, \frac{18}{5}>$

(13) Hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son la suma y el producto de las raíces de la ecuación $ax^2 - (a^2+1)x + a = 0$, donde $a \neq 0$. **Rpta.** $ax^2 - (a^2 + a +)x + a^2 + 1 = 0$

(14) Si a y b son constantes en R, se tiene que las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ son los cuadrados de las raíces de $2x^2 + x - 6 = 0$. Hallar |4a + b|. **Rpta.** 16

(15) Las raíces r y s de una ecuación cuadrática satisfacen 4r – 16s = 7 y 8r + 4s = 5. Hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son respectivamente las inversas de r y s.

Rpta. $3x^2 + 8x - 16 = 0$

(16) Hallar el valor de k para que la ecuación $25x^2 + kx + 1 = 0$ tenga sus dos raíces reales e iguales. **Rpta.** ± 10

(17) Si las raíces de la ecuación $mx^2 + (m+1) = (2m+1)x$ se difieren en 0.5. Hallar las raíces.

Rpta. $1, \frac{3}{2}$ y $1, \frac{1}{2}$

(18) Si α y β son las raíces de $x^2 + px + q = 0$, fórmese la ecuación cuyas raíces son $(\alpha+\beta)^2$ y $(\alpha-\beta)^2$. **Rpta.** $x^2 + (2q - p^2)x + p^2(p^2 - 4q) = 0$

(19) Hallar el valor de k en la ecuación $x^2 + (2k+5)x + k = 0$, si una raíz excede a la otra en 3 unidades. **Rpta.** k = –2

(20) Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2 - px + q = 0$, hallar

a) $r^2 + s^2$ **b)** $r^3 + s^3$

Rpta. **a)** $p^2 - 2q$ **b)** $p(p^2 - 3q)$

(21) Si α y β son soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ y sí α - β = 2 y $\alpha^3 - \beta^3 = 26$. Hallar $|\frac{c}{b}|$. **Rpta.** $\frac{3}{4}$

(22) Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2 - 4x + 1 = 0$. Hallar la ecuación cuyas raíces sean $r^2 + \frac{1}{r}$ y $s^2 + \frac{1}{s}$. **Rpta.** $x^2 - 18x + 54 = 0$

(23) Si a y b son las raíces de la ecuación $x^2 + mx + 2m^2 = 0$. Hallar el valor de $a^5b^7 + a^7b^5$. **Rpta.** $-96\ m^{12}$

(24) En la ecuación $2x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$ ¿Qué valor positivo debe darse a "m" para que sus raíces se diferencien en uno? **Rpta.** m = 11

(25) Sean α y β raíces de la ecuación cuadrática $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$, sí $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = \frac{10}{7}$. Hallar el valor de | α - β | **Rpta.** $\frac{4}{3}$

(26) Hallar los valores de m para los que la ecuación cuadrática $(m+3)x^2 - 2mx + 4 = 0$ tienen soluciones reales. **Rpta.** m ∈ <-∞,-2] ∪ [6,+∞> - {-3}

(27) Sea P un número real fijo, si r y s son las raíces de $x^2 + px + 36 = 0$ tales que $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{5}{12}$. Hallar el valor de $p^2 - 2p + 1$. **Rpta.** 252

(28) Formar una ecuación cuadrática cuyas raíces sean la suma y el producto respectivamente de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. **Rpta.** $ax^2 + a(b-c)x - bc = 0$

II. Resolver las siguientes ecuaciones:

(1) $(x-\frac{3}{x})^2 - 4x + \frac{12}{x} = 12$

(2) $x^2 - x + \frac{72}{x^2 - x} = 18$

(3) $x(2x + 1)(x - 2)(2x - 3) = 63$

(4) $(2x-7)(x^2-9)(2x+5) = 91$

(5) $x^2 + x = 7\sqrt{x^2 + x + 2} - 12$

(6) $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$

(7) $(\frac{x+1}{x-3})^2 - \frac{x+1}{x-3} - 2 = 0$

(8) $3(\frac{x+3}{2x-1})^2 - 4\frac{x+3}{2x-1} + 1 = 0$

(9) $\frac{x+2}{x-2} - 3 - 4\frac{x-2}{x+2} = 0$

(10) $\frac{x+3}{x+1} - 5 + 4\frac{x+1}{x+3} = 0$

(11) $\frac{3x+2}{2x-1} - 10 + 9\frac{2x-1}{3x+2} = 0$

(12) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

(13) $(x+1+\frac{6}{x})(x-1+\frac{6}{x}) = 24$

(14) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

(15) $8 + 9\sqrt{(3x-1)(x-2)} = 3x^2 - 7x$

(16) Hallar la suma de las soluciones reales de la ecuación $2(x+\frac{1}{x})^2 - 7(x+\frac{1}{x}) + 5 = 0$.

(17) $\frac{x^2-3}{x-1} = \frac{2x-2}{x^2-3} - 1$

(18) $4x^2 - 3x + \frac{5}{4x^2 - 3x} - 6 = 0$

(19) $(\frac{2x}{x-1})^2 - \frac{14x}{x-1} = 30$

(20) $\frac{x+1}{x-3} - \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} - 2 = 0$

III. Hallar todas las raíces enteras y racionales de las ecuaciones.

1) $12x^3+7x^2-42x-40=0$

2) $x^3-x^2-14x+24=0$

3) $6x^3+7x^2-9x+2=0$

4) $24x^3-2x^2-5x+1=0$

5) $108x^3-270x^2-42x+1=0$

6) $3x^4-40x^3+130x^2-120x+27=0$

7) $x^3-6x^2+15x-14=0$

8) $6x^4-37x^3+79x^2-68x+20=0$

9) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24=0$

10) $12x^4-67x^3-15x^2+484x-480=0$

11) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36=0$

12) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$

13) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6=0$

14) $x^{45}-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6=0$

15) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24=0$

16) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24=0$

IV. Resolver las siguientes ecuaciones.

1) $\sqrt{5x+9}=2x+3$

2) $\sqrt{5x+1}=\sqrt{2x+1}+2$

3) $\sqrt{3x+1}+1=\sqrt{4x+5}$

4) $\sqrt{3x+12}-1=\sqrt{5x+9}$

5) $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{5x+9}$

6) $\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{11-5x}$

7) $\sqrt{x^2+x-4}=2$

8) $\sqrt[4]{x^2-2x+8}=2$

9) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-2}$

10) $\sqrt{12-\sqrt{x+8}}=\sqrt{2-2x}$

11) $\sqrt{3x-6}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{9x+4}$

12) $\sqrt{4x^2-7x-5}-\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{x^2-9}$

13) $\sqrt{3x-11}+\sqrt{3x}=\sqrt{12x-23}$

14) $\sqrt{9x-8}-\sqrt{4x+1}=\sqrt{x-3}$

15) $\sqrt{2+\sqrt{x-4}}=\sqrt{12-x}$

16) $\sqrt{3x^2-2x+9}+\sqrt{3x^2-2x-4}=13$

17) $\sqrt{x-2a}=\sqrt{x-5a}-\sqrt{x+3a}$

V. Resolver las siguientes ecuaciones

(1) Que valor debe tomar k para que el polinomio $P(x) = x^6 + 2x^5 + kx^4 - x^3 + 2(8+k)x^2 + 6x - 18$ sea divisible por $x^3 + 2x^2 - 3$.

Rpta. k = -2

(2) Dados los polinomios $x^4 + ax^2 + b$, $x^2 + 2x + 5$, determinar a y b de modo que el primero sea divisible por el segundo. **Rpta.** a = 6, b = 25

(3) Encontrar valores para a y b de tal manera que $2x^2 - 41x + b$ sea divisible de $6x^3 - 137x^2 + ax - 91$.

(4) Determinar p, q, r en $x^4 + 3x^3 + px^2 + qx + r$ para que sea divisible exactamente por $(x^2 - 4)(x+1)$. **Rpta.** p = -2, q = -12, r = -8

(5) Determinar el valor de k de manera que:

a) $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + kx - 3$ sea divisible por x + 3. **Rpta.** k = -7

b) $P(x) = 2x^4 - kx^3 - x - 6$ sea divisible por x – 2. **Rpta.** k = 3

(6) Determinar "n" y "m" para que el polinomio $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + mx + n$ sea divisible por $x^2 - 3x + 15$. **Rpta.** m = 16, n = 15

(7) Si el polinomio $P(x) = x^4 - 3ax^3 + a^2x^2 + ma^3x - na$ es divisible entre el polinomio $Q(x) = x^2 - ax + 2a^2$. Hallar él valor de $(m+n)(m^2 - mn + n^2)$. **Rpta.** 215

(8) Que valor ha de tener λ para que sea divisible el polinomio $2x^4 - 3x^3 + \lambda x^2 - 9x + 9$ por x – 3. **Rpta.** λ = 7

(9) Que valores han de tener p y q para que sea divisible el polinomio $3x^3 + px^2 + qx + 42$ por (x – 2)(x – 3). **Rpta.** p = -8, q = -17

(10) Qué valores han de tener a y b para que sea divisible el polinomio $x^4 - ax^3 + bx^2 + bx + 9$ por $x^2 - 1$.

(11) Hallar el valor de k para que el cual $3x^3 - 2x^2 + kx - 8$ sea divisible entre x – 2.

Rpta. k = -4

(12) Si el polinomio $P(x) = 2x^4 - mx^3 + x^2 - nx + 2$ es divisible por x – 1 y x + 2, hallar el valor de n – m. **Rpta.** 21

(13) Determinar "m" y "n" para que el polinomio $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + mx + n$ sea divisible por $x^2 - 3x + 5$. **Rpta.** m = 16, n = 15

(14) Determinar la relación que debe existir entre "p" y "q" para que el polinomio $x^3 + px + q$, sea divisible entre $x^2 + mx - 1$. **Rpta.** $p + q^2 + 1 = 0$

(15) Si se sabe que el polinomio $(a-b)x^3 + (b-c)x^2 + (b+c)x + a - b$ es divisible entre $x^2 + n^2$ calcular $\frac{b^2}{a^2 + c^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(16) Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ al dividir P(x) tanto por x + 2 como x + 3 el residuo obtenido es cero, pero al dividir por x – 1 el residuo es –12. Calcular A = 14a – 5b + 3c

(17) Determinar a, b, y c de modo que (x – 3)(x + 1)(x – 1) sea un factor de $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$.

VI.

(1) Hallar el valor de k en la ecuación $x^3 + kx + 16 = 0$ sabiendo que tiene dos raíces iguales.

(2) Hallar el valor de k en la ecuación $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ para que sus raíces estén en progresión aritmética.

(3) Hallar las raíces de la ecuación $2x^3+(k+2)x^2+(2k-2)x+1=0$, sabiendo que su suma es $\frac{1}{2}$.

(4) Hallar las raíces de $P(x)=x^4+2x^2+25$ conociendo la raíz $r=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

(5) Hallar todas las raíces de $P(x)=x^3+2x^3-4x^2-14x-21$ sabiendo que $r=-1+\sqrt{3}i$ es una raíz.

(6) Hallar todas las raíces de $P(x)=x^4+2x^3-4x^2-14x-21$ sabiendo que $\alpha=-1+\sqrt{3}i$ es una raíz.

(7) Demostrar que la ecuación $x^7-4x^6+2x^3-9x^2-6=0$ tiene por lo menos cuatro raíces complejas y por lo menos una raíz positiva, pero ninguna raíz negativa.

(8) Hallar todas las raíces $4x^4-15x^2-3x+7=0$ sabiendo que $r=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$ es una de sus raíces.

(9) Hallar todas las raíces de $3x^5-20x^4+62x^2-51x+10=0$ sabiendo que $r_1=2-\sqrt{3}$, $r_2=1-\sqrt{6}$ son dos de sus raíces.

(10) Hallar todas las raíces del polinomio $x^4-10x^3+53x^2-140x+196=0$, sabiendo que tiene dos raíces dobles.

(11) Hallar las raíces del polinomio $3x^4+8x^3+6x^2+24x-9=0$ conociendo dos raíces r_1 y r_2 que satisface $r_1r_2=-1$.

(12) Resolver la ecuación $x^3-7x^2+14x-8=0$ que tiene las raíces en progresión geométrica.

(13) Resolver la ecuación $x^3-12x^2+39x-28=0$ que tiene las raíces en progresión geométrica.

14 Resolver la ecuación $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$ que tiene dos pares de raíces iguales.

15 Hallar las raíces enteras de:

a) $3x^3-37x^2+93x-27=0$ **b)** $x^3-4x^2-x+4=0$

c) $2x^3-x^2-4x+3=0$ **d)** $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$

16 Hallar los valores de a y b para los cuales –3 y 2 sean raíces de la ecuación $x^4+x^3+ax^2+bx+30=0$

17 Hallar las raíces de los polinomios siguientes conociendo las raíces que se indican.

a) $x^3+6x^2-24x+160=0$, $r_1=2-2\sqrt{3}i$

b) $x^3-3x^2-6x-20=0$, $r_1=-1+\sqrt{3}i$

c) $x^4+2x^2+25=0$, $r_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

d) $x^4+2x^3-4x^2-14x-21=0$, $r_1=-1+\sqrt{3}i$

e) $x^4-4x^2+8x-4=0$, $r_1=1+i$

f) $x^3-3x^2-5x+7=0$, $r_1=1-\sqrt{8}$

g) $x^4-13x^2+4x+2=0$, $r=2-\sqrt{2}$

h) $4x^4-15x^2-3x+7=0$, $r=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$

i) $x^4-2x^3-5x^2-6x+2=0$, $r=2-\sqrt{3}$

j) $x^4-3x^2+10x-6=0$, $r=-1+\sqrt{3}$

VII. Resolver las siguientes ecuaciones:

1 $x^4-2x^2+7=0$ **2** $x^4-10x^2+9=0$

3 $4x^4-5x^2+1=0$ **4** $x^4+2x^2+25=0$

(5) $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$

(6) $6x^{\frac{1}{2}} - 11x^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$

(7) $x - 4x^{\frac{1}{2}} + 3 = 0$

VIII. Resolver las siguientes ecuaciones

(1) $x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = 0$

(2) $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$

(3) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

(4) $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0$

(5) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$

(6) $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$

(7) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$

IX. Encontrar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones cúbicas.

(1) $y^3 - 9y - 12 = 0$

(2) $y^3 + 18y + 6 = 0$

(3) $y^3 - 6y - 6 = 0$

(4) $y^3 + 21y - 42 = 0$

(5) $y^3 - 15y - 30 = 0$

(6) $y^3 - 18y - 3 = 0$

(7) $y^3 + 15y - 20 = 0$

(8) $y^3 + 12y + 12 = 0$

(9) $x^3 - 9x^2 - 9x - 15 = 0$

(10) $x^3 - 3x^2 - 18x - 36 = 0$

(11) $x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0$

(12) $x^3 - 6x^2 - 6x - 14 = 0$

(13) $x^3 + 9x - 6 = 0$

(14) $x^3 - 6x - 6 = 0$

(15) $x^3 - 12x - 34 = 0$

(16) $x^3 + 9x - 6 = 0$

(17) $x^3 + 18x - 6 = 0$

(18) $2x^3 + 6x + 3 = 0$

(19) $2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$

(20) $3x^3 - 6x^2 - 2 = 0$

(21) $x^3 + 6x^2 - 36 = 0$

(22) $x^3 + 3x^2 + 9x + 14 = 0$

(23) $x^3+6x^2+6x+5=0$

(24) $x^3-15x^2+105x-245=0$

(25) $8x^3+12x^2+102x-47=0$

(26) $x^3+3x^2+9x+14=0$

(27) $x^3-6x^2-12x-8=0$

(28) $x^3+3x^2-3x-1=0$

(29) $x^3+9x^2+18x+28=0$

(30) $x^3-6x^2+57x-196=0$

(31) $2x^3+3x^2+3x+1=0$

(32) $x^3-15x^2-33x+847=0$

(33) $x^3+6x^2+6x+5=0$

(34) $x^3-15x^2+105x-245=0$

(35) $8x^3+12x^2+102x-47=0$

(36) $x^3+6x^2-24x+160=0$

(37) $x^3-3x^2-6x-20=0$

(38) $x^3+9x-6=0$

(39) $2x^3-6x^2+3=0$

(40) $x^3+12x-12=0$

(41) $x^3+18x-30=0$

(42) $x^3+21x+342=0$

(43) $x^3+4x-1=0$

(44) $x^3-6x^2-4=0$

(45) $x^3-15x-30=0$

(46) $28x^3-9x^2+1=0$

(47) $x^3-63x-316=0$

(48) $x^3+72x-1720=0$

X. Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

(1) $x^4-2x^2-8x-3=0$

(2) $x^4-x^2+2x-1=0$

(3) $x^4-25x^2+54x+10=0$

(4) $x^4-13x^2+36x-18=0$

(5) $x^4-3x^2+18x-20=0$

(6) $x^4-6x^2+20x-24=0$

(7) $x^4-11x^2-6x+10=0$

(8) $x^4-24x^2+16x+10=0$

(9) $x^4-28x^2+24x+12=0$

(10) $x^4-31x^2+54x-14=0$

(11) $x^4-25x^2+12x+18=0$

(12) $x^4-3x^2-12x+40=0$

(13) $x^4+10x^2+12x+40=0$

(14) $x^4+11x^2+10x+50=0$

(15) $x^4-8x^2-4x+3=0$

(16) $x^4-4x^2+x+2=0$

(17) $x^4+x^3-5x^2+2=0$

(18) $2x^4+5x^3-8x^2-17x-6=0$

(19) $x^4-3x^2+6x-2=0$

(20) $x^4-x^2-2x-1=0$

(21) $x^4+3x^3-2x^2-10x-12=0$

(22) $x^4+5x^3+x^2-13x+6=0$

(23) $x^4+2x^2+x+2=0$

(24) $x^4+5x^2+2x+8=0$

(25) $2x^4+x^3+2x^2-3x-2=0$

(26) $x^4+x^3+5x^2+5x+12=0$

(27) $x^4-2x^3-5x^2-6x+2=0$

(28) $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$

(29) $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$

(30) $x^4+2x^3+8x^2+2x+7=0$

(31) $x^4-2x^3+4x\quad -2x+3=0$

(32) $x^4-6x^3+10x^2-2x-3=0$

(33) $x^4-8x^3+17x^2-8x+1=0$

(34) $x^4+2x^3-2x^2+6x-15=0$

(35) $x^4-4x^3+3x^2+2x-1=0$

(36) $x^4-2x^3+4x^2+2x-5=0$

(37) $x^4-6x^3+6x^2+27x-56=0$

(38) $x^4+2x^3+9x^2-8x-10=0$

(39) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$

(40) $x^4-2x^3-12x^2+10x+3=0$

(41) $x^4-x^3-3x^2+5x-10=0$

(42) $x^4-3x^3+x^2+4x-6=0$

(43) $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$

(44) $x^4+2x^3-4x^2-14x-21=0$

(45) $x^4-9x^3+12x^2-80x-192=0$

(46) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24=0$

(47) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24=0$

(48) $24x^4-42x^3-77x^2+5x+60=0$

(49) $x^4-13x^2+4x+2=0$

(50) $x^4-3x^2+10x-6=0$

(51) $x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$

(52) $3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 27 = 0$

(53) $6x^4 + 19x^3 - 7^2 - 26x + 12 = 0$

(54) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24 = 0$

(55) $6x^4 - 37x^3 + 79x^2 - 68x + 20 = 0$

(56) $12x^4 - 67x^3 - 15x^2 + 282x - 280 = 0$

XI. Utilizar el Método de Newton para calcular la raíz de la ecuación con cuatro cifras decimales.

(1) $6x^3 + 9x + 1 = 0$

(2) $x^3 - 4x - 8 = 0$

(3) $x^3 - 2x + 7 = 0$

(4) $x^4 - 10x + 5 = 0$

(5) $x^4 - 10x + 5 = 0$

(6) $2x^3 + x - 2 = 0$

(7) $3x^3 - 7x - 2 = 0$

(8) $x^3 - x - 3 = 0$

(9) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$

(10) $x^3 - 4x^2 - 5x + 20 = 0$

(11) $x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$

(12) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$

CAPITULO VIII

VECTORES BIDIMENSIONAL

8.1. CONCEPTOS BÁSICOS.-

a) INTRODUCCIÓN.- Los antiguos Griegos desarrollaron la Geometría elemental, ellos crearon una forma sistemática de analizar las propiedades de los puntos, las rectas, los triángulos, las circunferencias y otras configuraciones.

Todos sus trabajos estaban sistematizados en "Los elementos de Euclides" que fueron las bases de la geometría plana y del espacio hasta nuestros días, sin embargo no se había conseguido avances importantes; pero en 1637, el filosofo y matemático Francés Rene Descartes revolucionó la matemática de su época, al crear la geometría analítica en la que introduce las coordenadas rectangulares, llamadas también en su memoria, coordenadas cartesianas y de esta forma consigue algebrizar las ideas geométricas de sus antecesores.

El propósito de este método consiste en introducir mediante un sistema de coordenadas, los conceptos de relaciones geométricas a conceptos de relaciones algebraicas y viceversa, por lo tanto en este capítulo estudiaremos el método analítico y para esto nos familiarizaremos con el concepto de vector que es una herramienta de gran importancia en la matemática moderna.

b) PAR ORDENADO.- Llamaremos par ordenado a dos objetos cualquiera "a" y "b"; que denotaremos por (a,b), donde "a" es llamado la primera primera componente y "b" la segunda componente.

Ejemplo.- Son pares ordenados (2,5), (-1,3), (Pedro, María), (hombre, mujer).

Dos pares ordenados (a,b) y (c,d) son iguales, si sus primeras componentes son iguales y las segundas también.

En forma simbólica es: $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

c) PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS.-

Consideremos dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano de A y B, al conjunto de los pares ordenados (a,b) donde "a" pertenece al conjunto A, y "b" pertenece al conjunto B y denotaremos por A x B, es decir:

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

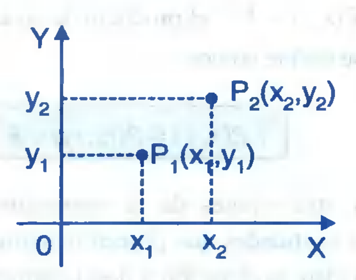
Ejemplo.- Sean A = {1,2,3} y B = {a,b}, el producto cartesiano de A y B es:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

Si A = B, denotaremos $A \times A = A^2$ y para nuestro caso tomaremos A = B = R, es decir $R \times R = R^2$ y a sus elementos llamaremos pares ordenados de números reales.

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas de ejes X e Y, y a los puntos de este sistema de coordenadas cartesianas, denotaremos por $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, ..., etc.

Su representación gráfica es:



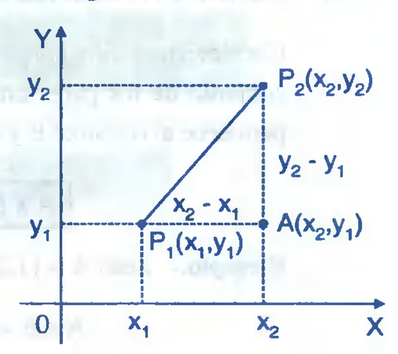
d) DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.-

Consideremos dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, a la distancia de P_1 a P_2 denotaremos por $d(P_1,P_2)$ y es dado por la fórmula:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Es decir: En él $\Delta P_1 A P_2$, por Pitágoras se tiene:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{[d(P_1,A)]^2+[d(A,P_2)]^2} \quad \text{... (1)}$$



además se tiene:

$$\begin{cases} d(P_1,A)=x_2-x_1 \\ d(A,P_2)=y_2-y_1 \end{cases} \quad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

e) SUMA DE ELEMENTOS EN RxR = R^2.-

Dados dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ de R^2, la suma de elementos de R^2 se define del modo siguiente:

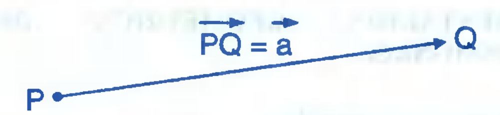
$$P_1(x_1,y_1)+P_2(x_2,y_2)=P_3(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

f) MULTIPLICACIÓN DE UN NÚMERO REAL POR UN ELEMENTO DE R^2.-

Sean r ∈ R y P(x,y) ∈ R^2, el producto de un escalar r por un par P(x,y), denotamos por r.p(x,y) y se define como:

$$r.P(x,y)=P(rx,ry)\in R^2$$

Dentro de las aplicaciones de la matemática a la física e ingeniería se usan frecuentemente cantidades que poseen magnitud y dirección; por ejemplo, tenemos la fuerza, velocidad, aceleración y desplazamiento, a estas cantidades se representan geométricamente por un segmento de recta dirigido de P a Q que denotaremos por $\overrightarrow{PQ}$ donde el punto P se llama punto inicial y el punto Q se llama punto terminal o final. Luego el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se llama vector de P a Q y denotaremos por: $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$.



8.2. VECTORES BIDIMENSIONAL.-

8.2.1. DEFINICIÓN.- Un vector bidimensional es una pareja ordenada de números reales (x,y), donde "x" se llama la primera componente y, "y" se llama la segunda componente.

8.2.2. OBSERVACIONES.-

① A los vectores bidimensional se representan por una letra minúscula y en la parte superior se le coloca un segmento de recta o una flecha, es decir:

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \quad \vec{b} = (b_1, b_2), \quad \vec{c} = (c_1, c_2), \ \ldots$$

② Al conjunto de los vectores bidimensional denotaremos por V_2, tal que:

$$V_2 = R \times R = \{\vec{a} = (a_1, a_2) / a_1 \in R \ \wedge \ a_2 \in R\}$$

③ Al vector cero simbolizaremos por $\vec{0} = (0,0)$.

④ Si $\vec{a} \in V_2$, entonces el opuesto del vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ quedará definido por: $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$

⑤ El vector fila, sus componentes se escriben una a continuación de la otra: $\vec{a} = (a_1, a_2)$

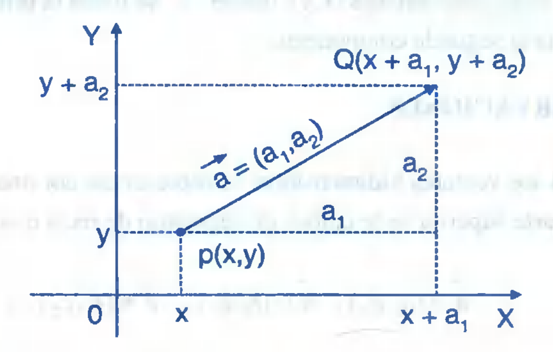
⑥ El vector columna, sus componentes se escriben una debajo de la otra:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ donde a_1 es la primera componente.

a_2 es la segunda componente.

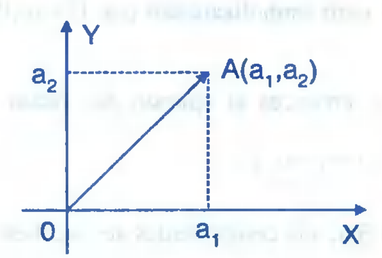
8.2.3. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UN VECTOR BIDIMENSIONAL.-

Un vector bidimensional $\vec{a} = (a_1, a_2)$ es representado mediante un segmento de recta dirigido, cuyo punto inicial es cualquier punto P(x,y) del plano cartesiano y el extremo final es el punto cuyas coordenadas son: $Q(x+a_1,\ y+a_2)$, tal como se muestra en la figura.



8.2.4. VECTOR DE POSICIÓN O RADIO VECTOR.-

Al vector cuyo punto inicial se encuentra en el origen del sistema de coordenadas y el extremo libre puede ubicarse en cualquier cuadrante del plano cartesiano, se denomina vector de posición o radio vector, así como se muestra en la figura.



OBSERVACIÓN.- Al vector $\vec{0}$ lo representaremos por cualquier punto siendo su dirección indefinida.

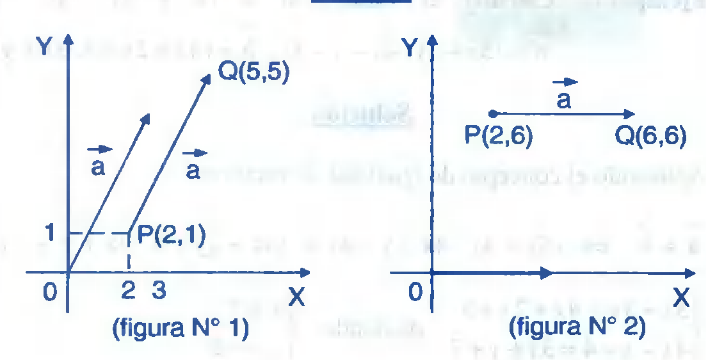
Ejemplo.- Representar gráficamente al vector $\vec{a}$, cuyo punto inicial es P(x,y), sabiendo que su representación de posición es:

① $\vec{a}=(3,4)$, P(2,1) (Ver figura 1)

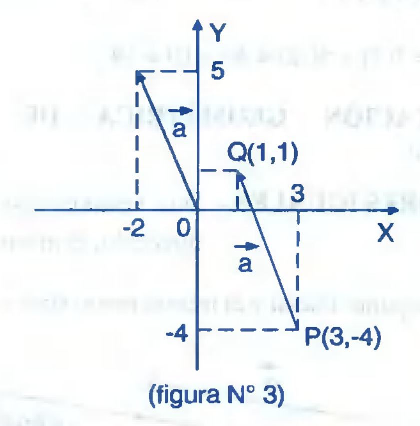
② $\vec{a}=(4,0)$, P(2,6) (Ver figura 2)

③ $\vec{a}=(-2,5)$, P(3,-4) (Ver figura 3)

Solución



(figura N° 1) (figura N° 2)



(figura N° 3)

8.3. OPERACIONES CON VECTORES.-

8.3.1. IGUALDAD DE VECTORES.- Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales si y sólo si, sus componentes correspondientes toman los mismos valores; es decir:

Si $\vec{a},\vec{b}\in V_2$, entonces $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ y expresaremos así:

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1 \wedge a_2=b_2$$

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son iguales, entonces escribiremos:

$$\vec{a}\neq\vec{b} \iff a_i\neq b_i \text{, para algún } i=1,2,3.$$

Ejemplo.- Calcular el valor $M = 7x + 5y$ si $\vec{a}=\vec{b}$ donde $\vec{a}=(5x+3y,\ 4x-y-4)$, $\vec{b}=(4x+2y+5,\ 3x+y+7)$

Solución

Aplicando el concepto de igualdad de vectores.

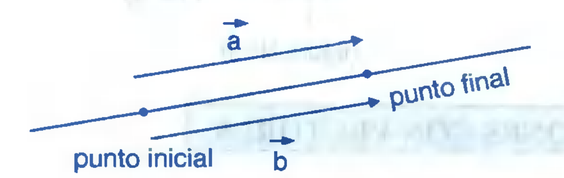
$$\vec{a}=\vec{b} \iff (5x+3y,\ 4x-y-4)=(4x+2y+5,\ 3x+y+7)$$

$$\begin{cases} 5x+3y=4x+2y+5 \\ 4x-y-4=3x+y+7 \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases}$$

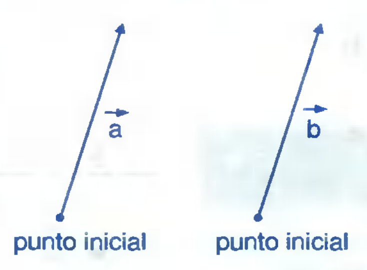
$M = 7x + 5y = 7(7) + 5(-2) = 49 - 10 = 39$ $\therefore\ M = 39$

8.3.2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA IGUALDAD DE VECTORES.-

- **VECTORES IGUALES.-** Dos vectores son iguales si tienen la misma dirección, el mismo sentido, el mismo tamaño, el mismo punto inicial y el mismo punto final y se denota por $\vec{a}=\vec{b}$.



- **VECTORES EQUIVALENTES.-** Dos vectores son equivalentes si tienen la misma dirección, el mismo sentido, el mismo tamaño pero diferente punto inicial y se denota por $\vec{a}=\vec{b}$.

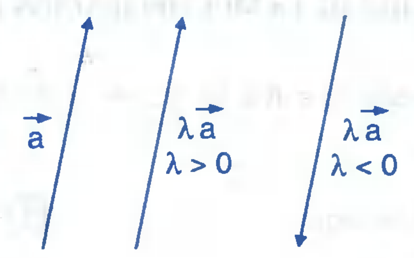


8.3.3. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR.-

Sea λ un escalar ($\lambda \in R$) y sea $\vec{a} \in V_2$ un vector bidimensional, entonces llamaremos producto de λ por $\vec{a}$ denotado por $\lambda.\vec{a}$, al vector resultante cuyas componentes deben ser multiplicados por λ, es decir:

Si $\vec{a} \in V_2$ entonces $\vec{a} = (a_1, a_2)$, luego

$$\boxed{\lambda\,\vec{a} = \lambda.(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)}$$



Ejemplo.- Sea $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ un vector donde:

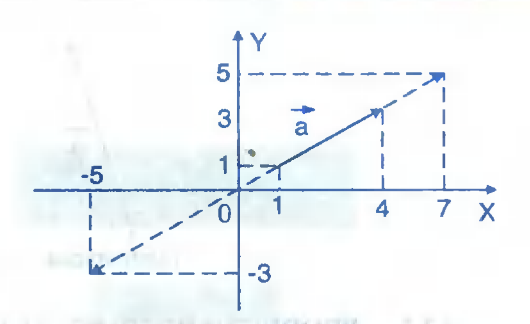
(1) A(1,1,), B(4,3), $\lambda = \pm 2$, graficar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\lambda\,\overrightarrow{AB}$

Solución

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,3) - (1,1) = (3,2)$

$\lambda \vec{a} = 2(3,2) = (6,4)$

$\lambda \vec{a} = -2(3,2) = (-6,-4)$

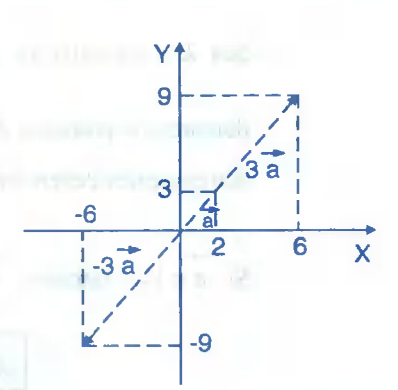


(2) Si $\vec{a} = (2,3)$ graficar $3\vec{a}$ y $-3\vec{a}$

Solución

$3\vec{a} = 3(2,3) = (6,9)$

$-3\vec{a} = -3(2,3) = (-6,-9)$



8.3.4. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR.-

Para todo escalar $r.s \in R$ y los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$, se verifican las siguientes propiedades:

(1) $r.\vec{a}$ es un vector.

(2) $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$

(3) $r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$

(4) $r(s.\vec{a}) = (r.s)\vec{a}$

(5) $1.\vec{a} = \vec{a}$

(6) $0.\vec{a} = \vec{0}$

8.3.5. SUMA DE VECTORES BIDIMENSIONAL.-

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el vector resultante suma $\vec{a}+\vec{b}$ se obtiene sumando sus correspondientes componentes, esto es:

Si $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$, entonces $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Ejemplo.- Si $\vec{a} = (3,5)$ y $\vec{b} = (1,4)$, entonces:

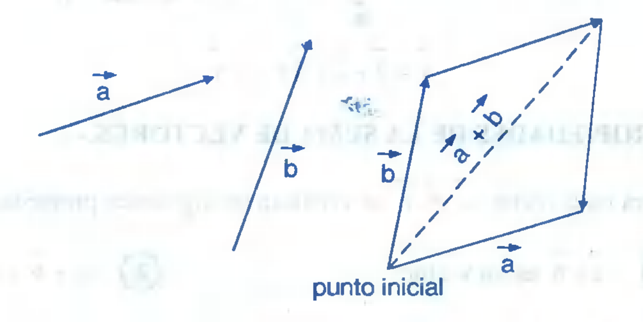
$$\vec{a} + \vec{b} = (3,5) + (1,4) = (3+1,\ 5+4) = (4,9)$$

8.3.6. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SUMA DE VECTORES.-

En la interpretación geométrica de la suma de vectores consideramos los métodos siguientes:

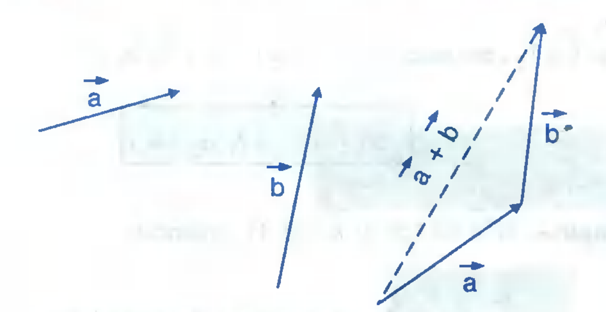
1er. MÉTODO DEL PARALELOGRAMO.-

Se dibujan las representaciones de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ desde el mismo punto (se hace coincidir los puntos terminal de $\vec{a}$ e inicial de $\vec{b}$) y se completa el paralelogramo. La diagonal trazada desde el punto común representa $\vec{a} + \vec{b}$.



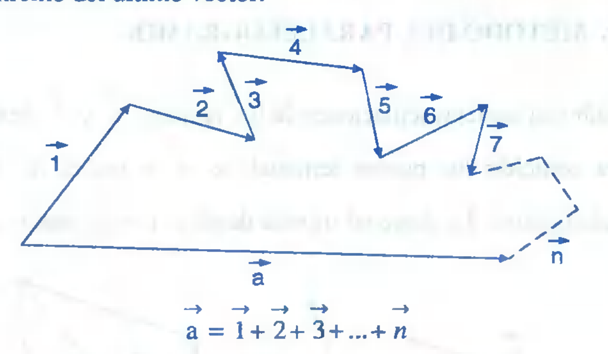
2do. MÉTODO DEL TRIÁNGULO.-

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se grafican uno a continuación del otro, luego el vector resultante $\vec{a} + \vec{b}$ se obtiene del punto inicial del vector $\vec{a}$ con el punto final del vector $\vec{b}$.



3er. MÉTODO DEL POLIGONO VECTORIAL.-

La resultante de la suma de varios vectores se obtiene llevando los vectores una continuación de otro haciendo coincidir el extremo de uno con el origen del otro, para finalmente determinar la resultante uniendo el origen del primer vector con el extremo del último vector.



$$\vec{a} = \vec{1} + \vec{2} + \vec{3} + \ldots + \vec{n}$$

8.3.7. PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES.-

Para todo vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se verifican las siguientes propiedades:

① $\vec{a}+\vec{b}$ es un vector.

② $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$, conmutativa

③ $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, asociativa

④ $\forall\ \vec{a}$ vector, existe un único vector $\vec{0}$, tal que $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$, neutro aditivo.

⑤ $\forall\ \vec{a}$ vector, existe un único vector $-\vec{a}$, tal que $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$, inverso aditivo.

8.3.8. DIFERENCIA DE VECTORES.-

Consideremos los vectores $\vec{a}, \vec{b}$; a la diferencia de éstos vectores se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$$

Si $\vec{a}, \vec{b} \in V_2 \Rightarrow \vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$, de donde:

$$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)}$$

Ejemplo.- Sean $\vec{a}=(-1,3)$ y $\vec{b}=(4,8)$. Hallar $3.(\vec{b}-2\vec{a})+6\vec{a}-2\vec{b}$

Solución

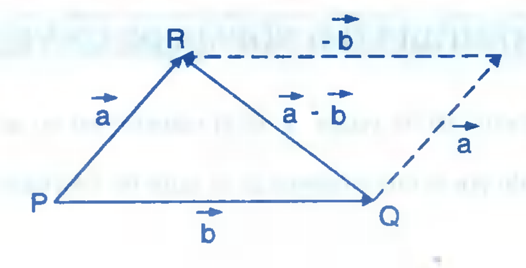
$\vec{b}-2\vec{a}=(4,8)-2.(-1,3)=(4,8)-(-2,6)=(6,2)$

$6\vec{a}-2\vec{b}=6.(-1,3)-2(4,8)=(-6,18)-(8,16)=(-14,2)$

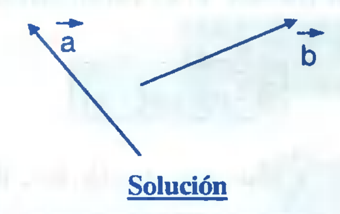
$3(\vec{b}-2\vec{a})+6\vec{a}-2\vec{b}=3.(6,2)+(-14,2)=(18,6)+(-14,2)=(4,8)$

8.3.9. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIA DE VECTORES.-

A los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ lo representaremos por los segmentos dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ con la condición de tener el origen común en el punto P, entonces la diferencia de $\vec{a}, \vec{b}$ es decir: $\vec{a}-\vec{b}$ quedará representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{QR}$, puesto que $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$ (ver gráfico).

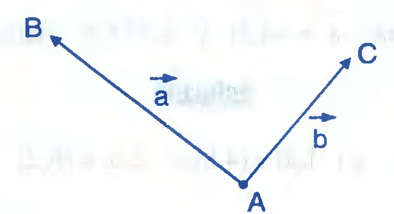


Ejemplo.- Dado la representación de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dibuje $\vec{a}-\vec{b}$, usando la definición de resta y la regla del triángulo para la suma.

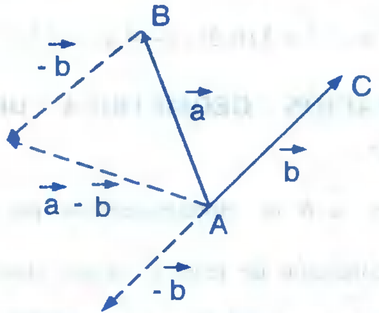


Solución

Dibujando los vectores $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, desde el mismo punto inicial A.



Ahora dibujamos $-\vec{b}$



Empleando la regla del triángulo para la suma se dibuja $\vec{a}-\vec{b}$

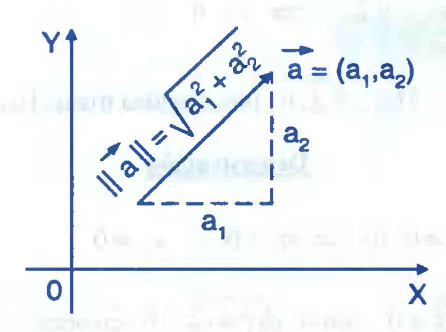
8.4. LONGITUD O MÓDULO O NORMA DE UN VECTOR.-

La longitud o módulo de un vector $\vec{a}$ es el número real no negativo, representado por $\|\vec{a}\|$ y es definido por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrado de sus componentes, esto es:

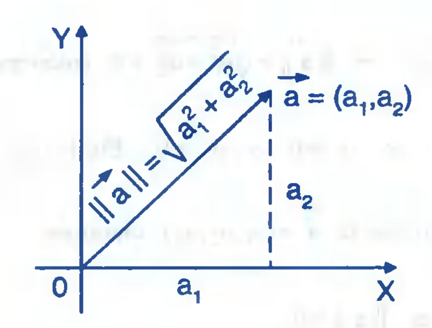
Si $\vec{a} \in V_2 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2)$ de donde:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

cuya representación gráfica es:



Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ es un vector de posición cuyo módulo y representación gráfica es:



Ejemplo.- Si $\vec{a} = (3,4)$ su módulo es: $\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Ejemplo.- Si $\vec{a} = (2,4)$ y $\vec{b} = (3,5)$ entonces:

$$\|2\vec{a} - 3\vec{b}\| = \|2.(2,4) - 3(3,5)\| = \|(4,8) - (9,15)\| = \|(4-9, 8-15)\| = \|(-5,-7)\|$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

8.5. PROPIEDADES DEL MÓDULO DE UN VECTOR.-

Se verifican las siguientes propiedades:

① $\| \vec{a} \| \geq 0, \ \forall \vec{a}$ vector

② $\| \vec{a} \| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

③ $\| r.\vec{a} \| = |r| \, \| \vec{a} \|, \ \forall \vec{a}$ vector, $r \in R$.

④ $\| \vec{a} + \vec{b} \| \leq \| \vec{a} \| + \| \vec{b} \|, \ \forall \vec{a}, \vec{b}$ (desigualdad triangular)

Demostración

① Si $\vec{a} = (a_1, a_2) \neq (0,0) \Rightarrow a_1 \neq 0 \ \vee \ a_2 \neq 0$

$\| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \neq 0$, como $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \geq 0$ entonces $\therefore \ \| \vec{a} \| \geq 0$

② i) Si $\| \vec{a} \| = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

Si $\vec{a} = (a_1, a_2) \Rightarrow \| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 0$ entonces

$a_1^2 + a_2^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \ \wedge \ a_2 = 0$. Por lo tanto $\vec{a} = (0,0) = \vec{0}$

En forma similar si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ entonces

ii) Si $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \| \vec{a} \| = 0$

Si $\vec{a} = (0,0) \Rightarrow \| \vec{a} \| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0 \Rightarrow \| \vec{a} \| = 0$

Si $\vec{a} = (0,0,0) \Rightarrow \| \vec{a} \| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0 \Rightarrow \| \vec{a} \| = 0$

③ Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $r \in R$ entonces: $r\vec{a} = r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$ su módulo es:

$$\| r\vec{a} \| = \sqrt{(ra_1)^2 + (ra_2)^2} = \sqrt{r^2(a_1^2 + a_2^2)} = \sqrt{r^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |r| \, \| \vec{a} \|$$

Por lo tanto: $\| r\vec{a} \| = |r| \|\vec{a}\|$.

(4) La desigualdad triangular lo demostraremos posteriormente en base a la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ.

8.6. VECTOR UNITARIO.-

Se llama vector unitario, al vector cuyo módulo es la unidad, es decir: $\vec{a}$ es un vector unitario si y solo si $\|\vec{a}\| = 1$.

Ejemplo.- El vector $\vec{a} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ es unitario por que $\|\vec{a}\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$

8.7. TEOREMA.-

Dado un vector $\vec{a} \neq \vec{0}$, entonces el vector $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ es un vector unitario.

Demostración

Sea $\vec{a} \in V_2 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2) \neq (0,0)$ entonces:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}) \text{ es unitario si } \|\vec{u}\| = 1$$

es decir: $$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|})^2 + (\frac{a_2}{\|\vec{a}\|})^2} = \sqrt{\frac{a_1^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_2^2}{\|\vec{a}\|^2}} = \sqrt{\frac{\|\vec{a}\|^2}{\|\vec{a}\|^2}} = 1$$

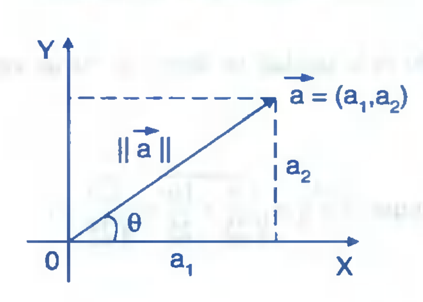
Por lo tanto como $\|\vec{u}\| = 1$ entonces $\vec{u}$ es unitario.

Ejemplo.- Si $\vec{a} = (3,4) \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

por lo tanto: $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ es unitario.

8.8. DIRECCIÓN DE UN VECTOR EN R^2.-

Cada vector no nulo $\vec{a}=(a_1,a_2)$ y su representación como radio vector le corresponde una dirección dada por la medida del ángulo θ formado por el vector $\vec{a}$ y el eje X positivo en sentido antihorario.



Si $\vec{a}=(a_1,a_2) \Rightarrow \|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

$\operatorname{sen}\theta=\dfrac{a_2}{\|\vec{a}\|}$ y $\cos\theta=\dfrac{a_1}{\|\vec{a}\|}$, de donde se tiene:

$a_1=\|\vec{a}\|\cos\theta$; $a_2=\|\vec{a}\|\operatorname{sen}\theta$ **... (1)**

además $0°\le\theta\le 360°$ y de (1) se tiene:

$$\vec{a}=(a_1,a_2)=(\|\vec{a}\|\cos\theta,\ \|\vec{a}\|\operatorname{sen}\theta)=\|\vec{a}\|(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$$

por lo tanto, un vector queda determinado por su magnitud y su dirección.

Si $\vec{u}=\vec{a}$ es un vector unitario, es decir $\|\vec{u}\|=\|\vec{a}\|=1$

Luego si $\vec{u}$ es un vector unitario se puede expresar en función de θ es decir:

$$\vec{u}=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$$

y el ángulo θ se denomina ángulo de inclinación o ángulo de dirección del vector $\vec{a}$.

OBSERVACIÓN.- La medida del ángulo θ se obtiene de la forma siguiente:

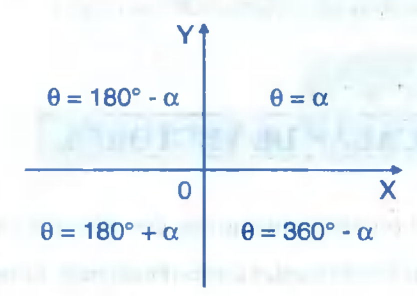
Mediante un ángulo de referencia α y haciendo uso de una tabla de valores se halla el valor de α con $0°\le\alpha\le 90°$ para el cual $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{a_2}{a_1}\right|$, $a_1\neq 0$.

Si $a_1>0$, $a_2>0 \Rightarrow \theta\in$ 1er. cuadrante: $\theta=\alpha$

$a_1 < 0,\ a_2 > 0 \Rightarrow \theta \in$ 2do. cuadrante: $\theta = 180° - \alpha$

$a_1 < 0,\ a_2 < 0 \Rightarrow \theta \in$ 3er. cuadrante: $\theta = 180° + \alpha$

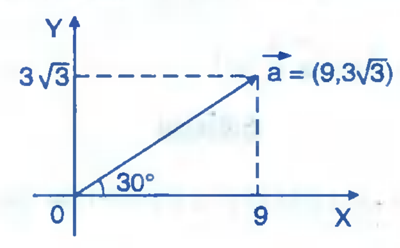
$a_1 > 0,\ a_2 < 0 \Rightarrow \theta \in$ 4to. Cuadrante: $\theta = 360° - \alpha$



Ejemplo.- Hallar un vector $\vec{a}$ de longitud $6\sqrt{3}$ y que tiene la misma dirección de un vector que forma un ángulo de 30° con el sentido positivo del eje **X**.

<u>Solución</u>

$$\vec{a} = \|\vec{a}\|(\cos 30°, \operatorname{sen} 30°) = 6\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (9, 3\sqrt{3})$$



Ejemplo.- Expresar el vector $\vec{a} = (3, -3\sqrt{3})$ en términos de su magnitud y su ángulo de inclinación o dirección .

<u>Solución</u>

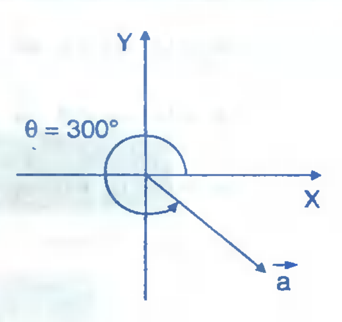
Como $\vec{a} = \|\vec{a}\|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, de donde $\|\vec{a}\| = \sqrt{9+9(3)} = \sqrt{36} = 6$

Calculando θ se tiene: $\operatorname{tg}\theta = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta \in$ 4to. Cuadrante $\theta = 360° - \alpha$

donde $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$

Luego $\theta = 360° - \alpha = 360° - 60° = 300°$

Por lo tanto $\vec{a} = 6(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = 6(\cos 300°, \operatorname{sen} 300°)$



8.9. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES.-

El producto escalar (o producto interno) de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dado por la suma de los productos de sus componentes correspondientes, es decir:

Sí $\vec{a}, \vec{b} \in V_2 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2).(b_1, b_2) = a_1.b_1 + a_2.b_2$$

Ejemplo.- Si $\vec{a} = (x, 3y)$ y $\vec{b} = (-2y, z)$, hallar el valor de $\frac{x+z}{y}$ de modo que $\vec{a} + \vec{b} = (8, -4)$ y $\vec{a} \cdot \vec{b}^{\perp} = 0$.

Solución

$\vec{a} + \vec{b} = (8, -4) = (x, 3y) + (-2y, z) = (x - 2y, 3y + z)$, de donde

(x – 2y, 3y + z) = (8,-4), por igualdad de vectores se tiene: $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3y + z = -4 \end{cases}$ ... (1)

como $\vec{b} = (-2y, z) \Rightarrow \vec{b}^{\perp} = (-z, -2y)$ y como $\vec{a} \cdot \vec{b}^{\perp} = 0$

(x,3y).(-z,-2y) = 0 $\Rightarrow -xz - 6y^2 = 0 \Rightarrow z = -\frac{6y^2}{x}$ ... (2)

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

$$\begin{cases} x-2y=8 \\ 3y-\dfrac{6y^2}{x}=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2y+8 \\ 3y-\dfrac{6y^2}{2y+8}=-4 \Rightarrow 3y-\dfrac{3y^2}{y+4}=-4 \end{array}$$

$$3y(y+4)-3y^2=-4(y+4) \Rightarrow 16y=-16 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

como $x = 2y + 8$ entonces $x = -2 + 8 = 6 \Rightarrow x = 6$

como $z=-\dfrac{6y^2}{x}=\dfrac{-6(-1)^2}{6}=-1 \Rightarrow z=-1$. Luego $\dfrac{x+z}{y}=\dfrac{6-1}{-1}=-5$

OBSERVACIÓN.- El producto escalar de dos vectores es un número real.

8.10. PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES.-

Consideremos tres vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_2$ y $r\in R$ un número real cualquiera; entonces:

① $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

② $(r\vec{a}).\vec{b}=r.(\vec{a}.\vec{b})$

③ $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

④ $\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$

⑤ $(\vec{b}+\vec{c}).\vec{a}=\vec{b}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{a}$

⑥ $\|\vec{a}\|^2=\vec{a}.\vec{a}$

⑦ $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$

⑧ $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$

NOTA.- La prueba de estas propiedades son bastantes simples por lo tanto dejamos para el lector.

Ejemplo.- Sí $\|\vec{a}\|=7$, $\|\vec{b}\|=3$ y $\vec{a}.\vec{b}=-4$. Hallar $M=(11\vec{a}+3\vec{b}).(2\vec{a}+7\vec{b})$

Solución

$$M=(11\vec{a}+3\vec{b}).(2\vec{a}+7\vec{b})=11\vec{a}.(2\vec{a}+7\vec{b})+3\vec{b}.(2\vec{a}+7\vec{b})$$

$= 22\vec{a}.\vec{a} + 77\vec{a}.\vec{b} + 6\vec{a}.\vec{b} + 21\vec{b}.\vec{b} = 22\|\vec{a}\|^2 + 83\vec{a}.\vec{b} + 21\|\vec{b}\|^2$

$= 22(49) + 83(-4) + 21(9) = 1078 - 332 + 189 = 1267 - 332 = 935$

$\therefore \quad M = 935$

8.11. VECTORES PARALELOS Y ORTOGONALES.-

(i) Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos $(\vec{a} // \vec{b})$ si uno de ellos es igual al otro vector multiplicado por un número real, es decir:

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists\, r \in R \text{ tal que } \vec{a} = r.\vec{b}$$

Ejemplo.- Sí $\vec{a} = (2,3)$, $\vec{b} = (1,\frac{3}{2})$, entonces $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow r = 2$, tal que $\vec{a} = 2.\vec{b}$

Ejemplo.- Los vectores $\vec{a} = (2,3)$ y $\vec{b} = (5,3)$ no son paralelos porque $\nexists\, r \in R$, tal que $\vec{a} = r.\vec{b}$.

OBSERVACIÓN.- El vector nulo $\vec{0}$ es paralelo a todos los vectores, en efecto: $\vec{0} = 0.\vec{a}$, $\forall \vec{a}$ vector, $0 \in R$, entonces: $\vec{a}$ y $\vec{0}$ son paralelos.

CONSECUENCIAS.- Sean $\vec{a}, \vec{b} \in V_2 \Rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2)$; $\vec{b} = (b_1, b_2)$, entonces

$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in R$ tal que $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, es decir:

$(a_1, a_2) = \lambda(b_1, b_2)$ de donde $a_1 = \lambda b$, $a_2 = \lambda b_2$

Luego tenemos $\lambda = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$, es decir: si $\vec{a} // \vec{b}$

entonces existe proporcionalidad entre las componentes correspondientes.

Ejemplo.- Determinar si los vectores $\vec{a} = (-6,4,10)$ y $\vec{b} = (9,-6,-15)$ son paralelos.

Solución

Si $\vec{a} \,//\, \vec{b} \Rightarrow$ debe existir proporcionalidad entre los componentes correspondientes:

$\lambda = -\frac{6}{9} = -\frac{4}{6} = -\frac{10}{15} = -\frac{2}{3}$. Luego $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

8.12. CRITERIO DE COLINEALIDAD.-

El conjunto de puntos A, B y C son colineales si y sólo si pertenecen a una misma recta.



Por lo tanto, tomando de dos en dos se obtienen vectores paralelos, $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{AC}$.

Ejemplo.- Determinar si los puntos A(3,1), B(2,2) y C(1,3) son colineales.

Solución

Los puntos A, B y C son colineales situados de dos en dos se generan vectores paralelos

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,2) - (3,1) = (-1,1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,3) - (3,1) = 2(-1,1)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (1,3) - (2,2) = (-1,1)$

Luego $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ son paralelos

$\overrightarrow{BC} = 1\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AB}$ son paralelos

por lo tanto los puntos A, B y C son colineales

(ii) Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales $(\vec{a} \perp \vec{b})$ si se verifica la siguiente relación.

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$$

así por ejemplo, los vectores $\vec{a}=(a,0)$ y $\vec{b}=(0,b)$ son ortogonales, en efecto:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|(a,0)+(0,b)\|=\|(a,b)\|=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \dots (1)$$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|=\|(a,0)-(0,b)\|=\|(a,-b)\|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \dots (2)$$

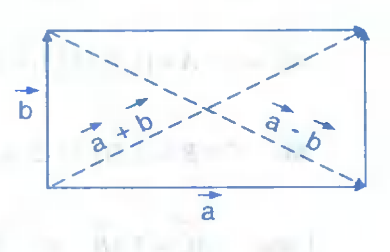
Comparando (1) y (2) se tiene: $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$

si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, entonces denotaremos por $\vec{a}\perp\vec{b}$, es decir:

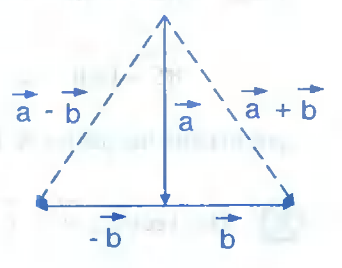
$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$$

8.13. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA ORTOGONALIDAD DE VECTORES.-

Como los vectores $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son las diagonales del paralelogramos cuyos lados son $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, esto significa que el paralelogramo es un rectángulo, por lo tanto sus diagonales son congruentes.



Otro modo de interpretar la ortogonalidad de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es:



8.14. TEOREMA.-

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales sí y sólo sí $\vec{a}.\vec{b}=0$

Demostración

i) Sí $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$ (por demostrar)

por hipótesis se tiene que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, entonces $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$ (por definición de ortogonalidad).

Luego $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}-\vec{b}\|^2$, desarrollando los cuadrados se tiene:

$\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$ de donde $4\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

ii) Si $\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ (por demostrar)

Como $\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow 4\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}+\vec{b}\|^2-\|\vec{a}-\vec{b}\|^2$, de donde

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 \Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$, esta relación nos indica que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales (por definición de ortogonalidad)

Ejemplos.- Determinar cual de los pares de vectores dados son ortogonales.

1. $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(-1,2)$, de donde

   $\vec{a}.\vec{b}=(2,1).(-1,2)=-2+2=0 \Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales.

2. $\vec{a}=(2,3)$ y $\vec{b}=(-2,7)$, de donde

   $\vec{a}.\vec{b}=(2,3).(-2,7)=-4+21=17\neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ no son ortogonales.

8.15. TEOREMA.-

Los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ son ortogonales sí y sólo sí $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

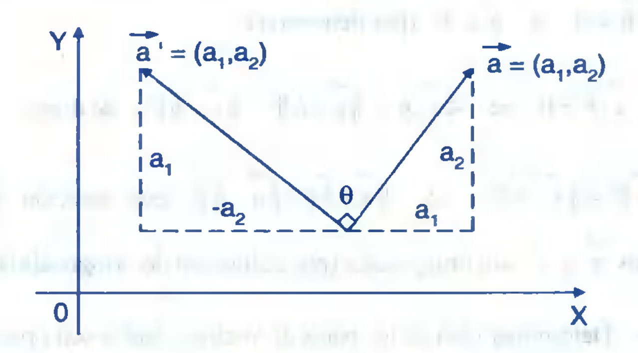
La demostración de este teorema queda como ejercicio para el lector.

OBSERVACIÓN.- Consideremos el vector $\vec{a} \in V_2$ entonces $\vec{a} = (a_1, a_2)$ definiremos un vector ortogonal al vector $\vec{a}$ al cual denotaremos por $\vec{a}^{\perp}$ cuyos componentes son $(-a_2, a_1)$ y que es obtenido aplicando un giro de 90° sobre el vértice del vector $\vec{a}$ en sentido antihorario.

El vector $\vec{a}^{\perp} = (-a_2, a_1)$ así definido es ortogonal al vector $\vec{a}$.

En efecto: $\vec{a}.\vec{a}' = (a_1, a_2).(-a_2, a_1) = -a_1a_2 + a_1a_2 = 0$

Luego $\vec{a}.\vec{a}^{\perp} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{a}^{\perp}$



Ejemplos.- Sea $\vec{a} = (-1,3) \Rightarrow$ su ortogonal es $\vec{a}^{\perp} = (-3,-1)$

Sea $\vec{a} = (2,3) \Rightarrow$ su ortogonal es $\vec{a}^{\perp} = (-3,2)$

8.16. TEOREMA.-

Dados los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ diferentes de $\vec{0}$, se tiene que $\vec{a}$ es ortogonal a $\vec{b}$ si y sólo si $\vec{a}^{\perp} // \vec{b}$.

Demostración

Como $\vec{a} \neq \vec{0}$, entonces por lo menos una de las componentes de $\vec{a}$ es diferente de cero, supongamos que $a_1 \neq 0$.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \iff b_1 = -\frac{a_2b_2}{a_1}.$$

$$\iff \vec{b} = (b_1, b_2) = (-\frac{a_2b_2}{a_1}, b_2) = \frac{b_2}{a_1}(-a_2, a_1)$$

$$\vec{b} = \frac{b_2}{b_1}\vec{a} \Rightarrow \vec{b} \,//\, \vec{a}^{\perp}$$

8.17. COLORARIO.-

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos si y sólo si $\vec{a}.\vec{b}^{\perp} \neq 0$ y $\vec{a}^{\perp}.\vec{b} \neq 0$.

Demostración

Del Teorema anterior es una equivalencia, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos $\iff$ $\vec{a}^{\perp}$ no es ortogonal a $\vec{b}$ y de igual manera que $\vec{b}^{\perp}$ no es ortogonal a $\vec{a}$ si y solo si $\vec{a}.\vec{b}^{\perp} \neq 0$.

Ejemplo.- Hallar todos los valores de x de tal manera que el vector $\vec{a} = (x, 2x+1)$ sea paralelo al vector $\vec{b} = (2x-1, x+2)$

Solución

Aplicando el teorema 2.16. se tiene:

Si $\vec{a} \,//\, \vec{b} \Rightarrow \vec{a}^{\perp} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}^{\perp}.\vec{b} = 0$

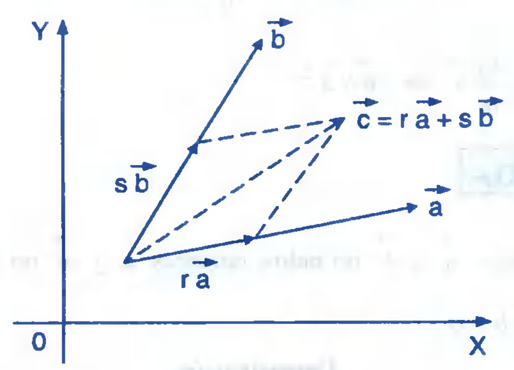
Como $\vec{a} = (x, 2x+1) \Rightarrow \vec{a}^{\perp} = (-2x-1, x)$

$$\vec{a}^{\perp}.\vec{b}=(-2x-1,x).(2x-1,x+2)=0$$

$$-(4x^2-1)+x(x+2)=0 \Rightarrow 3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1,\ x=-\frac{1}{3}$$

8.18. COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES.-

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no paralelos diferentes del vector $\vec{0}$, se dice que el vector $\vec{c}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si existen escalares r, s (r, s ∈ R) tales que:



Los vectores $r\vec{a}$ y $s\vec{b}$ geométricamente se puede construir del hecho que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos de tal manera que la suma sea igual al vector $\vec{c}$.

Analíticamente que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no sean paralelos es equivalente a decir que $\vec{a}.\vec{b}^{\perp}\neq 0$ y $\vec{a}^{\perp}.\vec{b}\neq 0$ (corolario 1.27) y por lo tanto podemos calcular r y s de la siguiente manera.

Partimos de $\qquad \vec{c}=r\vec{a}+s\vec{b}$ **... (1)**

Multiplicamos ambos miembros de (1) por $\vec{a}^{\perp}$

$\vec{c}.\vec{a}^{\perp}=r\vec{a}.\vec{a}^{\perp}+s\vec{b}.\vec{a}^{\perp}$, como $\vec{a}.\vec{a}^{\perp}=0$

$$\vec{c}.\vec{a}^{\perp}=s\vec{b}.\vec{a}^{\perp} \Rightarrow \boxed{s=\frac{\vec{c}.\vec{a}^{\perp}}{\vec{b}.\vec{a}^{\perp}}}$$

multiplicamos ambos miembros de (1) por $\vec{b}^{\perp}$

$$\vec{c}.\vec{b}^{\perp}=r\,\vec{a}.\vec{b}^{\perp}+s\,\vec{b}.\vec{b}^{\perp}\text{, como } \vec{b}.\vec{b}^{\perp}=0$$

$$\vec{c}.\vec{b}^{\perp}=r\,\vec{a}.\vec{b}^{\perp} \Rightarrow \boxed{r=\frac{\vec{c}.\vec{b}^{\perp}}{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}}$$

8.19. TEOREMA.-

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos de R^2, no son paralelos, entonces cualquier vector $\vec{c}$ de R^2 puede expresarse de manera única $\vec{c}=r\,\vec{a}+s\,\vec{b}$ donde los números r y s son calculados en la forma anterior explicada, es decir:

$$\boxed{\vec{c}=\left(\frac{\vec{c}.\vec{b}^{\perp}}{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}\right)\vec{a}+\left(\frac{\vec{c}.\vec{a}^{\perp}}{\vec{b}.\vec{a}^{\perp}}\right)\vec{b}}$$

Ejemplo.- Expresar al vector $\vec{c}=(2,3)$ en combinación lineal de los vectores $\vec{a}=(1,-1)$ y $\vec{b}=(1,2)$.

Solución

Si $\vec{c}$ es combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entonces $\exists$ r,s $\in$ R, tal que: $\vec{c}=r\,\vec{a}+s\,\vec{b}$

Como $r=\dfrac{\vec{c}.\vec{b}^{\perp}}{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}$, donde $\vec{b}=(1,2) \Rightarrow \vec{b}^{\perp}=(-2,1)$

$$r=\frac{\vec{c}.\vec{b}^{\perp}}{\vec{a}.\vec{b}^{\perp}}=\frac{(2,3).(-2,1)}{(1,-1).(-2,1)}=\frac{-4+3}{-2-1}=\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad s=\frac{\vec{c}.\vec{a}^{\perp}}{\vec{b}.\vec{a}^{\perp}}=\frac{(2,3).(1,1)}{(1,2).(1,1)}=\frac{2+3}{1+2}=\frac{5}{3}$$

por lo tanto $(2,3)=\dfrac{1}{3}(1,-1)+\dfrac{5}{3}(1,2)$

8.20. TEOREMA.-

Consideremos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos. Si estos vectores no son paralelos, la igualdad $r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{0}$, implica que $r=s=0$.

Demostración

Por hipótesis tenemos que: $r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{0}$ y que $\vec{a}$, $\vec{b}$ son vectores no paralelos

suponiendo que $r\neq 0 \Rightarrow \vec{a}+\frac{s}{r}\vec{b}=\vec{0}$

Luego $\vec{a}=-\frac{s}{r}\vec{b}=k\vec{b}$, donde $k=-\frac{s}{r}$

Como $\vec{a}=k\vec{b}$, esto significa que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos $(\vec{a}\,//\,\vec{b})$ lo cual contradice a la hipótesis, por lo tanto $r=0$.

Suponiendo que $s\neq 0$ se tiene $\frac{r}{s}\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$, de donde $\vec{b}=-\frac{r}{s}\vec{a}=\lambda\vec{a}$, donde $\lambda=-\frac{r}{s}$

Como $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, esto significa que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos lo cual contradice a la hipótesis, por lo tanto $s=0$.

8.21. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES EN R^2.-

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son "linealmente independiente" si $r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{0}$ entonces r=s = 0, en caso contrario se dice que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son "linealmente dependientes".

Ejemplo.- Determinar si los vectores $\vec{a}=(-1,1)$ y $\vec{b}=(4,3)$ son linealmente independiente o dependiente.

Solución

$r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow$ r(-1,1) + s(4,3) = (0,0)

(-r,r) + (4s,3s) = (0,0) $\Rightarrow$ (-r + 4s, r + 3s) = (0,0)

$$\begin{cases} -r+4s=0 \\ r+3s=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ s=0 \end{cases} \Rightarrow r=s=0$$

por lo tanto $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independiente.

Ejemplo.- Determinar si los vectores $\vec{a}=(-6,3)$ y $\vec{b}=(2,-1)$ son linealmente independiente o dependiente.

Solución

$r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow$ r(-6,3) + s(2,-1) = (0,0)

(-6r + 2s, 3r – s) = (0,0), de donde por igualdad

$$\begin{cases} -6r+2s=0 \\ 3r-s=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} s=3r \\ s=3r \end{matrix}, \text{ donde r es arbitrario}$$

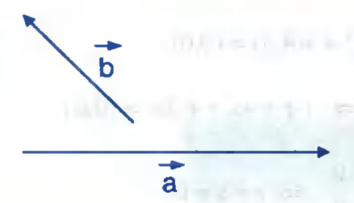
entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente dependientes.

OBSERVACIÓN.- Tres vectores cualesquiera en R^2 son linealmente dependientes entre si.

OBSERVACIÓN.-

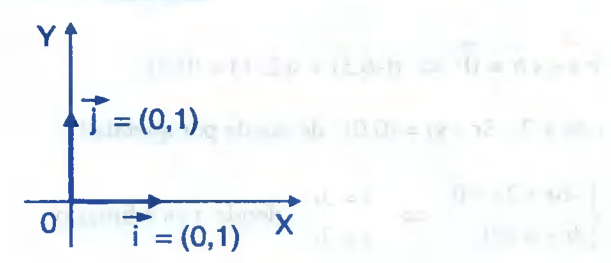
① Los vectores $\vec{a},\vec{b}$ son linealmente dependiente cuando los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales.

② Los vectores $\vec{a},\vec{b}$ son linealmente independiente cuando los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales.



8.22. VECTORES FUNDAMENTALES.-

Consideremos los vectores (1,0) y (0,1) en V_2 al cual denotaremos así: $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j}=(0,1)$, estos vectores son unitarios y se representan a partir del origen de coordenadas, situadas sobre los ejes coordenados en sentido positivo al de los ejes, a estos vectores se les llama vectores fundamentales.



Todo vector de V_2 se puede expresar en combinación lineal de los vectores fundamentales $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j}=(0,1)$

Sea $\vec{a}\in V_2 \Rightarrow \vec{a}=(a_1,a_2)$, pero al vector $\vec{a}$ expresamos así:

$$\vec{a}=(a_1,a_2)=(a_1,0)+(0,a_2)=a_1(1,0)+a_2(0,1)$$

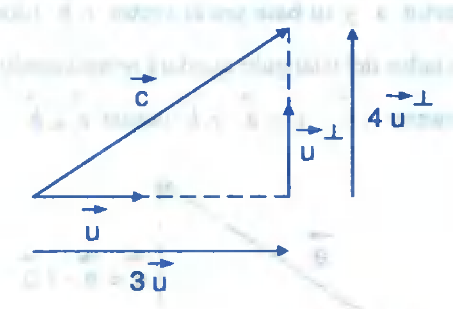
$$\boxed{\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}}$$

A los números a_1,a_2 se denominan componentes escalares de $\vec{a}$ y a los vectores $a_1\vec{i}$ y $a_2\vec{j}$ se denominan componentes vectoriales del vector $\vec{a}$.

8.23. PROPIEDADES DE LOS VECTORES ORTOGONALES UNITARIOS.-

En la combinación lineal de dos vectores se presenta un caso importante cuando estos vectores son unitarios y perpendiculares entre si como es el caso $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$.

Si se considera un vector unitario $\vec{u}$ de $\vec{i}$ y el vector $\vec{u}^{\perp}$ en lugar de $\vec{j}$, entonces el vector $\vec{c} = 3\vec{u} + 4\vec{u}^{\perp}$ es una combinación lineal de los vectores unitarios $\vec{u}$ y $\vec{u}^{\perp}$.



Luego la longitud del vector $\vec{c}$ es $\|\vec{c}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ por la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde la medida de sus catetos son 3 y 4 respectivamente.

OBSERVACIÓN.- Si $\vec{u}$ es un vector unitario se cumple las siguientes relaciones.

① $\|x\vec{u} + y\vec{u}^{\perp}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ② $\|x\vec{u} - y\vec{u}^{\perp}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ejemplo.- Calcular la longitud de los vectores dados $\vec{a} = 3\vec{u} - 4\vec{u}^{\perp}$, $\vec{b} = 35\vec{u} + 12\vec{u}^{\perp}$, $\vec{c} = 5\vec{u} + 12\vec{u}^{\perp}$

Solución

$$\|\vec{a}\| = \|3\vec{u} - 4\vec{u}^{\perp}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\|\vec{b}\| = \|35\vec{u} + 12\vec{u}^{\perp}\| = \sqrt{35^2 + 12^2} = \sqrt{1225+144} = 37$$

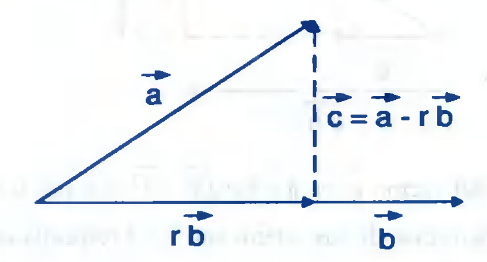
$$\|\vec{c}\| = \|5\vec{u} + 12\vec{u}^{\perp}\| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = 13$$

.24. DEFINICIÓN.-

Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios y ortogonales entre si, entonces los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denominan vectores ortonormales.

5. PROYECCIÓN ORTOGONAL Y COMPONENTE.-

Consideremos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos, construyamos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el vector $\vec{a}$ y su base sea el vector $r.\vec{b}$ (donde $r \in R$) paralelo al vector $\vec{b}$ de modo que los lados del triángulo quedará representado así: hipotenusa el vector $\vec{a}$ y por catetos los vectores $r.\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} - r.\vec{b}$ donde $\vec{c} \perp \vec{b}$



Como $\vec{c} \perp \vec{b}$, lo cual es lo mismo expresar así:

$$(\vec{a} - r.\vec{b}) \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \quad (\vec{a} - r.\vec{b}).\vec{b} = 0, \text{ de donde } \quad \vec{a}.\vec{b} - r\|\vec{b}\|^2 = 0$$

entonces $r = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ es el único número real.

como $\vec{c} \perp \vec{b}$, significa que el triángulo cuya hipotenusa es el vector $\vec{a}$ tendrá por catetos a los vectores: $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}$; $\vec{a} - \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$. En consecuencia al vector $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}$ que es paralelo al vector $\vec{b}$, llamaremos proyección ortogonal del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$.

Al vector $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}$ expresaremos en la forma siguiente: $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}=(\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}).\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$, donde $\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ es el vector unitario en la dirección del vector $\vec{b}$, en tanto que el número $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ es la longitud dirigida del vector proyección le llamaremos la componente del vector $\vec{a}$ en la dirección del vector $\vec{b}$.

8.26. DEFINICIONES.-

(i) Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores, donde $\vec{b}\neq\vec{0}$, definimos la proyección ortogonal del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$ y los representaremos del modo siguiente:

$$proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}$$

(ii) Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores, donde $\vec{b}\neq\vec{0}$, al número $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ que es la longitud dirigida del vector $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ le llamaremos la componente del vector $\vec{a}$ en la dirección del vector $\vec{b}$ y denotaremos así:

$$comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Ejemplo.- Hallar la proyección del vector $\vec{a}=(7,12)$ sobre el vector $\vec{b}=(3,-4)$.

Solución

Por definición se tiene: $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}$

$$proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{(7,12).(3,-4)}{\|(3,-4)\|^2}.(3,-4) = \frac{21-48}{25}(3,-4) = -\frac{27}{25}(3,-4)$$

$$\therefore \quad proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = -\frac{27}{25}(3,-4)$$

Ejemplo.- Dados los vectores $\vec{a} = (3,\sqrt{3})$ y $\vec{b} = (\sqrt{3},-1)$. Hallar $2(proy_{\vec{a}}^{\vec{b}} + proy_{\vec{b}}^{\vec{a}})$

Solución

$$2(proy_{\vec{a}}^{\vec{b}} + proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}) = 2(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}.\vec{a} + \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b})$$

$$= 2(\frac{(3,\sqrt{3}).(\sqrt{3},-1)}{\|(3,\sqrt{3})\|^2}(3,\sqrt{3}) + \frac{(3,\sqrt{3}).(\sqrt{3},-1)}{\|(\sqrt{3},-1)\|^2}(\sqrt{3},-1))$$

$$= 2[\frac{2\sqrt{3}}{12}(3,\sqrt{3}) + \frac{2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3},-1)] = \frac{\sqrt{3}}{3}(3,\sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{3},-1)$$

$$= (\sqrt{3},1) + (3,-\sqrt{3}) = (3+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$$

8.27. PROPIEDADES DEL VECTOR PROYECCIÓN Y COMPONENTE.-

(1) La proyección ortogonal de una suma de vectores en la dirección de algún vector no nulo $\vec{c}$ es la suma de las proyecciones ortogonales.

$$proy_{\vec{c}}^{(\vec{a}+\vec{b})} = proy_{\vec{c}}^{\vec{a}} + proy_{\vec{c}}^{\vec{b}}$$

(2) La proyección del vector $t\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$ es igual a t veces el vector perpendicular de $\vec{a}$.

$$proy_{\vec{b}}^{(t\vec{a})} = t\,proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$$

③ La componente de una suma de vectores en la dirección de algún vector $\vec{c}$ es la suma de los componentes.

$$comp_{\vec{c}}^{(\vec{a}+\vec{b})} = comp_{\vec{c}}^{\vec{a}} + comp_{\vec{c}}^{\vec{b}}$$

④ La componente del vector $t\vec{a}$ es igual a t veces la componente de $\vec{a}$.

$$comp_{\vec{c}}^{(t\vec{a})} = t\,comp_{\vec{c}}^{\vec{a}}$$

8.28. RELACIÓN ENTRE PROYECCIÓN Y COMPONENTE.-

Consideremos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, donde $\vec{b} \neq \vec{0}$ por definición de proyección ortogonal sabemos que:

$$proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}$$

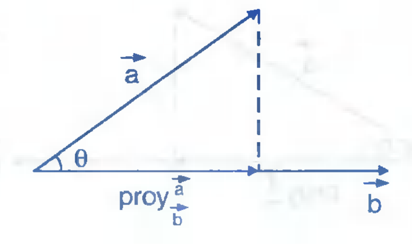
al vector $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ expresaremos en la forma siguiente:

$$proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b} = \frac{(\vec{a}.\vec{b})}{\|\vec{b}\|}.\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}, \text{ como } comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

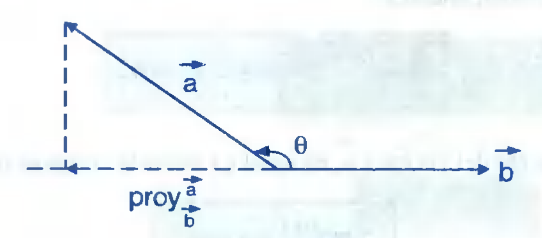
Entonces se tiene:

$$proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = (comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}).\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

i) Si la $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} > 0$, la $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección.



ii) Si la $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} < 0$, la $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ y $\vec{b}$ tienen direcciones opuestas.



iii) Si la $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = 0$, quiere decir que $\vec{a} \perp \vec{b}$

OBSERVACIÓN.- La diferencia entre proyección ortogonal y componente radica en que la proyección ortogonal es un vector y la componente es un número real.

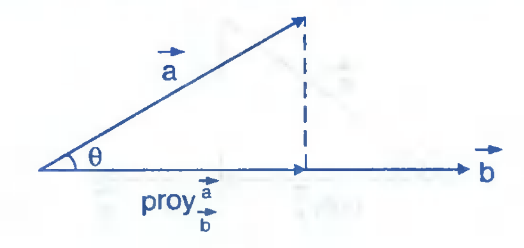
8.29. ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES.-

TEOREMA.- Demostrar que el ángulo formado entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos corresponden a la siguiente relación.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Demostración

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos y θ es el ángulo formado por estos dos vectores $(\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}))$, de modo que el campo de variabilidad está dado por $0 \le \theta \le \pi$.



Por definición de componente sabemos que:

$$comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \quad\Rightarrow\quad \|\vec{b}\|\,comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \vec{a}\,.\,\vec{b} \qquad \textbf{... (1)}$$

del gráfico se sabe que $\cos\theta = \dfrac{comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}}{\|\vec{a}\|}$ de donde $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \|\vec{a}\|\cos\theta$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta = \vec{a}\,.\,\vec{b}$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|}$$

Ejemplo.- Dados los vectores $\vec{a} = (4,3)$, $\vec{b} = (1,-1)$. Hallar:

a) La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

b) La componente de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$

c) El ángulo entre los vectores propuestos.

<u>**Solución**</u>

a) $$proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b} = \frac{(4,3).(1,-1)}{\|(1,-1)\|^2}(1,-1) = \frac{1}{2}(1,-1) = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

b) $$comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{(4,3).(1,-1)}{\|(1,-1)\|} = \frac{4-3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

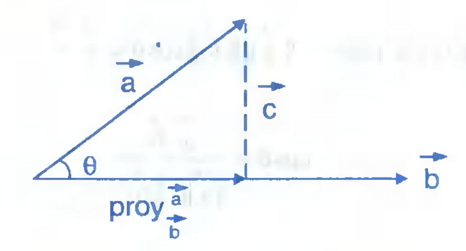
c) $$\cos\theta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \theta = \arccos(\frac{1}{5\sqrt{2}})$$

8.30. LA DESIGUALDAD DE CAUCHY – SCHWARZ.-

TEOREMA.- Demostrar que: para todo vector $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores se verifica la siguiente relación. $|\vec{a}.\vec{b}| \le \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|$

Demostración

Veremos primero para el caso en que $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$



del gráfico aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$\| proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} \|^2 = \| \vec{a} \|^2 - \| \vec{c} \|^2 < \| \vec{a} \|^2$, lo que es lo mismo

$\| proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} \| < \| \vec{a} \|$, además $\vec{a}.\vec{b} = \| \vec{b} \| comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}$

$| \vec{a}.\vec{b} | = \| \vec{b} \| . \| comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} \| < \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \|$ por lo tanto: $| \vec{a}.\vec{b} | < \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \|$ ... **(1)**

ahora veremos el caso cuando $\vec{a} \parallel \vec{b}$ es decir:

Si $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \exists\, r \in R$ tal que $\vec{a} = r.\vec{b}$

$| \vec{a}.\vec{b} | = | (r\vec{b}).\vec{b} | = | r | . \| \vec{b} \|^2 = | r | \| \vec{b} \| . \| \vec{b} \| = \| r\vec{b} \| \| \vec{b} \| = \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \|$

por lo tanto: $| \vec{a}.\vec{b} | = \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \|$ ... **(2)**

Luego de (1) y (2) se tiene: $\therefore \quad | \vec{a}.\vec{b} | \le \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \|$

APLICACIÓN.- Como aplicación de este teorema, demostraremos la desigualdad triangular: $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

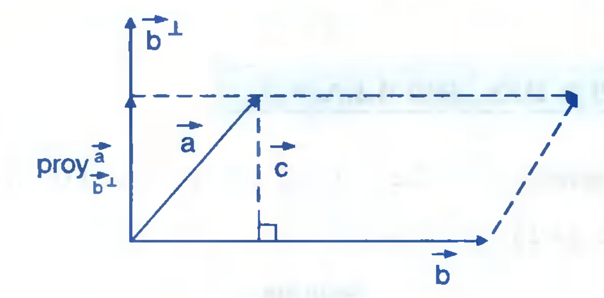
$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\,\vec{a}.\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \le \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2$$

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \le \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2$, de donde

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \le (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$ por lo tanto: $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

8.31. ÁREA DE: TRIÁNGULOS Y PARALELOGRAMOS.-

Consideremos un paralelogramo cuyos lados son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



La altura del paralelogramo es $h = \|\vec{c}\|$, de donde

$h = \|\vec{c}\| = \|proy_{\vec{b}^{\perp}}^{\vec{a}}\| = \|comp_{\vec{b}^{\perp}}^{\vec{a}}\|$, además se conoce que:

área del paralelogramos es: A = base x altura

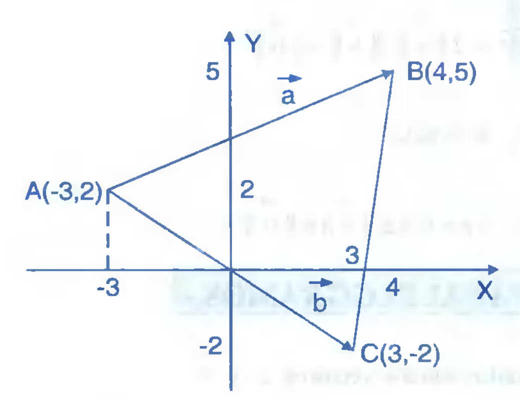
$$A = \|\vec{b}\|.\|comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}\| = \|\vec{b}\|\frac{\|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}\|}{\|\vec{b}^{\perp}\|} = |\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| \qquad \therefore \qquad A = |\vec{a}.\vec{b}^{\perp}|$$

En consecuencia el área del triángulo cuyos lados son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dado por:

$$A = \frac{1}{2}|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}|$$

Ejemplos.- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(-3,2), B(3,-2), C(4,5).

Solución



$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (7,3)$

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (6,-4)$

$\vec{b} = (6,-4) \Rightarrow \vec{b}^{\perp} = (4,6)$

$A = \frac{1}{2}|\vec{a}.\vec{b}^{\perp}| = \frac{1}{2}|28+18| = 23$

$\therefore \quad A = 23\ u^2$

8.32. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Dados los vectores $\vec{a} = (-2,2)$, $\vec{b} = (3,-2)$ y $\vec{c} = (-1,1)$, resolver la ecuación: $3\vec{a} - 2[3(\vec{b} - 2\vec{c}) + 2\vec{a}] + 3\vec{x} = 2\vec{c} + \vec{x}$.

Solución

$3\vec{a} - 2[3(\vec{b} - 2\vec{c}) + 2\vec{a}] + 3\vec{x} = 2\vec{c} + \vec{x}$, efectuar las operaciones

$3\vec{a} - 6\vec{b} + 12\vec{c} - 4\vec{a} + 3\vec{x} = 2\vec{c} + \vec{x}$, simplificando

$2\vec{x} = \vec{a} + 6\vec{b} - 10\vec{c}$, reemplazando los vectores

$2\vec{x} = (-2,2) + 6(3,-2) - 10(-1,1)$, efectuar las operaciones

$2\vec{x} = (-2,2) + (18,-12) - (-10,10) = (-2+18+10, 2-12-10)$

$2\vec{x} = (26,-20)$ de donde $\vec{x} = (13,10)$

(2) Sean P(c,d) y Q(c + a, b + d). Muestre que la magnitud de $\overrightarrow{PQ}$ es $\sqrt{a^2+b^2}$.

Solución

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(c+a,b+d)-(c,d)=(c+a-c,b+d-d)=(a,b)$$

$$\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{a^2+b^2}$$

(3) Sí $\vec{a}=(x+1,\ 3x-2)$ y $\vec{b}=(1-x,x)$. Hallar x para que $\vec{a}+5\vec{b}$ sea paralelo a $\vec{c}=(1,-7)$

Solución

$$\vec{a}+5\vec{b}=(x+1,\ \ 3x-2)+5(1-x,\ \ x)=(6-4x,\ \ 8x-2)$$

como $\vec{a}+5\vec{b}\,//\,\vec{c} \Rightarrow \exists\,\lambda\in R$ tal que: $\vec{a}+5\vec{b}=\lambda\,\vec{c}$, dé donde:

$(6-4x,\ 8x-2)=\lambda(1,-7)$ por igualdad se tiene:

$6-4x=\lambda$; $8x-2=-7\lambda \Rightarrow 8x-2=-7(6-4x)$

$\Rightarrow 20x=40$ de donde $x=2$.

(4) Determinar para qué valores de α los vectores $\vec{a}+\alpha\vec{b}$; $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ son perpendiculares entre sí, sabiendo que $\|\vec{a}\|=3$, $\|\vec{b}\|=5$.

Solución

Como $\vec{a}+\alpha\vec{b}\perp\vec{a}-\alpha\vec{b} \Rightarrow (\vec{a}+\alpha\vec{b}).(\vec{a}-\alpha\vec{b})=0$

de donde $\vec{a}.\vec{a}-\alpha^2\,\vec{b}.\vec{b}=0 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2-\alpha^2\|\vec{b}\|=0$

$$\alpha^2=\frac{\|\vec{a}\|^2}{\|\vec{b}\|^2}=\frac{9}{25} \Rightarrow \alpha=\pm\frac{3}{5}$$

(5) Calcular $\|\vec{a}-\vec{b}\|$ sabiendo que: $\|\vec{a}\|=13$, $\|\vec{b}\|=19$ y $\|\vec{a}+\vec{b}\|=24$

Solución

Como $\|\vec{a}+\vec{b}\|=24$, elevando al cuadrado tenemos:

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=24^2 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}=576$, de donde

$169+361+2\vec{a}.\vec{b}=576 \Rightarrow 2\vec{a}.\vec{b}=46$

$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}=169+361-46=484$

$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=484 \Rightarrow \|\vec{a}-\vec{b}\|=\sqrt{484}=22$

(6) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo $\alpha=60°$, se sabe además que: $\|\vec{a}\|=5$ y $\|\vec{b}\|=8$. Determinar: $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ y $\|\vec{a}-\vec{b}\|$.

Solución

$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=60° \Rightarrow \cos 60°=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=20$

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}=25+64+40=129 \quad \therefore \quad \|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{129}$

$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{a}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}=25+64-40=49 \quad \therefore \quad \|\vec{a}-\vec{b}\|=7$

(7) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre sí un ángulo de 45° y el módulo de $\vec{a}$ es 3. Hallar el módulo de $\vec{b}$, de modo que $(\vec{a}-\vec{b})$ sea perpendicular al vector $\vec{a}$

Solución

$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=45° \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos 45°=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\|\vec{b}\|$

$\vec{a}-\vec{b}\perp\vec{a} \Rightarrow (\vec{a}-\vec{b}).\vec{a}=0$, de donde $\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2=\vec{a}.\vec{b}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{b}$

$9=\frac{3\sqrt{2}}{2}\|\vec{b}\| \Rightarrow \|\vec{b}\|=3\sqrt{2}$

8 Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre sí un ángulo de 45° y el módulo de $\vec{a}$ es 3. Hallar el módulo de $\vec{b}$ para que $\vec{a}+\vec{b}$ forme con $\vec{a}$ un ángulo de 30°.

Solución

Por datos tenemos: $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=45°$ y $\|\vec{a}\|=3$

Determinaremos $\|\vec{b}\|$, para que $\measuredangle(\vec{a},\vec{a}+\vec{b})=30°$

Como $\measuredangle(\vec{a},\vec{a}+\vec{b})=45° \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos 45°=\frac{3\sqrt{2}}{3}\|\vec{b}\|$

$\measuredangle(\vec{a},\vec{a}+\vec{b})=30° \Rightarrow \vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})=\|\vec{a}\|\|\vec{a}+\vec{b}\|\cos 30°$

$\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{a}+\vec{b}\|\cos 30°$, de donde

$\|\vec{a}\|^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\|\vec{b}\|=3\|\vec{a}+\vec{b}\|\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 9+\frac{3\sqrt{2}}{2}\|\vec{b}\|=\frac{3\sqrt{3}}{2}\|\vec{a}+\vec{b}\|$

$3+\frac{\sqrt{2}}{2}\|\vec{b}\|=\frac{\sqrt{3}}{3}\|\vec{a}+\vec{b}\|$ elevando al cuadrado y simplificando

$\|\vec{b}\|^2-3\sqrt{2}\|\vec{b}\|-9=0 \Rightarrow \|\vec{b}\|=\frac{3}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})=\frac{3}{2\operatorname{sen}15°}$

9 Sean $\vec{a}=\cos\theta\,\vec{i}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$ y $\vec{b}=\cos(\theta+\frac{\pi}{2})\,\vec{i}+\operatorname{sen}(\theta+\frac{\pi}{2})\,\vec{j}$ dos vectores. Demostrar que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales.

Solución

$\vec{a} \perp \vec{b}$ ($\vec{a}$ y $\vec{b}$ ortogonales) $\Leftrightarrow$ $\vec{a}.\vec{b}=0$

$$\vec{a}.\vec{b}=(\cos\theta,\text{sen}\,\theta).(\cos(\theta+\frac{\pi}{2})).sen(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta.\cos(\theta+\frac{\pi}{2})+\text{sen}\,\theta.\text{sen}(\theta+\frac{\pi}{2})$$

$$=\cos\theta[\cos\theta.\cos\frac{\pi}{2}-\text{sen}\,\theta.\text{sen}\,\frac{\pi}{2}]+\text{sen}\,\theta[\text{sen}\,\theta.\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta.\text{sen}\,\frac{\pi}{2}]$$

$$= \cos\theta\,(0-\text{sen}\,\theta)+\text{sen}\,\theta\,(0+\cos\theta) = -\,\text{sen}\,\theta\cos\theta+\text{sen}\,\theta\cos\theta = 0$$

Como $\vec{a}.\vec{b}=0$ $\Rightarrow$ $\vec{a}\perp\vec{b}$

(10) Demostrar que $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son ortogonales sí solo sí $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$.

Solución

i) Si $\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$ $\Rightarrow$ $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$ por demostrar

como $\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$ $\Rightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=0$

$\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2=0$ $\Rightarrow$ $\|\vec{a}\|^2=\|\vec{b}\|^2$ de donde $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$

ii) Sí $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$ $\Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$ por demostrar

como $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$ $\Rightarrow$ $\|\vec{a}\|^2=\|\vec{b}\|^2$ $\Rightarrow$ $\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2=0$

$\Rightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=0$ $\Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$ (ortogonales).

(11) Demostrar que: Si dos vectores son unitarios, entonces la suma es un vector unitario si y sólo si el ángulo formado por dichos vectores es de 120°.

Solución

i) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ vectores unitarios de modo que:

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{a}+\vec{b}\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 120° \quad \text{por demostrar}$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\| = 1$$

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|\cos\theta = 1$$

$$1 + 1 + 2\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos\theta = -1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 120°$$

ii) Sí $\theta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 120° \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a}+\vec{b}\| = 1$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\| = 1$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|\cos 120° = 1+1-2(\frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\| = 1$$

como $\|\vec{a}+\vec{b}\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}+\vec{b}$ es unitario.

(12) Probar que la suma de vectores es conmutativa, es decir: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

Solución

Se observa que: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ por definición



de suma de donde: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$ **... (1)**

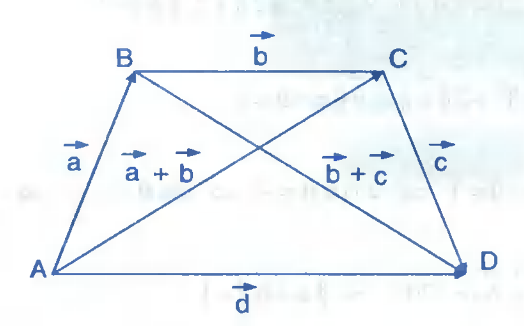
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ por definición de

suma de donde: $\vec{b}+\vec{a} = \vec{c}$ **... (2)**

comparando (1) y (2) se tiene: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

(13) Demostrar que la suma de vectores es asociativa, es decir: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Solución



Se observa que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, por definición de suma de vectores, de donde:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC} \qquad \textbf{... (1)}$$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}$, por definición de suma de vectores, de donde:

$$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD} \qquad \textbf{... (2)}$$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, por definición de suma de vectores, de donde:

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{d} \qquad \textbf{... (3)}$$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, por definición de suma de vectores, de donde:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{d} \qquad \textbf{... (4)}$$

comparando (3) y (4) se tiene: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(14) Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a la mitad de su longitud.

Solución

Sea Δ ABC, de modo que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A,\quad \overrightarrow{BC} = C - B,\quad \overrightarrow{AC} = C - A \qquad M = \frac{A+C}{2} \qquad N = \frac{B+C}{2}$$

$$\overrightarrow{MN} = N - M = \frac{B+C}{2} - \frac{A+C}{2} = \frac{B-A}{2}$$

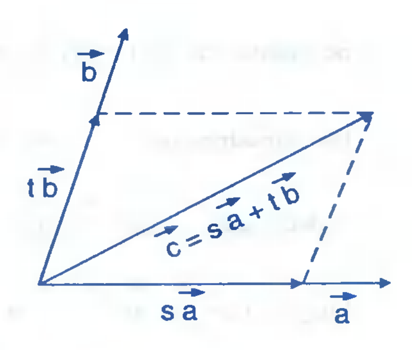
como $\overrightarrow{MN} = \frac{B-A}{2} = \frac{1}{2}AB$ entonces: $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$, a continuación se debe comprobar que el segmento que une los puntos medio de dos lados de un triángulo es igual a la mitad de la longitud del tercer lado del triángulo, para ello sabemos que:

$$\|\overrightarrow{MN}\| = \|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|, \text{ por lo tanto: } \quad \|\overrightarrow{MN}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$$

(15) Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores que tienen distinta dirección. Hallar la expresión de cualquier vector $\vec{c}$ del plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Solución

Sabemos que el vector $t\vec{b}$ es paralelo al Vector $\vec{b}$, $\forall$ t $\in$ R, análogamente el vector $s\vec{a}$ es paralelo al vector $\vec{a}$, $\forall$ s $\in$ R, y aplicando la regla del paralelogramo tenemos: $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$, $\forall$ s, t $\in$ R; que es la expresión pedida.



(16) Demostrar que en un triángulo isósceles, la mediana es igual a la altura.

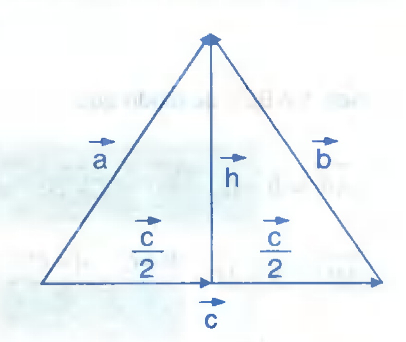
Solución

Por hipótesis tenemos que: $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$

debemos demostrar que: $\vec{h}.\vec{c} = 0$.

Según el gráfico sabemos que:

$\vec{h}.\vec{c} = (\vec{a} - \frac{\vec{c}}{2}).\vec{c}$ ... **(1)**



igualmente según el gráfico se tiene: $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a} \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ... **(2)**

reemplazando (2) en (1) tenemos: $(\vec{a} - \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{h}.\vec{c}$, de donde

$$\vec{h}.\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{b}) = \frac{1}{2}(\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2) = 0$$

entonces $\vec{h}.\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{h} \perp \vec{c}$

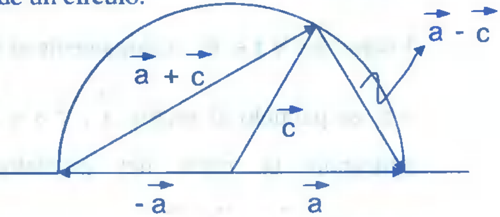
17 Demostrar que el triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo.

Solución

Se observa que $\|\vec{a}\| = \|\vec{c}\|$ por ser radio de un círculo.

Por demostrar que: $\vec{a} + \vec{c} \perp \vec{a} - \vec{c}$

es decir que: $(\vec{a} + \vec{c}).(\vec{a} - \vec{c}) = 0$



Luego: $(\vec{a} + \vec{c}).(\vec{a} - \vec{c}) = \vec{a}.\vec{a} - \vec{c}.\vec{c} = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{c}\|^2$

pero como $\|\vec{a}\| = \|\vec{c}\| \Rightarrow (\vec{a} + \vec{c}).(\vec{a} - \vec{c}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 = 0$

En consecuencia $(\vec{a} + \vec{c}).(\vec{a} - \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} \perp \vec{a} - \vec{c}$


Demostrar que si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos la igualdad $r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{0}$, implica que r = s = 0.

Solución

Por hipótesis tenemos que: $r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{0}$ donde $\vec{a},\vec{b}$ son vectores no paralelos.

Suponiendo que $r\neq 0 \Rightarrow \vec{a}+\frac{s}{r}\vec{b}=\vec{0}$. Luego $\vec{a}=-\frac{s}{r}\vec{b}=k\vec{b}$, donde $k=-\frac{s}{r}$; como $\vec{a}=k\vec{b}$, esto significa que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos ($\vec{a}\,//\,\vec{b}$) lo cual contradice a la hipótesis, por lo tanto r = 0. Suponiendo que $s\neq 0$ se tiene $\frac{r}{s}\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ de donde $\vec{b}=-\frac{r}{s}\vec{a}=k\vec{a}$, donde $k=-\frac{r}{s}$.

Como $\vec{b}=k\vec{a}$ esto significa que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos lo cual contradice a la hipótesis, por tanto $s=0$.


Demostrar que si $\vec{a},\vec{b}$ son dos vectores cuyas direcciones se cortan, entonces la igualdad vectorial $\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}=\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}$, implica que $\alpha_1=\alpha_2$; $\beta_1=\beta_2$.

Solución

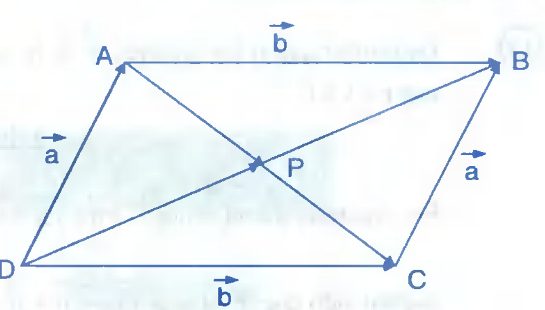
Por hipótesis se tiene que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se cortan, entonces los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos; como $\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}=\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}$, entonces:

$(\alpha_1-\alpha_2)\vec{a}+(\beta_1-\beta_2)\vec{b}=\vec{0}$ (por el ejercicio 18). Se tiene: $\alpha_1-\alpha_2=0$ y $\beta_1-\beta_2=0$, de donde se tiene: $\alpha_1=\alpha_2$; $\beta_1=\beta_2$.


Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Solución

Consideremos el paralelogramo OABC cuyas diagonales se cortan en el punto P, además en la gráfica se observa que:



i) $\vec{a}+\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ entonces $\overrightarrow{AC}=\vec{b}-\vec{a}$ y $\overrightarrow{AP}=r.\overrightarrow{AC}$ o $\overrightarrow{AP}=r(\vec{b}-\vec{a})$, $r\in R$ puesto que $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos.

ii) $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ y $\overrightarrow{OP}=s.\overrightarrow{OB}$ o $\overrightarrow{OP}=s(\vec{a}+\vec{b})$, $s\in R$ puesto que $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OB}$ son paralelos.

iii) $\vec{a}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{AP}$ reemplazando i), ii) en iii) se tiene:

$\vec{a}=s(\vec{a}+\vec{b})-r(\vec{b}-\vec{a})$, de donde $\vec{a}=(s+r)\vec{a}+(s-r)\vec{b}$

como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos y de acuerdo al (ejercicio 19) se tiene que:

$$\begin{cases} s+r=1 \\ s-r=0 \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{matrix} s=\dfrac{1}{2} \\ r=\dfrac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\overrightarrow{OP}=s\,\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\,,\quad \overrightarrow{AP}=r.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

con lo que se afirma que P es el punto medio de las diagonales.

(21) En un triángulo cualquiera, demostrar que existe otro triángulo cuyos lados son iguales y paralelos del primero.

Solución

La condición para que tres vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formen un triángulo es: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

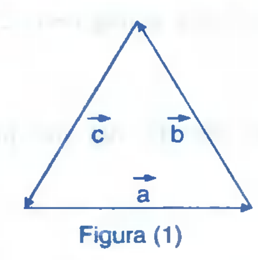


Figura (1)

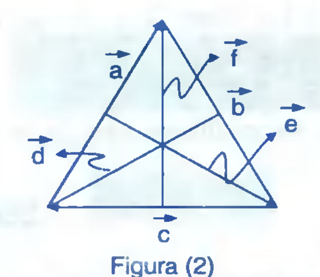


Figura (2)

En la figura (2) se tiene: $\vec{d}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

$$\vec{e}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\vec{f}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$$ Sumando se tiene:

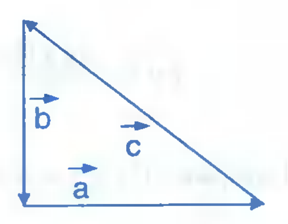
$$\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}=\frac{2}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

Luego $\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}=\vec{0}$ cumple la condición de formar un triángulo.

(22) Demostrar vectorialmente que: si el cuadrado de la longitud de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

Solución

Se sabe que: $\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2=\|\vec{c}\|^2$



Y como la trayectoria es cerrada entonces

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, pero $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$.

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=(-\vec{c})(-\vec{c})$

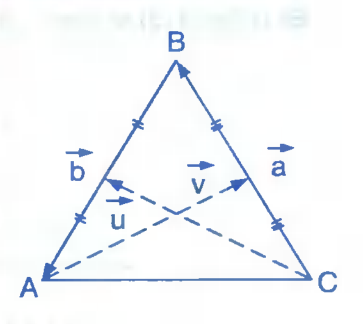
$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{c}\|^2$ de donde $\|\vec{c}\|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{c}\|^2$ entonces $\vec{a}.\vec{b} = 0$ por lo tanto $\vec{a} \perp \vec{b}$; como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, por consiguiente el triángulo es un triángulo rectángulo.

(23) Demostrar vectorialmente que en un triángulo isósceles hay dos medianas de igual medida.

Solución

Sabemos por hipótesis que: $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ por ser triángulo isósceles:

además del gráfico se tiene: $\vec{V} = \frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}$



por definición de suma de vectores

$\vec{u} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$, por definición de suma de vectores.

Luego demostraremos que: $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}\| = \frac{\|\vec{a}\|^2}{4} + \vec{a}.\vec{b} + \|\vec{b}\|^2, \text{ como } \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$$

entonces: $\|\vec{v}\|^2 = \frac{5\|\vec{a}\|^2}{4} + \vec{a}.\vec{b}$ **... (1)**

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\| = \|\vec{a}\|^2 + \vec{a}.\vec{b} + \frac{\|\vec{b}\|^2}{4}, \text{ como } \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \frac{5\|\vec{a}\|^2}{4} + \vec{a}.\vec{b}$$ **... (2)**

al comparar (1) y (2) se tiene: $\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \Rightarrow \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$

por lo tanto las dos medianas de un triángulo isósceles, sus medidas son iguales.


Demostrar que si las magnitudes de la suma y la diferencia de dos vectores son iguales, entonces los vectores son perpendiculares.

Solución

Consideremos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces por condición del problema se tiene: $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$, de donde se tiene:

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}-\vec{b}\|^2$, desarrollando tenemos:

$\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}$, simplificando

$4\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$, esto indica que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.


Demostrar que si la suma y la diferencia de dos vectores son perpendiculares, entonces los vectores tienen magnitudes iguales.

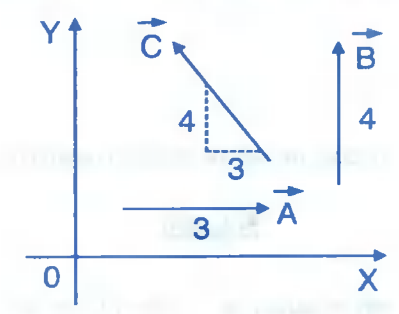
Solución

Consideremos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de tal manera que:

$\vec{a}+\vec{b} \perp \vec{a}-\vec{b} \quad \Rightarrow \quad (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=0$, desarrollando el producto escalar se tiene:

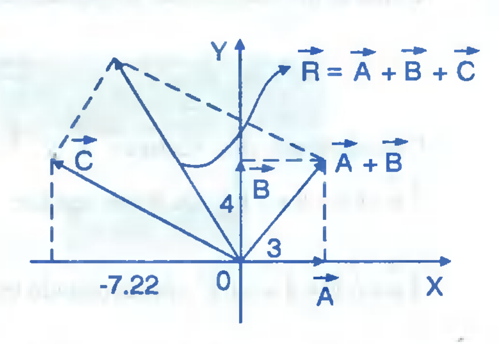
$\|\vec{a}\|^2-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\|\vec{b}\|^2=0 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2=\|\vec{b}\|^2$ entonces $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$


Sumar gráficamente y analíticamente los vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ que se muestran en la figura



Solución

Analíticamente: $\vec{A}=(3,0)$, $\vec{B}=(0,4)$



$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}=1.73 \quad \Rightarrow \quad \alpha=53°$

$C_y=12\operatorname{sen}53°=9.58$

$C_x=12\cos(180°-53°)=-7.22$

Como $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(-4.22,13.58)$

$\|\vec{R}\|=\sqrt{(-4.22)^2+(13.58)^2}=14.22$

(27) Sea $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ y $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Encuentre un vector unitario en la misma dirección que $\vec{u}+\vec{v}$.

Solución

$\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}=(2,-3)$ y $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}=(-1,2)$

$\vec{u}+\vec{v}=(2,-3)+(-1,2)=(2-1,-3+2)=(1,-1)=\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{k}\|=\sqrt{2}$

Sea $\vec{m}$ el vector unitario en la misma dirección que el vector $\vec{k}=(1,-1)$ es decir

$\vec{m}=\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. $\qquad \therefore \quad \vec{m}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

(28) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ son vectores unitarios, hallar la norma del vector $\vec{a}-\vec{b}$.

Solución

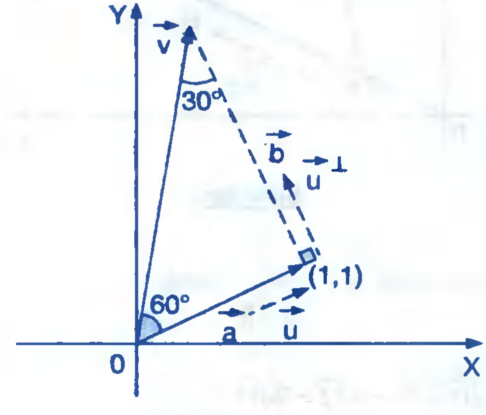
Como $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ son unitarios $\Rightarrow \|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\|\vec{a}+\vec{b}\|=1$

Como $\|\vec{a}+\vec{b}\|=1 \Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\|^2=1^2$, desarrollando

$\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2=1$ de donde $1+2\vec{a}.\vec{b}+1=1$ entonces $2\vec{a}.\vec{b}=-1$

$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}=1+1+1=3$ $\therefore \|\vec{a}-\vec{b}\|=\sqrt{3}$

(29) En la figura adjunta determinar el vector $\vec{v}$.



Solución

Como $\vec{a}$ es un vector de posición $\Rightarrow \vec{a}=(1,1)$ de donde $\|\vec{a}\|=\sqrt{2}$

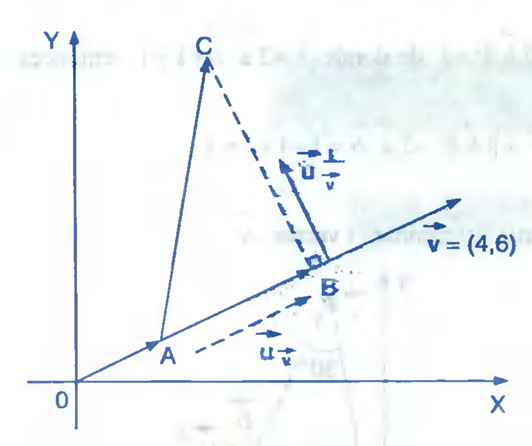
$$\vec{u}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow \vec{u}^{\perp}_{\vec{a}}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$tg\,60°=\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}=\sqrt{3} \Rightarrow \|\vec{b}\|=\sqrt{3}\|\vec{a}\|=\sqrt{3}\sqrt{2}=\sqrt{6}$$

$$\vec{b}=\|\vec{b}\|\vec{u}^{\perp}=\sqrt{6}(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=(1,1)+(-\sqrt{3},\sqrt{3})=(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$ $\therefore \vec{v}=(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$

(30) En la figura adjunta determinar $\overrightarrow{AC}$ sabiendo que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{13}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \frac{3}{2}\sqrt{13}$.



Solución

Calculando el vector unitario $\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ donde

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

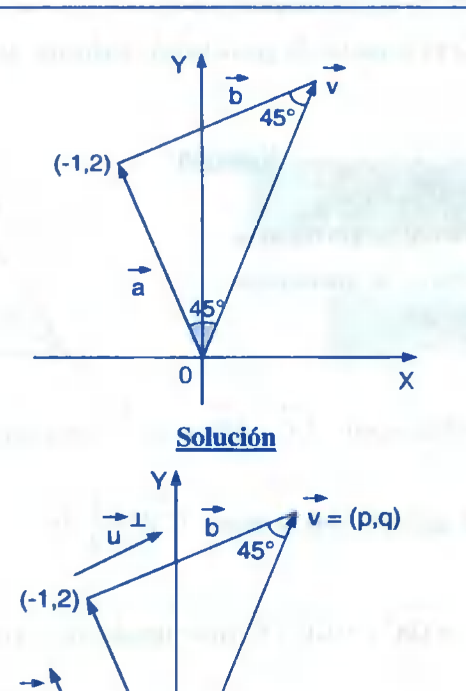
$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(4,6)}{2\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) \Rightarrow \vec{u}^{\perp}_{\vec{v}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\vec{u}_{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|\,\vec{u}_{\overrightarrow{AB}} = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) = (2,3)$$

$$\vec{u}^{\perp}_{\vec{v}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BC}\|\,\vec{u}^{\perp}_{\vec{v}} = \frac{3}{2}\sqrt{13}\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \left(\frac{-9}{2}, 3\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (2,3) + \left(-\frac{9}{2}, 3\right) = \left(-\frac{5}{2}, 6\right) \qquad \therefore \; \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{5}{2}, 6\right)$$

(31) En la figura adjunta determinar las componentes del vector $\vec{v}$



Solución

Como $\vec{a}$ es un vector de posición entonces $\vec{a} = (-1,2)$

Calculando el vector unitario en la dirección del vector $\vec{a}$

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{(-1,2)}{\sqrt{1+4}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow \vec{u}^{\perp}_{\vec{a}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \;;\; -\vec{u}^{\perp}_{\vec{a}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

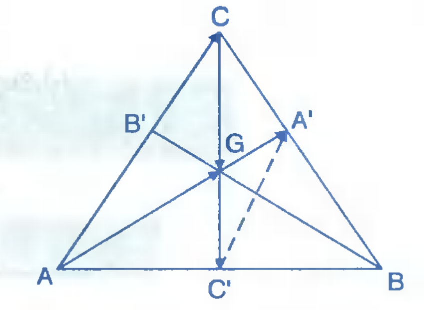
$$\vec{u}_{\vec{b}} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \Rightarrow \vec{b} = \|\vec{b}\|\,\vec{u}_{\vec{b}} \quad \text{como} \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \sqrt{5}$$

por ser un triangulo isósceles se tiene: $\vec{b} = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (2,1)$

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = (-1,2) + (2,1) = (-1+2, 2+1) = (1,3)$ $\qquad \therefore \; \vec{v} = (1,3)$



Demostrar que si G es el centro de gravedad del triángulo de vértices A, B y C, entonces $G=\frac{1}{3}(A+B+C)$.



Solución

Se conoce que el centro de gravedad de un triángulo, es el punto de intersección de sus medianas.

En este caso las medianas son: $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$ (ver gráfico)

además mediante el ejercicio (14) se tiene: $\overrightarrow{C'A'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **... (1)**

por otra parte $\overrightarrow{AG}=r\,\overrightarrow{GA'}=r(\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{C'A})$ de donde $\overrightarrow{AG}=r(\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{C'A'})$ **...(2)**

ahora reemplazando (2) en (1) obteniéndose: $\overrightarrow{AG}=r(\overrightarrow{GC'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$ **... (3)**

por otro lado: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}$ **... (4)**

pero $\overrightarrow{CG}=t\,\overrightarrow{GC'}$ **... (5)**

reemplazando (5) en (4) se tiene: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+t\,\overrightarrow{GC'}$ **... (6)**

igualando (3) y (6) se tiene:

$$r(\overrightarrow{GC'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AC}+t\,\overrightarrow{GC'} \Rightarrow (r-t)\overrightarrow{GC'}+(\frac{r}{2}-1)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

pero como $\overrightarrow{GC'}$ y $\overrightarrow{AC}$ son no nulos y ni paralelos, entonces por el ejercicio (19) se tiene: $r-t=0$ y $\frac{1}{2}r-1=0$ de donde $r=t=2$.

Luego $\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{GA'} \Rightarrow G - A = 2A' - 2G$ de donde $3G = A + 2A'$ **... (7)**

Como A' es un punto medio de B y C entonces $A' = \frac{B+C}{2}$ **... (8)**

ahora reemplazando (8) en (7) se tiene $3G = A + 2(\frac{B+C}{2})$ $\therefore\ G = \frac{1}{3}(A+B+C)$

(33) Si G es el centro de gravedad del triángulo de vértices A, B, C demostrar que: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Solución

Mediante el ejercicio (32) el centro de gravedad del ΔABC es:

$G = \frac{1}{3}(A+B+C)$ de donde $3G = A + B + C$ **... (1)**

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = A - G + B - G + C - G = A + B + C - 3G$ **... (2)**

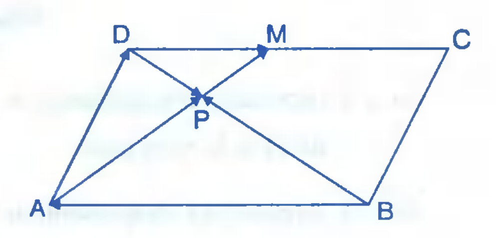
ahora reemplazamos (1) en (2) y se obtiene: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3G - 3G = 0$

$\therefore\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

(34) Dado un paralelogramo de vértices los punto A, B, C y D. Si M es el punto medio de $\overrightarrow{CD}$ y P está en $\overrightarrow{AM}$ a $\frac{2}{3}$ de la distancia de A a P, demostrar vectorialmente que: $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

Solución

De las condiciones del problema se tiene:



$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

de donde $\overrightarrow{DM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

por demostrar $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$, de donde:

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM})$$

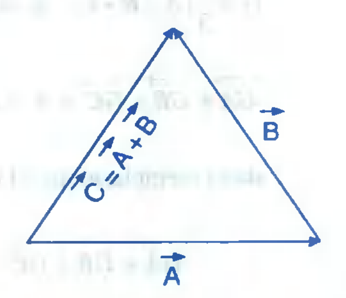
$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{\overrightarrow{CD}}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$$

por lo tanto: $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

(35) Deducir la ley de los cósenos en un triángulo empleando producto escalar.

Solución



Se conoce que: $\|\vec{A}\|^2=\vec{A}.\vec{A}$

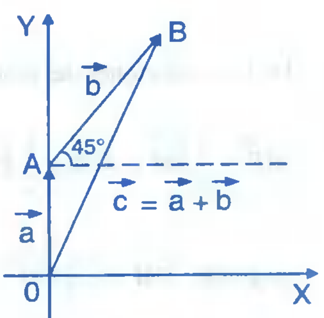
$$\|\vec{c}\|^2=\|\vec{A}+\vec{B}\|=(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})$$

$$=\vec{A}.\vec{A}+\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{A}+\vec{B}.\vec{B}=\|\vec{A}\|^2+2\vec{A}.\vec{B}+\|\vec{B}\|^2$$

$$\|\vec{c}\|^2=\|\vec{A}\|^2+\|\vec{B}\|^2+2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\alpha,\ \text{donde}\ \alpha=\measuredangle(\vec{A},\vec{B})$$

(36) Un automóvil recorre 5 km. hacia el norte, luego 8 km. hacia el noreste; representar gráficamente y hallar la resultante del recorrido.

Solución



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ (representa el desplazamiento de 5 km. hacia el norte).

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ (representa el desplazamiento de 8 km. hacia el noreste).

$\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ (representa a la resultante del recorrido, es decir: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

En el triángulo OAB los lados son los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ cuyas longitudes son:

$\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$, $\|\vec{c}\| = ?$

para determinar la longitud de $\vec{c}$, aplicamos la ley del coseno, es decir:

$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$.

$\|\vec{c}\|^2 = 89 - 80\cos\theta$, de modo que θ es el ángulo comprendido entre $\vec{a}, \vec{b}$ cuyo valor es:

$\theta + 90° + 45° \Rightarrow \theta = 135°$ (ver gráfico)

$\cos\theta = \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego reemplazando se tiene: $\|\vec{c}\|^2 = 89 - 80(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 89 + 40\sqrt{2}$

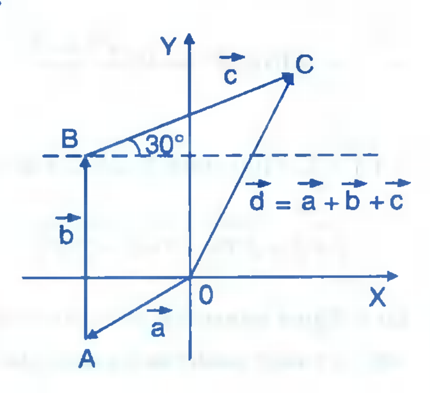
$\therefore \quad \|\vec{c}\| = \sqrt{89 + 40\sqrt{2}}$ *kms.*



37 A qué distancia del punto de partida se encuentra una persona que recorrió 5 m. hacia el sur-oeste, 10 m. hacia el norte y 8 m. hacia el este 30° norte.

Solución

Representaremos por:



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ el desplazamiento de 5 m.

hacia el sur-oeste $\|\vec{a}\| = 5$ *m.*

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ el desplazamiento de 10 m.

hacia el norte $\|\vec{b}\| = 10$ *m.*

$\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ el desplazamiento de 8 mts. hacia el sur-oeste

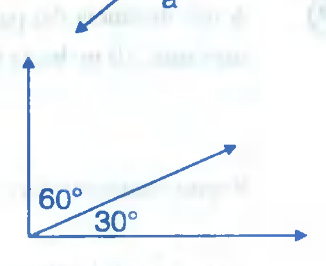
Este 30° norte; $\|\vec{c}\| = 8\ m.$, $\overrightarrow{OC} = \vec{d}$ el desplazamiento resultante, es decir:

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, ahora determinaremos $\|\vec{d}\| = ?$

como $\|\vec{d}\| = \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|$, entonces elevamos al cuadrado

$$\|\vec{d}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c})$$

como $\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$ entonces $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos 135° = -25\sqrt{2}$



también $\alpha = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}) = 60°$ entonces

$$\vec{b}.\vec{c} = \|\vec{b}\|\|\vec{c}\|\cos 60° = 40$$

$\beta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) = 45° + 90° + 30° = 165°$, entonces

$$\vec{a}.\vec{c} = \|\vec{a}\|\|\vec{c}\|\cos 165° = 40(-\cos 15°)$$

$$\vec{a}.\vec{c} = -40\cos 15° = -40\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = -10(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

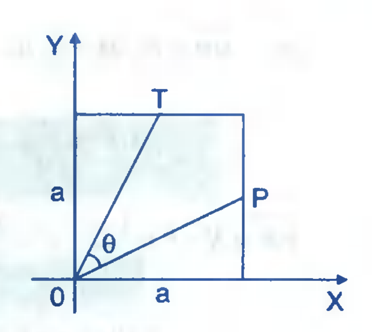
$$\|\vec{d}\|^2 = 25 + 100 + 64 + 2(-25\sqrt{2} + 40 - 10(\sqrt{2}+\sqrt{6})) = 189 - 70\sqrt{2} + 80 - 20\sqrt{6}$$

$$\therefore \quad \|\vec{d}\| = \sqrt{269 - 70\sqrt{2} - 20\sqrt{6}}$$

38 En la figura propuesta, es un cuadrado de lado "a". Hallar el valor del ángulo θ, si P y T son los puntos medio de los lados del cuadrado.

Solución

Sean $\overrightarrow{OT}$ y $\overrightarrow{OP}$ los vectores que forman el ángulo θ, como T, P son puntos medios de la figura entonces: $T(\frac{a}{2},a)$ y $P(a,\frac{a}{2})$ de modo que: $\overrightarrow{OP}=(a,\frac{a}{2})$ y $\overrightarrow{OT}=(\frac{a}{2},a)$, entonces:



$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OT}}{\|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OT}\|} \quad \text{pero} \quad \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OT}=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=a^2$$

además $\|\overrightarrow{OP}\|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$ y $\|\overrightarrow{OT}\|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$, reemplazando en la relación

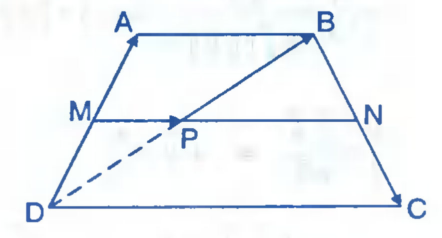
$$\cos\theta=\frac{a^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}a.\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta=\frac{4}{5} \qquad \therefore \quad \theta=\arccos(\frac{4}{5})$$

(39) Demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases, y su longitud es igual a la mitad de la suma de las longitudes de las bases.

Solución

$\overrightarrow{DA}=2\,\overrightarrow{MA} \Rightarrow A-D=2A-2M$

$2M=A+D \Rightarrow M=\frac{A+D}{2}$ ... **(1)**



$2\,\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{DB} \Rightarrow 2B-2P=B-D$

$2P=B+D \Rightarrow P=\frac{1}{2}(B+D)$ ... **(2)**

$\overrightarrow{BC}=2\,\overrightarrow{BN} \Rightarrow C-B=2N-2B \Rightarrow N=\frac{B+C}{2}$ ... **(3)**

pero $\overrightarrow{MP} = P - M = \frac{1}{2}(B+D) - \frac{1}{2}(A+D) = \frac{1}{2}(B-A) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \quad \| \overrightarrow{MP} \| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \|$ ... **(4)**

$\overrightarrow{PN} = N - P = \frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B+D) = \frac{1}{2}(C-D) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\therefore \quad \| \overrightarrow{PN} \| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{DC} \|$ ... **(5)**

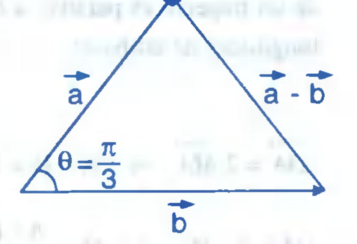
sumando (4) y (5) se tiene: $\| \overrightarrow{MP} \| + \| \overrightarrow{PN} \| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \| + \frac{1}{2} \| \overrightarrow{DC} \|$

$\therefore \quad \| \overrightarrow{MN} \| = \frac{1}{2}(\| \overrightarrow{AB} \| + \| \overrightarrow{DC} \|)$

(40) Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos tales que $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \| = m$ si el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de $\frac{\pi}{3}$ radianes y la norma de su diferencia es 2 – m. Hallar m.

Solución

Como $\frac{\pi}{3} = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ entonces:



$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\| \vec{a} \| \| \vec{b} \|}$ como $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \| = m$

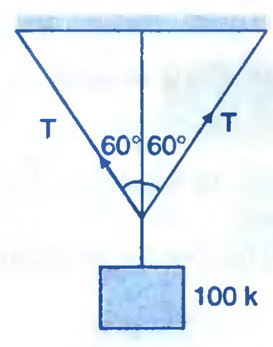
$\frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{m^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{m^2}{2}$ ... **(1)**

además $\| \vec{a} - \vec{b} \| = 2 - m \quad \Rightarrow \quad \| \vec{a} - \vec{b} \|^2 = (2-m)^2$

$\| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - 4m + m^2$, reemplazando $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \| = m$

$m^2 + m^2 - m^2 = 4 - 4m + m^2 \quad \Rightarrow \quad 4 - 4m = 0$ de donde $m = 1$

41 Un sólido de 100 N. de peso depende del centro de una cuerda (como se observa en la figura).



Determinar la tensión T en la cuerda.

Solución

Por hipótesis se tiene: $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \| = T$

así mismo sabemos que: $\| \vec{w} \| = \| -\vec{w} \| = 100\ N.$

además $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{w}$

$$\| \vec{a} + \vec{b} \|^2 = \| -\vec{w} \|^2 = 100^2 \Rightarrow \| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 + 2 \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos 120° = 100^2$$

donde $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$ entonces $T^2 + T^2 + 2T^2(-\frac{1}{2}) = 100^2$

$T^2 = 100^2 \Rightarrow T = 100$ N

42 Dados los vectores unitarios $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ que satisfacen $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, calcular $\vec{a} . \vec{b} + \vec{b} . \vec{c} + \vec{a} . \vec{c}$

Solución

Por hipótesis se tiene: $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \| = \| \vec{c} \| = 1$

Y además $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \| \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \|^2 = 0$, entonces:

$$\underbrace{\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2}+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c})=0$$

$$3+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c})=0 \quad \text{de donde} \quad \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}=-\frac{3}{2}$$

(43) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo $\alpha=\frac{\pi}{6}$, además sabemos que: $\|\vec{a}\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{b}\|=1$, calcular el ángulo θ formado por los vectores $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

Solución

$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\alpha=\frac{\pi}{6}$, y $\measuredangle(\vec{p},\vec{q})=\theta$

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30°=\frac{3}{2}$

de donde $\vec{a}.\vec{b}=\frac{3}{2}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{p}.\vec{q}}{\|\vec{p}\|\|\vec{q}\|}, \text{ donde } \|\vec{p}\|=\|\vec{a}+\vec{b}\| \text{ y } \|\vec{q}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$$

$$\|\vec{p}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}=3+1+2(\frac{3}{2})=4+3=7 \Rightarrow \|\vec{p}\|=\sqrt{7}$$

$$\|\vec{q}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}=3+1-2(\frac{3}{2})=4-3=1 \Rightarrow \|\vec{q}\|=1$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{p}.\vec{q}}{\|\vec{p}\|\|\vec{q}\|}=\frac{(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})}{\|\vec{a}+\vec{b}\|\|\vec{a}-\vec{b}\|}=\frac{\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2}{\|\vec{a}+\vec{b}\|\|\vec{a}-\vec{b}\|}$$

$$=\frac{3-1}{\sqrt{7}\sqrt{1}}=\frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \theta=\arccos(\frac{2}{\sqrt{7}})$$



44 Dado el vector $\vec{a}=(-3,4)$, encontrar otro vector $\vec{b}$, tal que sea perpendicular al vector $\vec{a}$ y que su módulo sea 10.

Solución

Sea $\vec{b}=(x,y) \Rightarrow \|\vec{b}\|=\sqrt{x^2+y^2}=10 \Rightarrow x^2+y^2=100$

Por otro lado se tiene que $\vec{a}\perp\vec{b}$ entonces $\vec{a}.\vec{b}=0$

$(-3,4).(x.y)=0 \Rightarrow -3x+4y=0$

Luego $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ -3x+4y=0 \end{cases}$ resolviendo el sistema se tiene $x=\pm 8,\ y=\pm 6$ entonces $\vec{b}=(\pm 8,\pm 6)$



45 Dados los vectores $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(\frac{1}{2},-\frac{4}{3})$. Hallar a_2-a_1, si $\|\vec{a}\|=\frac{\sqrt{73}}{3}$ y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen direcciones opuestas.

Solución

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen direcciones opuestas entonces $\exists\ \lambda<0$, tal que

$\vec{a}=\lambda\vec{b}$ de donde: $(a_1,a_2)=\lambda(\frac{1}{2},-\frac{4}{3})=(\frac{\lambda}{2},-\frac{4\lambda}{3}) \Rightarrow a_1=\frac{\lambda}{2},\ a_2=-\frac{4\lambda}{3}$

como $\|\vec{a}\|=\frac{\sqrt{73}}{3} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{4}+\frac{16\lambda^2}{9}=\frac{73}{9} \Rightarrow \lambda=\pm 2$

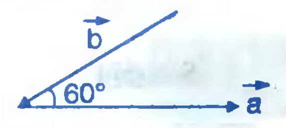
como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen direcciones opuestas $\Rightarrow \lambda=-2$

Luego $\vec{a}=(a_1,a_2)=(-1,\frac{8}{3}) \Rightarrow a_1=-1,\ a_2=\frac{8}{3}$

Por lo tanto $a_2-a_1=\frac{8}{3}-(-1)=\frac{11}{3}$

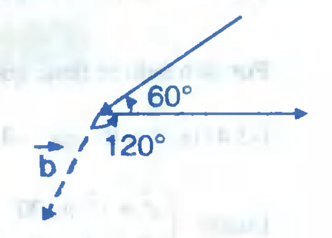


En la figura se tiene $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 8$ **Hallar** $\vec{a}.\vec{b}$



Solución

El ángulo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es



$$120° = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) \Rightarrow \cos 120° = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

de donde: $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos 120° = -\frac{1}{3}(6)(8) = -24$



Determinar el ángulo formado por los vectores: $\vec{a} = (\sqrt{12}, 2)$, $\vec{b} = (-3, \sqrt{3})$.

Solución

Sea $\theta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$, de donde

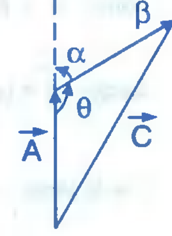
$$\cos\theta = \frac{-3\sqrt{12}+2\sqrt{3}}{\sqrt{12+4}.\sqrt{9+3}} = \frac{-6\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{4\sqrt{12}} = \frac{-4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

como $\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120°$



Si $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = \vec{0}$ y $A = \|\vec{A}\| = 3$, $B = \|\vec{B}\| = 5$, $C = \|\vec{C}\| = 7$. Determine el ángulo que forma $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución



Sea $\alpha = \measuredangle(\vec{A},\vec{B}) = 180° - \theta$, ahora por la ley de los cósenos:

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$$

$49 = 34 - 30\cos\theta$ de donde $\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120°$

Luego $\alpha = 180° - \theta = 180° - 120° = 60°$ $\therefore \quad \alpha = \measuredangle(\vec{A}, \vec{B}) = 60°$

(49) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen igual longitud y forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ si la longitud de $\vec{a} + \vec{b}$ es 4 unidades mayor que la longitud que uno de ellos. Hallar $\|\vec{a}\|$.

Solución

Datos del problema: $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = x$; $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$; $\|\vec{a} + \vec{b}\| = x + 4$

Si $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \vec{a} . \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\frac{\pi}{3} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \vec{a} . \vec{b} = \frac{x^2}{2}$ ... (1)

$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (x+4)^2 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a} . \vec{b} = x^2 + 8x + 16$ ... (2)

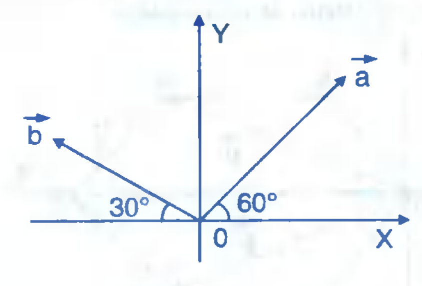
reemplazando (1) en (2) se tiene: $x^2 - 4x - 8 = 0$, d e donde

$x^2 - 4x = 8 \Rightarrow (x-2)^2 = 12 \Rightarrow x - 2 = \pm 2\sqrt{3}$

$x = 2 \pm 2\sqrt{3}$ de donde $x = 2 + 2\sqrt{3}$ por lo tanto $\|\vec{a}\| = 2 + 2\sqrt{3}$



En la figura: $\vec{a} + \vec{b} = (-\sqrt{3}, 3)$, si $\|\vec{a}\| = m$ y $\|\vec{b}\| = n$. Hallar m + n



Solución

El vector $\vec{a}=(a_1,a_2)$ se expresa en la forma:

$$\vec{a}=(\|\vec{a}\|\cos 60°,\ \|\vec{a}\|\operatorname{sen} 60°)=(\frac{m}{2},\frac{\sqrt{3}m}{2})$$

de igual forma para el vector $\vec{b}=(b_1,b_2)$

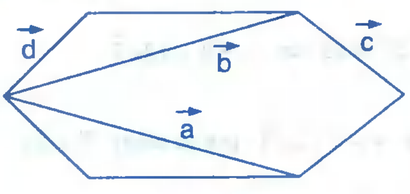
$$\vec{b}=(-\|\vec{b}\|\cos 30°,\ \|\vec{b}\|\operatorname{sen} 30°)=(-\frac{\sqrt{3}n}{2},\frac{n}{2})$$

como $\vec{a}+\vec{b}=(\frac{m}{2},\frac{\sqrt{3}m}{2})+(-\frac{\sqrt{3}}{2}n,\frac{n}{2})=(-\sqrt{3},3)$, de donde

$$\begin{cases}\frac{m}{2}-\frac{\sqrt{3}n}{2}=-\sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{3}m}{2}+\frac{n}{2}=3\end{cases}$$ resolviendo el sistema se tiene: $n=3,\ m=\sqrt{3}$

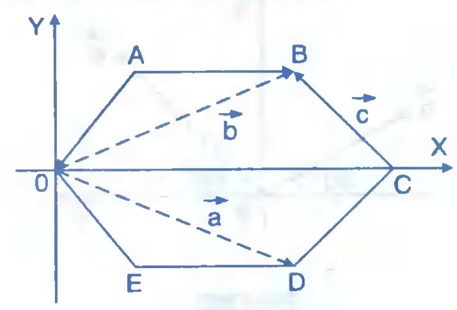
Luego: $m+n=3+\sqrt{3}$

(51) La presente figura es un hexágono regular de lado "a". Si $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$. Calcular $\|\vec{s}\|$.



Solución

Ubiquemos la figura en un sistema de coordenadas.



$$A(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a),\quad B(\frac{3a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a),\quad C(2a,0),\quad D(\frac{3a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a),\quad E(\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a)$$

Calculando los vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ y $\vec{d}$ se tiene:

$$\vec{a}=\overrightarrow{OD}=D-O=(\frac{3a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a)\quad,\quad \vec{b}=\overrightarrow{OB}=B-O=(\frac{3a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a)$$

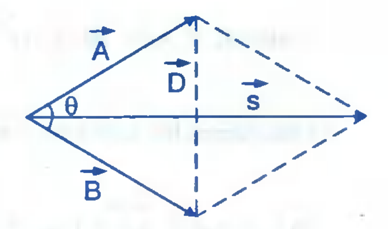
$$\vec{c}=\overrightarrow{CB}=B-C=(-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a)\quad,\quad \vec{d}=\overrightarrow{AO}=O-A=(-\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a)$$

$$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=(2a,0)\quad\Rightarrow\quad \|\vec{s}\|=2a$$

(52) Demostrar que si dos vectores tienen la misma magnitud M y hacen un ángulo θ, su suma tiene una magnitud $s=2M\cos(\frac{\theta}{2})$ y su diferencia $D=2M\,\text{sen}(\frac{\theta}{2})$.

Solución

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores tal que:



$$A=\|\vec{A}\|=\|\vec{B}\|=M \quad y \quad \theta=\measuredangle(\vec{A},\vec{B})$$

$$\vec{S}=\vec{A}+\vec{B}\quad\Rightarrow\quad s=\|\vec{S}\|=\sqrt{\|\vec{A}\|^2+\|\vec{B}\|^2+2\vec{A}.\vec{B}}$$

$$s=\sqrt{\|\vec{A}\|^2+\|\vec{B}\|^2+2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta}=\sqrt{M^2+M^2+2M^2\cos\theta}$$

$$=\sqrt{2}M\sqrt{1+\cos\theta}=\sqrt{2}M.\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}=2M\cos\frac{\theta}{2}\qquad\qquad \therefore\ s=2M\cos\frac{\theta}{2}$$

NOTA.- Como $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\quad\Rightarrow\quad \sqrt{1+\cos\theta}=\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}$

en forma similar para $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$

$$D=\|\vec{D}\|=\sqrt{\|\vec{A}\|^2+\|\vec{B}\|^2-2\vec{A}.\vec{B}}=\sqrt{\|\vec{A}\|^2+\|\vec{B}\|^2-2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta}$$

$$=\sqrt{M^2+M^2-2M^2\cos\theta}=\sqrt{2}.M.\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2}M\sqrt{2}sen\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad D=2M\ \text{sen}(\frac{\theta}{2})$$

NOTA.- $sen^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2} \Rightarrow \sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2}sen\frac{\theta}{2}$

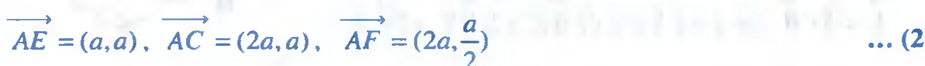
(53) Sea ABCD un rectángulo tal que $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ y sean E y F puntos medios de los lados $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DC}$, respectivamente. Sí $\vec{M}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}$. Hallar el valor de: $comp_{\overrightarrow{AB}}^{\vec{M}}+comp_{\overrightarrow{AD}}^{2\vec{M}}$.

Solución

De los datos del problema el gráfico es:

Como $\vec{M}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}$ **... (1)**

Calculamos los vectores: $\overrightarrow{AE}$. $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AF}$



$\overrightarrow{AE}=(a,a)$, $\overrightarrow{AC}=(2a,a)$, $\overrightarrow{AF}=(2a,\frac{a}{2})$ **... (2)**

Ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$\vec{M}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=(a,a)+(2a,a)+(2a,\frac{a}{2})=(a+2a+2a,a+a+\frac{a}{2})=(5a,\frac{5a}{2})$$

también calculamos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $2\vec{M}$

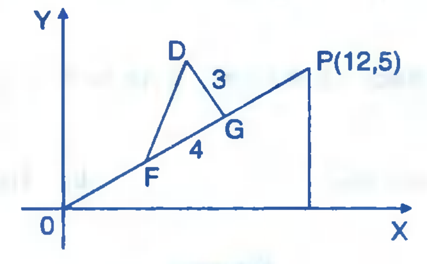
$\overrightarrow{AB}=(0,a)$; $\overrightarrow{AD}=(2a,0)$; $2\vec{M}=(10a,5a)$

$$comp_{\overrightarrow{AB}}^{\vec{M}} = \frac{\vec{M}\,.\,\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{(0,a).(5a,\frac{5a}{2})}{a} = \frac{5a}{2}$$

$$comp_{\overrightarrow{AB}}^{2\vec{M}} = \frac{2\vec{M}\,.\,\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \frac{(2a,0).(10a,5a)}{2a} = 10a$$

$$comp_{\overrightarrow{AB}}^{\vec{M}} + comp_{\overrightarrow{AB}}^{2\vec{M}} = \frac{5a}{2} + 10a = \frac{25}{2}a$$

(54) En la figura, calcular $\overrightarrow{FD}$.



Solución

Del gráfico se tiene $\|\overrightarrow{FG}\| = 4$

$\|\overrightarrow{GD}\| = 3$ además $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD}$ ... **(1)**

calculando $\overrightarrow{FG}$:

como $\overrightarrow{OP} = (12,5)$ de donde $\vec{U}_{\overrightarrow{OP}} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|} = (\frac{12}{13},\frac{5}{13})$

además $\overrightarrow{FG}$ y $\overrightarrow{OP}$ tienen la misma dirección y sentido

$$\vec{U}_{\overrightarrow{OP}} = \vec{U}_{\overrightarrow{FG}} \Rightarrow \vec{U}_{\overrightarrow{FG}} = (\frac{12}{13},\frac{5}{13})$$

Luego $\overrightarrow{FG} = |\overrightarrow{FG}| U_{\overrightarrow{FG}} = 4(\frac{12}{13},\frac{5}{13}) = (\frac{48}{13},\frac{20}{13})$ ... (2)

ahora calculamos $\overrightarrow{GD}$: $\vec{U}_{\overrightarrow{GD}} = \vec{U}'_{\overrightarrow{OP}} = (-\frac{5}{13},\frac{12}{13})$

como $\overrightarrow{GD} = \|\overrightarrow{GD}\| \vec{U}_{\overrightarrow{GD}} = 3(-\frac{5}{13},\frac{12}{13}) = (-\frac{15}{13},\frac{36}{13})$ ... (3)

reemplazando (2), (3) en (1) se tiene:

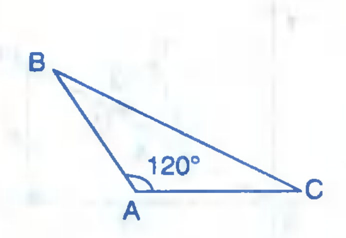
$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD} = (\frac{48}{13},\frac{20}{13}) + (-\frac{15}{13},\frac{36}{13}) = (\frac{33}{13},\frac{56}{13})$ $\therefore$ $\overrightarrow{FD} = (\frac{33}{13},\frac{56}{13})$

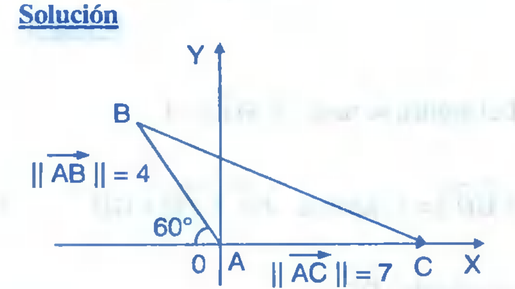
55 Dado el gráfico ABC donde $\measuredangle A = 120°$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$ y $\|\overrightarrow{AC}\| = 7$.

a) Graficar el triángulo ABC.

b) Hallar $comp_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}$ y $comp_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AC}$

Solución





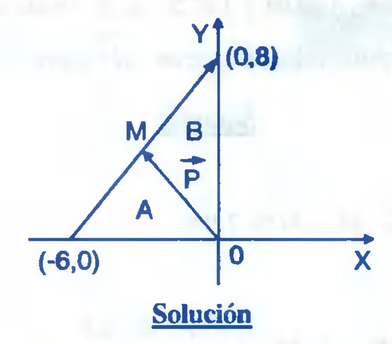
Las coordenadas de $\overrightarrow{AB} = (-\|\overrightarrow{AB}\|\cos 60°, \|\overrightarrow{AB}\| \text{sen}\, 60°) = (-2, 2\sqrt{3})$ y $\overrightarrow{AC} = (7,0)$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (7,0) - (-2,2\sqrt{3}) = (9,-2\sqrt{3}) \Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{81+12} = \sqrt{93}$

$$comp_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(-2,2\sqrt{3}).(9,-2\sqrt{3})}{\sqrt{93}} = \frac{-18-12}{\sqrt{93}} = -\frac{30}{\sqrt{93}} = -\frac{10}{31}\sqrt{93}$$

$$comp_{\overrightarrow{BC}}^{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(7,0).(9,-2\sqrt{3})}{\sqrt{93}} = \frac{63-0}{\sqrt{93}} = \frac{21}{31}\sqrt{93}$$

(56) En la figura M es un punto, tal que el área del triángulo A es 3 veces el área del triángulo B. Hallar $\|\vec{p}\|$.



Solución

Del grafico dado se tiene: $P_1(-6,0)$ y $P_2(0,8)$

Por condición del problema se tiene: área A = 3 área B entonces $\frac{A}{B}=3=r$ siendo r la razón o relación entre las áreas; si M(x,y) es un punto que divide al segmento P_1 a P_2 entonces se tiene:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1+rx_2}{1+r} = \frac{-6+3(0)}{1+3} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{y_1+ry_2}{1+r} = \frac{0+3(8)}{1+3} = \frac{24}{4} = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x=-\frac{3}{2} \\ y=6 \end{matrix}$$

Luego $M(-\frac{3}{2},6) \Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{OM} = (-\frac{3}{2},6) \Rightarrow \|\vec{P}\| = \sqrt{\frac{9}{4}+36} = \frac{\sqrt{153}}{2}$

(57) Hallar la proyección del vector $\vec{a}=(7,12)$ sobre el vector $\vec{b}=(3,-4)$.

Solución

Por definición se tiene $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}$

$$proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}=\frac{(7,12).(3,-4)}{\|(3,-4)\|^2}.(3,-4)=\frac{21-48}{25}(3,-4)=-\frac{27}{25}(3,-4)$$

$$\therefore \quad proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}=-\frac{27}{25}(3,-4)$$

(58) Dados los puntos A(-1,3), B(5,6) y C(7,5); si P divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $\overline{AP}:\overline{PB}=2$, hallar la proyección del vector $\overrightarrow{AP}$ sobre el vector $\overrightarrow{BC}$

Solución

Sea P(x,y), si $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=2 \Rightarrow \overline{AP}=2\,\overline{PB}$

$$(x+1,y-3)=2(5-x,6-y) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=10-2x \\ y-3=12-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Luego P(3,5) $\Rightarrow \overrightarrow{AP}=P-A=(3,5)-(-1,3)=(4,2)$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(7,5)-(5,6)=(2,-1)$$

Entonces $proy_{\overrightarrow{BC}}^{\overrightarrow{AP}}=\frac{\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}.\overrightarrow{BC}=\frac{(4,2).(2,-1)}{(\sqrt{4+1})^2}.(2,-1)=\frac{6}{5}(2,-1)$

$$\therefore \quad proy_{\vec{a}}^{\vec{b}}=\frac{6}{5}(2,-1)$$

(59) Los lados de un triángulo son $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ si $\|\vec{a}\|=6$, $\|\vec{b}\|=2$ y $\|\vec{a}-\vec{b}\|=5$, calcular $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}-comp_{\vec{a}}^{\vec{b}}$

Solución

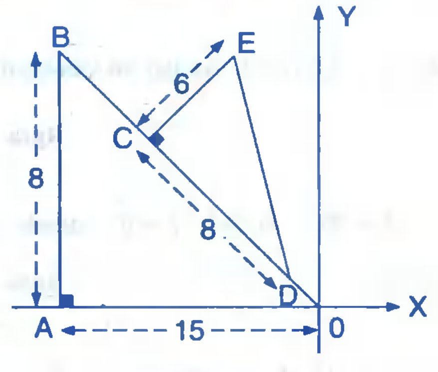
$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=5^2 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}=25$$

$$36+4-2\vec{a}.\vec{b}=25 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}.\vec{b}=\frac{15}{2}$$

$$comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}-comp_{\vec{a}}^{\vec{b}}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}-\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|}=\frac{15}{4}-\frac{15}{12}=\frac{15}{4}-\frac{5}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}-comp_{\vec{a}}^{\vec{b}}=\frac{5}{2}$$

(60) Encontrar el vector $\overrightarrow{DE}$ de la figura adjunta.



Solución

Sea $\vec{u}$ el vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{OB}$ pero del gráfico se tiene B(-15,8) y por ser $\overrightarrow{OB}$ un vector de posición entonces $\overrightarrow{OB}=(-15,8)$, luego el vector unitario.

$$\vec{u}_{\overrightarrow{OB}}=\frac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|}=\frac{(-15,8)}{\sqrt{225+64}}=\frac{(-15,8)}{17}=(-\frac{15}{17},\frac{8}{17})$$

como $\vec{u}_{\overrightarrow{OB}}=(-\frac{15}{17},\frac{8}{17}) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^{\perp}_{\overrightarrow{OB}}=(-\frac{8}{17},-\frac{15}{17})$

por otra parte del triángulo DCE se tendría.

$$\overrightarrow{DE}=8\vec{u}_{\overrightarrow{OB}}+6(-\vec{u}^{\perp}_{\overrightarrow{OB}})=8(-\frac{15}{17},\frac{8}{17})-6(-\frac{8}{17},-\frac{15}{17})$$

$$= (-\frac{120}{17}, \frac{64}{17}) + (\frac{48}{17}, \frac{9}{17}) = (\frac{-120+48}{17}, \frac{64+90}{17}) = (-\frac{72}{17}, \frac{154}{17})$$

$$\therefore \ \overrightarrow{DE} = (-\frac{72}{17}, \frac{154}{17})$$

8.33. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Sea $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (3,-3)$ una flecha que representa al vector $2\vec{a} - 4\vec{b}$ tiene su punto terminal en (5,5). Hallar el punto inicial. **Rpta.** (13,-5)

(2) Sí $\vec{a} = (2x-3y,\ 4x-y)$, $\vec{b} = (2,-3)$. Hallar los valores de x e y para que $\vec{a} = 5\vec{b}$.

Rpta. x = -1, y = -4

(3) Encontrar el valor de M = 5x – 8y sí $\vec{a} = \vec{b}$, donde $\vec{a} = (3x - y + 1,\ -2x + y)$ y $\vec{b} = (x - 3y + 3,\ x + 5y - 1)$ **Rpta.** M = 31

(4) Dados los vectores $\vec{a} = (3x-5,\ x-2y+2)$ y $\vec{b} = (x-y-2,\ 3-2y)$. Hallar x e y de modo que $3\vec{a} = 4\vec{b}$. **Rpta.** x = 5, $y = -\frac{9}{2}$

(5) El vector $\vec{a}$ cuyo origen es el punto A y cuyo extremo es el punto B. Expresar al vector $\vec{a}$ en la forma $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, sabiendo que las coordenadas de A,B se dan a continuación.

i) A(-7,2) , B(3,4) **ii)** $A(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$, $B(-7, 5\sqrt{2})$

iii) A(0,0) , B(3,-7) **iv)** A(0,5) , B(-6,-1)

Rpta. i) $10\vec{i} + 2\vec{j}$ **ii)** $-\frac{15}{2}\vec{i} + 4\sqrt{2}\vec{j}$ **iii)** $3\vec{i} - 7\vec{j}$ **iv)** $-6\vec{i} - 6\vec{j}$

(6) El vector $\vec{c}=(2,-1)$ es expresado como $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, donde los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos a $\vec{x}=(3m,4m)$ e $\vec{y}=(-3n,-n)$ respectivamente, además m ≠ 0, n ≠ 0. Hallar $\vec{a}-\vec{b}$.

Rpta. $\vec{a}-\vec{b}=-\frac{1}{9}(48,31)$

(7) Desde el punto A(0,1) se ha trazado un segmento hasta el punto B(-4,3), hasta que punto es necesario prolongarlo en la misma dirección para que se triplique su longitud.

Rpta. (-12,7)

(8) Hallar el vector $\vec{x}$ en las siguientes ecuaciones:

i) $-3(1,3)+2\vec{x}=5(0,-2)+4\vec{x}$ **Rpta.** $\vec{x}=(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

ii) $(15,-12)+2\vec{x}+2(-6,5)=4(1,-2)+\vec{x}$ **Rpta.** $\vec{x}=(\frac{1}{2},-2)$

iii) $3(0,-2)+2\vec{x}-5(1,3)=(-3,-5)$ **Rpta.** $\vec{x}=(1,-8)$

iv) $3(\vec{x}-(8,-2))=6(7,0)$ **Rpta.** $\vec{x}=(22,2)$

(9) Muestre analíticamente y gráficamente que existen números r y s, que satisfacen $\vec{c}=r\vec{a}+s\vec{b}$, donde:

i) $\vec{a}=(5,1)$; $\vec{b}=(3,5)$; $\vec{c}=(5,4)$ **ii)** $\vec{a}=(2,1)$; $\vec{b}=(3,2)$; $\vec{c}=(5,2)$

(10) Si $\vec{a}=(x,y)$ y $\vec{b}=\frac{1}{3}(2,-4)$ tienen direcciones opuestas y $x^2+y^2=25$. Hallar y – x.

Rpta. $3\sqrt{5}$

(11) Si $\vec{a}=(-2,1)$, $\vec{b}=(3,-2)$ dos vectores no colineales (direcciones diferentes) y $\vec{r}=2\vec{i}-4\vec{j}$ es otro vector. Hallar los escalares k y m de modo que $\vec{r}=k\vec{a}+m\vec{b}$.

Rpta. k = 8, m = 6

(12) Se dan tres vectores $\vec{a}=(3,-1)$, $\vec{b}=(1,-2)$, $\vec{c}=(-1,7)$. Determinar la descomposición del vector $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ en la base $\vec{a}$ y $\vec{b}$. **Rpta.** $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$

(13) Dado tres vectores en el plano $\vec{a}=(3,-2)$, $\vec{b}=(-2,1)$ y $\vec{c}=(7,-4)$. Determinar la descomposición de cada uno de los vectores con relación a los otros dos.

Rpta. $\vec{a}=2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$

(14) Sí $\vec{a}=(4x, x-3)$ y $\vec{b}=(2, x+3)$. Determinar los valores de x tales que $\vec{a}$ sea perpendicular a $\vec{b}$. **Rpta.** x = 1 o x = -9

(15) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no paralelos tales que: $\vec{c}=(m+n-1)\vec{a}+(m+n)\vec{b}$, $\vec{d}=(m-n)\vec{a}+(2m-n+1)\vec{b}$. Hallar m y n tal que $\vec{c}=3\vec{d}$.

Rpta. $m=-\frac{2}{3}$, $n=-\frac{1}{12}$

(16) Sean $\vec{a}=\cos\vec{i}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$ y $\vec{b}=\cos(\theta+\frac{\pi}{2})\vec{i}+\operatorname{sen}(\theta+\frac{\pi}{2})\vec{j}$ dos vectores. Demostrar que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales.

(17) Dados los vértices consecutivos de un paralelogramo A(7,-1), B(-3,1) y C(-5,5). Determinar el cuarto vértice D y la longitud de la diagonal $\overrightarrow{BD}$.

Rpta. D(5,3) , $\|\overrightarrow{BD}\|=2\sqrt{17}$

(18) Dados los puntos A(2,1), B(3,2) y C(-4,-1). Hallar la longitud de $\overrightarrow{BD}$ sabiendo que el punto D está definido por la relación $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. **Rpta.** $\|\overrightarrow{BD}\|=10$

(19) Hallar un vector $\vec{c}$ cuya magnitud es igual a la del vector $\vec{a}=(4,-3)$ y cuya dirección es la misma que la del vector $\vec{b}=(1,\sqrt{3})$. **Rpta.** $\vec{c}=(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$

(20) Dados los vectores $\vec{a} = (-5,2)$ y $\vec{b} = (3,-4)$. Hallar un vector unitario de sentido opuesto al vector $\vec{a} - \vec{b}$. **Rpta.** $\vec{u}_{\vec{a}-\vec{b}} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

(21) Los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ de V_2 cumplen que: $2\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{c}$ y $3\vec{a} - 2\vec{b} = 5\vec{c}$ siendo $\vec{a}$ un vector unitario, calcular la norma de $\vec{b} - \vec{c}$. **Rpta.** $\| \vec{b} - \vec{c} \| = \frac{2}{13}$

(22) Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores de V_2 tales que $\vec{b}$ es el opuesto de $\vec{a}$. Si $\vec{b}$ tiene el mimo sentido que el vector $\vec{c} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ y la norma de $\vec{a}$ es 5. Hallar el vector $\vec{x} = 2\vec{b} + \vec{a}$

Rpta. $\vec{x} = (4,-3)$

(23) Sean $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores diferentes, mostrar con un ejemplo que si se cumple $\vec{a} . \vec{b} = \vec{a} . \vec{c}$, no se puede afirmar que $\vec{b} = \vec{c}$.

(24) Hallar un vector que tenga la misma magnitud del vector que va de A(-2,3) a B(-5,4) y que tenga el sentido opuesto al vector que va de S(9,-1) a T(12,-7). **Rpta.** $\vec{a} = \sqrt{2}(-1,2)$

(25) Sean $\vec{a} = (2,-3)$, $\vec{b} = (-2,1)$ y $\vec{c} = (3,2)$. Hallar un vector unitario ortogonal al vector $\vec{v} = 5\vec{a} - 3(\vec{b} + \vec{c})$. **Rpta.** $\vec{u} = (\frac{24}{25}, \frac{7}{25})$

(26) Pruébese que: si $\vec{c} \neq 0$ y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos al vector $\vec{c}$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

(27) Demostrar que si $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales sí y sólo sí $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \|$

(28) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no nulos ni paralelos. Demostrar que $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$ implica que $\alpha = \beta = 0$.

(29) Pruébese que sí: $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ y si $\vec{b}$ es paralelos a $\vec{a}$ entonces $\vec{d}$ es paralelo a $\vec{a}$ sí y sólo si $\vec{c}$ es paralelo a $\vec{a}$.

(30) Hallar la longitud de la suma de los vectores unitarios $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si $\vec{u}$ tiene la misma dirección que $\vec{a}=(4,-3)$ y $\vec{v}$ tiene la dirección opuesta de $\vec{b}=(-5,0)$. **Rpta.** $\frac{3}{5}\sqrt{10}$

(31) Sí $\vec{a}=(-3,5)$, $\vec{b}=(2,-3)$. Hallar **la longitud del vector** $\vec{c}$ sí:

i) $\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-2\vec{b})\vec{b}^{\perp}$ **ii)** $\vec{c}=(\vec{a}.\vec{b}).\vec{b}^{\perp}-(\vec{a}^{\perp}.\vec{b})\vec{a}$

Rpta. i) $29\sqrt{13}$ **ii)** $5\sqrt{259}$

(32) Hallar un vector $\vec{v}$ de longitud $6\sqrt{3}$ y que tiene la misma dirección de un vector que forma un ángulo de 30° con el sentido positivo del eje X. **Rpta.** $\vec{v}=(9,\pm 3\sqrt{3})$

(33) Demostrar que el vector $\vec{b}.(\vec{a}.\vec{c})-\vec{c}.(\vec{a}.\vec{b})$ es perpendicular al vector $\vec{a}$.

(34) Demostrar que el vector $\vec{b}-\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}.\vec{a}$ es perpendicular al vector $\vec{a}$.

(35) Demostrar que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores paralelos en R^2 entonces $|\vec{a}.\vec{b}|=\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|$.

(36) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores tal que $\vec{a}^{\perp}+\vec{b}^{\perp}=\vec{a}+\vec{b}$. Demuestre que $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$.

(37) Pruebe que $\vec{c}$ es paralelo al vector $(\vec{b}^{\perp}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}^{\perp}.\vec{c})\vec{b}$

(38) Sea $\vec{c}=t\vec{a}+s\vec{b}$, hallar el valor de $\frac{t}{s}$ sí $\vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b})$ donde $\vec{a}=(3,5)$ y $\vec{b}=(2,2)$.

Rpta. $\frac{t}{s}=-\frac{12}{25}$

(39) Dado el vector $\vec{a}=(3,-4)$, encontrar otro vector $\vec{b}$, tal que sea perpendicular al vector $\vec{a}$ y que su módulo sea 10. **Rpta.** $\vec{b}=(\pm 8,\pm 6)$

40 Halle $\|\vec{u}\|$, $\|2\vec{u}+3\vec{v}\|$; si $\|\vec{v}\|=6$ y $\vec{u}\perp\vec{v}$ y los vectores $(\vec{u}+\vec{v})$ y $(4\vec{u}-9\vec{v})$ son ortogonales. **Rpta.** $18\sqrt{2}, 9$

41 Si el vector $\vec{x}=(1,18)$ es expresado como $\vec{a}=\vec{x}+\vec{y}$, donde $\vec{x}//\vec{b}$, $\vec{y}//\vec{c}$ y sí $\vec{b}=(-1,4)$, $\vec{c}=(2m,3m)$. Hallar el vector $\vec{x}$. **Rpta.** $\vec{x}=(-3,12)$

42 Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de V_2, cumplen que $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{c}$ y $\vec{a}-3\vec{b}=2\vec{c}$. Siendo $\vec{a}$ un vector unitario. Hallar la norma de $\vec{b}+\vec{c}$. **Rpta.** $\|\vec{b}+\vec{c}\|=\frac{4}{7}$

43 Sí $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\|\vec{a}\|=2$, $\frac{a_1}{a_2}=4$. Hallar $\vec{a}$ **Rpta.** $\vec{a}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(8,2)$

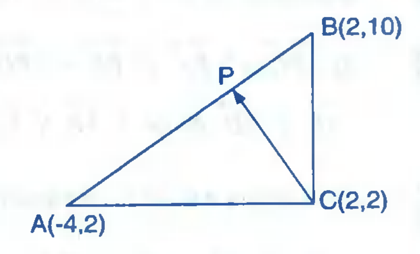
44 El vector $\vec{a}$ tiene longitud 5 y el punto de apoyo en (1,-1) encontrar el vector $\vec{a}$ si la abscisa del punto terminal es 4. **Rpta.** $\vec{a}=(3,\pm 4)$

45 Dados los vectores $\vec{u}=(a,-b)$, $\vec{v}=(2b,c)$, $\vec{u}+\vec{v}=(1,1)$; si $\vec{u}//\vec{v}$, calcular $\frac{ab}{c}$

Rpta. $-\frac{1}{2}$

46 En la figura adjunto, Si P es tal que el área del triángulo APC es el doble del área del triángulo CPB. Hallar $\|\overrightarrow{CP}\|$.

Rpta. $\frac{2}{3}\sqrt{73}$



47 Si $\vec{a}=(m,2m)$, $\vec{b}\,||\,\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}=(2m,p)$ y $\|\vec{a}-\vec{b}\|=20$ calcular $\|\vec{b}\|$ donde $m\neq 0$

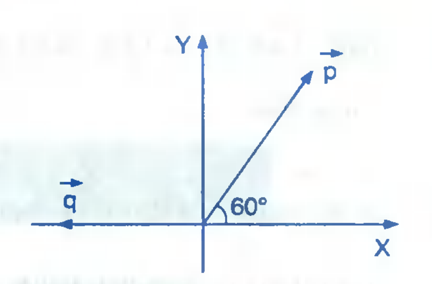
Rpta. $\|\vec{b}\|=10$

(48) Se tiene los vectores $\vec{a} = r\vec{p}$, $\vec{b} = t\vec{q}$,

$\vec{c} = (-3, 2\sqrt{3})$ calcular $\|\vec{b}\|$ sí

$\vec{c} = r\vec{p} + t\vec{q}$

Rpta. $\|\vec{b}\| = 5$



(49) Encontrar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $\vec{a} + \vec{b}^{\perp} = (-1,5)$, $\vec{a}^{\perp} + \vec{b}$ es ortogonal a (-5,3), $\vec{a} + \vec{b}$ es paralelo a (1,-1) y $\vec{a}.\vec{b} + 11 = 0$. **Rpta.** $\vec{a} = (-3,4)$, $\vec{b} = (1,-2)$

(50) Si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$, calcular $2\vec{c}.\vec{d}$, sabiendo que $\|\vec{a} + \vec{b}\| = 6$, $\|\vec{c}\| = 3$, $\|\vec{d}\| = 4$

Rpta. $\frac{11}{2}$

(51) Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{p}$ de V_2, determinar los números r y s en términos de sus productos escalares de manera tal que el vector $\vec{p} - r\vec{a} - s\vec{b}$ sea perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ simultáneamente.

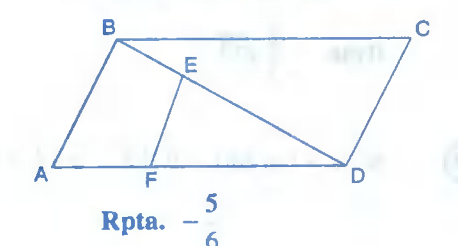
(52) Pruebe que en cualquier paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de dos lados adyacentes.

(53) Deducir la ley de los cosenos en un triángulo empleando el producto escalar.

(54) Sí $\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PD}$. En que razón el punto O de intersección de las rectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ divide a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$? **Rpta.** -2 y $-\frac{4}{3}$

(55) En la figura ABCD es un paralelogramo:

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{ED} = 5\overrightarrow{BE}$

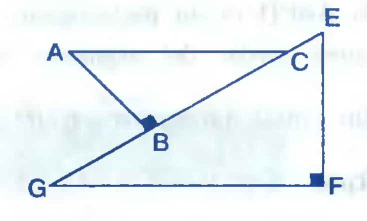


Sí $\overrightarrow{EF} = m\overrightarrow{AD} + n\overrightarrow{AB}$. Hallar m + n **Rpta.** $-\frac{5}{6}$

(56) Hallar las coordenadas del vector $\overrightarrow{AC}$ de V_2 del gráfico

Sí $\|\overrightarrow{AC}\|=10$, $\|\overrightarrow{AB}\|=6$,

$\|\overrightarrow{EF}\|=15$ y $\|\overrightarrow{FB}\|=8$

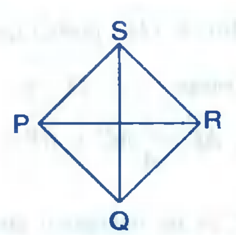


Rpta. $\overrightarrow{AC}=(-\frac{26}{17},\frac{168}{17})$

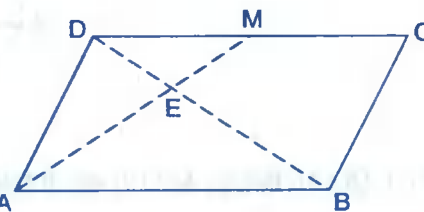
(57) La figura PQRS es un rombo

tal que $\|\overrightarrow{PQ}\|=a$

Demostrar que: $\overrightarrow{PR}\,.\,\overrightarrow{SQ}=0$



(58) Si ABCD es un cuadrilátero y M un punto medio de $\overrightarrow{DC}$ probar que $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

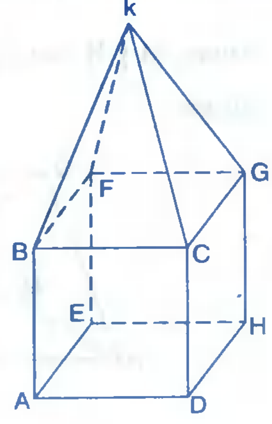


(59) En la figura adjunta tenemos un cubo y "techo" una pirámide regular, todas de arista x, sí:

$\vec{s}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{FG}$.

Hallar la norma de $\vec{s}$.

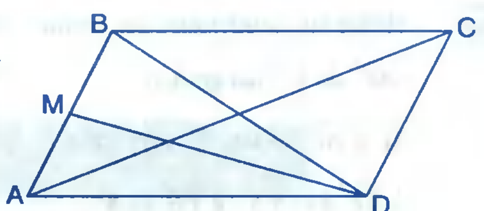
Rpta. $\|\vec{s}\|=x$





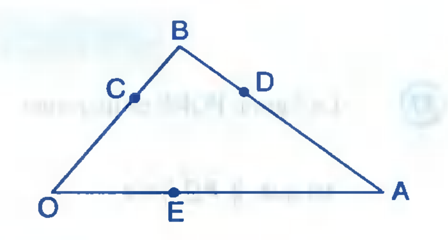
Si ABCD es un paralelogramo y M es punto medio del segmento AB, hallar $6m-9n$ si $\overrightarrow{AM}=m\,\overrightarrow{AC}+n\,\overrightarrow{MD}$

Rpta. $6m-9n=5$





En la figura: $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, E es punto medio de $\overrightarrow{OA}$, probar que: $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{BE}$ se cortan en O y también: $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PE}$

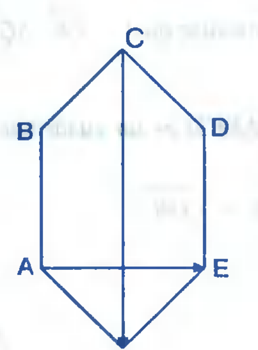




Si ABCDEF, es un hexágono que se muestra en la figura cuyo lado mide "x" unidades, determinar:

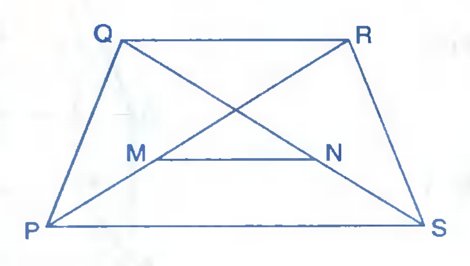
$$\left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}\right\|$$

Rpta. $\frac{x}{3}\sqrt{19}$





Dados los puntos P(1,2), Q(2,5), R(5,8), S(9,10) que forman un trapecio, encontrar dos puntos M y N sobre las diagonales, si se sabe que: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{\overrightarrow{PS}-\overrightarrow{QR}}{3}$, tal como en la figura.

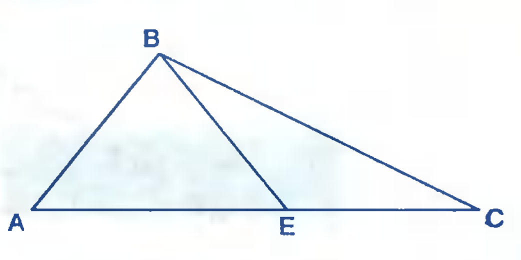


Rpta. $M(\frac{109}{33},\frac{180}{33})$, $N(\frac{164}{33},\frac{235}{33})$



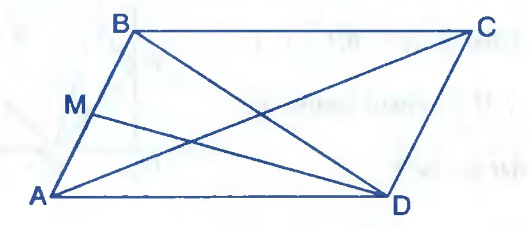
En el triángulo ABC, se tiene $3\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$, hallar s y t sí $\overrightarrow{EB} = s\,\overrightarrow{BA} + r\,\overrightarrow{BC}$.

Rpta. $s = \frac{2}{5}$, $t = -\frac{4}{5}$





En el paralelogramo ABCD, M es punto medio de $\overline{AB}$. Hallar s y t sí $\overrightarrow{AM} = s\,\overrightarrow{AC} + t\,\overrightarrow{DM}$



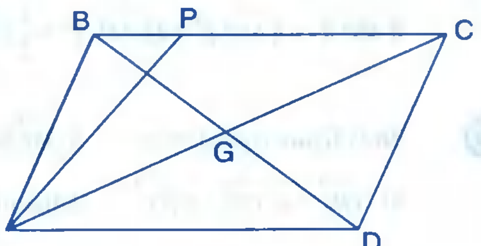
Rpta. $s = t = \frac{1}{3}$



En la figura ABCD es un paralelogramo sí $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$ y sí $\overrightarrow{BE} = m\,\overrightarrow{BC} + n\,\overrightarrow{AP}$.

Calcular mn

Rpta. $mn = -\frac{5}{16}$

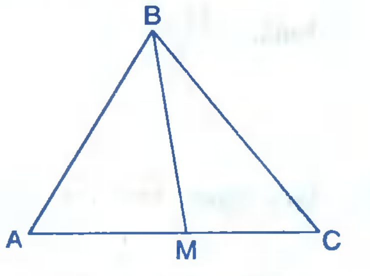




En el triángulo ABC se tiene $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$.

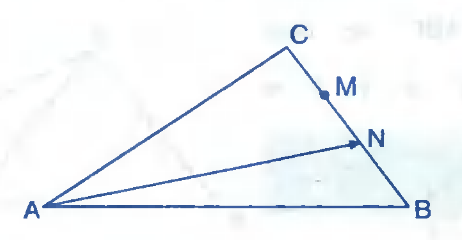
Sí $\overrightarrow{BM} = r\,\overrightarrow{BA} + t\,\overrightarrow{BC}$. Hallar r – t

Rpta. $r = \frac{4}{7}$, $t = \frac{3}{7}$



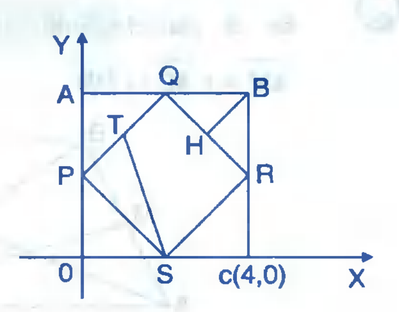


Si M y N son puntos de trisección del lado BC del triángulo ABC y $\overrightarrow{AN} = m\,\overrightarrow{AC} + n\,\overrightarrow{AB}$. Calcular $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$



Rpta. $\frac{3}{2}$

(69) En la figura adjunta OABC es cuadrado, P,Q,R y S son puntos medios de los lados $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ respectivamente. Hallar $\|\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{BH}\|$ si T es punto medio de $\overrightarrow{PQ}$ y H es punto medio de $\overrightarrow{QR}$. **Rpta.** $\|\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{BH}\|=2\sqrt{2}$

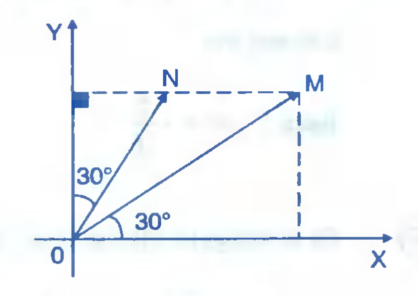


(70) En el triángulo MPQ, ME es la mediana del lado PQ, demostrar que: $\|\overrightarrow{MP}\|^2+\|\overrightarrow{MQ}\|^2=2\|\overrightarrow{ME}\|^2+\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\|^2$

(71) En la figura consideremos: $\|\overrightarrow{OM}\|=12$.

Sí $\overrightarrow{ON}=m.\overrightarrow{OM}+n\overrightarrow{OM}^{\perp}$. Hallar m + n

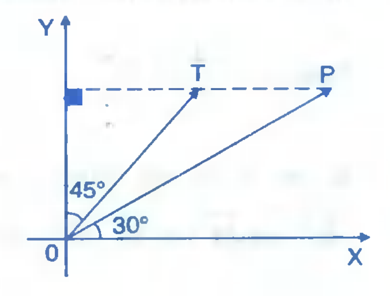
Rpta. $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$



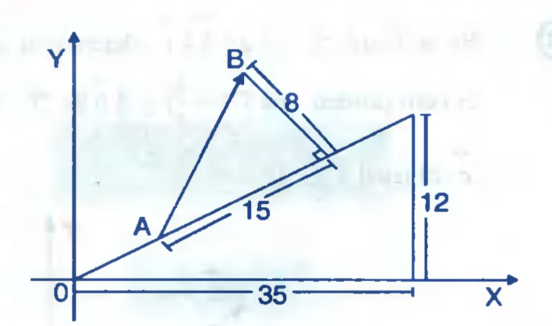
(72) En la figura $\overrightarrow{TP} \parallel \overrightarrow{OX}$, $\|\overrightarrow{OP}\|=8$

Si $\overrightarrow{OT}=m\,\overrightarrow{OP}+n\,\overrightarrow{OP}^{\perp}$, calcular m y n

Rpta. $m=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$, $n=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

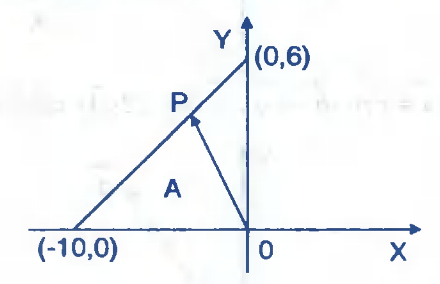


73 Encontrar el vector $\overrightarrow{AB}$ de la figura.



Rpta. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{37}(429, 460)$

74 En la figura, si P es un punto tal que el área del triángulo A es cinco veces el área del triángulo B. Calcular $\|\overrightarrow{OP}\|$



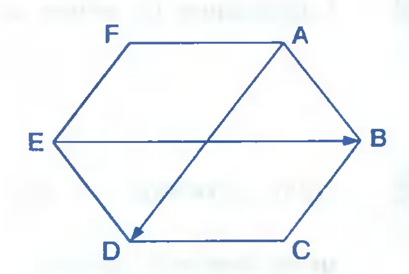
75 Dados los vectores $\vec{a} = (x, -3y)$, $\vec{b} = (2y, -z)$. Hallar x + y + z para que $\vec{a} + \vec{b} = (8, -4)$ y $\vec{a} \,//\, \vec{b}$.

Rpta. $x + y + z = 8$

76 Dados los vectores $\vec{a} = (x, 3y)$ y $\vec{b} = (-2y, z)$. Hallar x + z, de modo que $\vec{a} + \vec{b} = (8, 4)$ y sea $\vec{a} \,//\, \vec{b}$.

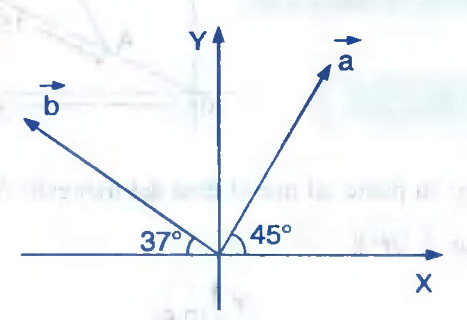
Rpta. $x + z = 5$

77 En el hexágono regular ABCDEF, de lado "a", hallar la norma de $\vec{s}$, sabiendo que: $\vec{s} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$.

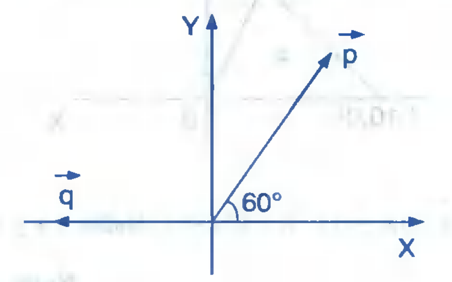


Rpta. $\frac{7}{3}a$

(78) En la figura, si $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, determinar $\vec{q}$ sabiendo que la segunda componente de $\vec{q}$ es cero (asumir $\text{sen}\,37° = \frac{3}{5}$) y $\|\vec{b}\| = 20$, $\|\vec{a}\| = 10\sqrt{2}$ y que la primera componente de $\vec{c}$ es igual a 20.



(79) Se tiene los vectores $\vec{a} = r\vec{p}$, $\vec{b} = t\vec{q}$, $\vec{c} = (-3, 2\sqrt{3})$ calcular $\|\vec{b}\|$ si $\vec{c} = r\vec{p} + t\vec{q}$



(80) Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tal que $\vec{a} = (x, 2x)$, $\vec{a} - \vec{b} = (2x, y)$, $\vec{b} \,//\, \vec{a}$ y el módulo de $\vec{a} - \vec{b}$ es $\sqrt{112}$. Hallar $\|\vec{b}\|$. **Rpta.** $\|\vec{b}\| = 2\sqrt{7}$

(81) Consideremos los vectores $\vec{a} = (x, -y)$, $\vec{b} = (2y, z)$, $\vec{a} + \vec{b} = (1,1)$ y $\vec{a} \,//\, \vec{b}$. Hallar $\frac{x.y}{z}$.

Rpta. $\frac{x.y}{z} = -\frac{1}{2}$

(82) Dados los vectores $\vec{a} = (x, y)$ y $\vec{b} = (\frac{1}{2}, -\frac{4}{3})$. Hallar y + x si $\|\vec{a}\| = \frac{\sqrt{73}}{3}$ y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen direcciones opuestas. **Rpta.** $y + x = \frac{5}{3}$

(83) Dados $\|\vec{a}\|=1$, $\|\vec{b}\|=23$, $\|\vec{a}-\vec{b}\|=30$. Calcular $\|\vec{a}+\vec{b}\|$. **Rpta.** $\|\vec{a}+\vec{b}\|=20$

(84) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares entre sí y $\|\vec{a}\|=5$, $\|\vec{b}\|=12$, calcular $\|\vec{a}+\vec{b}\|$, $\|\vec{a}-\vec{b}\|$. **Rpta.** $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|=13$

(85) Si $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, Hallar $\|\vec{c}\|$, sí $\|\vec{a}\|=4$, $\|\vec{b}\|=5$ y $\vec{a}.\vec{b}=11.5$ **Rpta.** $\|\vec{c}\|=8$

(86) Los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ sí $\|\vec{a}\|=2$, $\|\vec{b}\|=3$ y $\vec{a}.\vec{b}=-\frac{3}{2}$. Hallar $\|\vec{a}-\vec{b}\|$ **Rpta.** $\|\vec{a}-\vec{b}\|=4$

(87) Si $\vec{a}=(m,2m)$, $\vec{b}\,//\,\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}=(2m,p)$ y $\|\vec{a}-\vec{b}\|=20$ calcular el módulo de $\vec{b}$.

Rpta. $\|\vec{b}\|=10$

(88) Sí $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $\|\vec{a}\|=3$, $\|\vec{b}\|=4$ y $\|\vec{c}\|=6$. Hallar el valor de $\vec{a}.(2\vec{b}-\vec{a})$

Rpta. 2

(89) Sean los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $\|\vec{a}\|=\sqrt{26}$, $\|\vec{b}\|=3\sqrt{2}$ y $\vec{b}.\vec{c}=12$ sí $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$. Hallar $\|\vec{c}\|$ **Rpta.** $\|\vec{c}\|=4\sqrt{2}$

(90) Sean los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, $\|\vec{a}\|=5$, $\|\vec{b}\|=2\sqrt{5}$ y $\vec{b}.\vec{c}=10$. Hallar $\|\vec{c}\|$. **Rpta.** $\|\vec{c}\|=5$

(91) Sí $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$ y $\|\vec{a}\|=2$, $\|\vec{b}\|=4\sqrt{3}$, $\|\vec{c}\|=8$. Calcular $\vec{a}.\vec{c}$.

Rpta. $\vec{a}.\vec{c}=10$

(92) Sabiendo que $\|\vec{a}\|=3$, $\|\vec{b}\|=1$, $\|\vec{c}\|=4$ y $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Calcular la suma $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}$. **Rpta.** -13

(93) Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$, calcular $2\vec{c}.\vec{d}$, sabiendo que $\|\vec{a}+\vec{b}\|=6$, $\|\vec{c}\|=3$, $\|\vec{d}\|=4$

Rpta. $\frac{11}{2}$

(94) Sí $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ y $\|\vec{a}\|=2$, $\|\vec{b}\|=5$, $\|\vec{c}\|=6$. Calcular $\vec{a}.\vec{b}$. **Rpta.** $\frac{7}{2}$

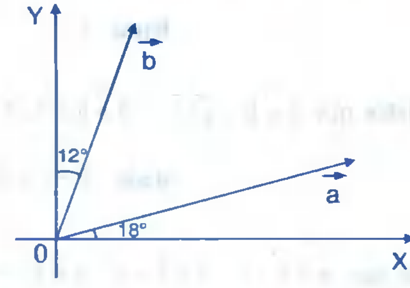
(95) Dados los vectores $\vec{a}=(8,6)$ y $\vec{b}=(-2,6)$. Hallar los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ tales que $\vec{p}\perp\vec{q}$, $\vec{q}\,//\,\vec{b}$ y $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$. **Rpta.** $\vec{p}=(1,-3)$, $\vec{q}=(9,3)$

(96) En la figura se tiene: $\|\vec{a}\|=4$, $\|\vec{b}\|=6$. Hallar $\vec{a}.\vec{b}$.



Rpta. $\vec{a}.\vec{b}=12$

(97) Calcular $\vec{a}.\vec{b}$, siendo $\|\vec{a}\|=4$, $\|\vec{b}\|=2\sqrt{3}$, donde en la figura aparece los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Rpta. $\vec{a}.\vec{b}=4\sqrt{3}$

(98) Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo agudo cuyo sen $\theta=0.75$, averiguar el módulo del vector $\vec{b}$, sabiendo que $\vec{a}-\vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ y que el módulo de $\vec{a}$ es 27.

Rpta. $\|\vec{b}\|=\frac{108}{7}\sqrt{7}$

(99) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de $\theta=120°$, sabiendo que $\|\vec{a}\|=3$ y $\|\vec{b}\|=5$. Determinar $\|\vec{a}+\vec{b}\|$, $\|\vec{a}-\vec{b}\|$. **Rpta.** $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{19}$; $\|\vec{a}-\vec{b}\|=7$

(100) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 45° y el módulo de $\vec{a}$ es 3. Determinar el módulo de $\vec{b}$ de modo que $\vec{a}-\vec{b}$ sea perpendicular a $\vec{a}$. **Rpta.** $\|\vec{b}\| = 3\sqrt{2}$

(101) Calcular $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ sabiendo que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 150° y que $\|\vec{a}\| = \sqrt{48}$ y $\|\vec{b}\| = 6$. **Rpta.** $\|\vec{a}+\vec{b}\| = 2\sqrt{3}$

(102) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 60°, sabiendo que $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$, determinar $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ y $\|\vec{a}-\vec{b}\|$. **Rpta.** $\sqrt{129}$ y 7

(103) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores diferente de cero, y suponiendo que el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es igual al ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{c}$; para qué valor de t es el vector $\vec{c}$ perpendicular al vector $\vec{d} = \|\vec{b}\|\vec{a} + t\vec{b}$ **Rpta.** $t = -\|\vec{a}\|$

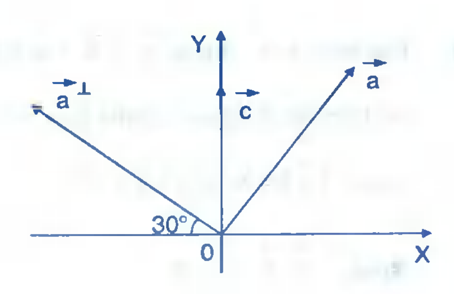
(104) Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre sí un ángulo de 60° y el módulo $\|\vec{a}\| = 6$. Hallar el módulo de $\vec{b}$ para que $\vec{a}-\vec{b}$ forman con $\vec{a}$ un ángulo de 30°. **Rpta.** $\|\vec{b}\| = 3$

(105) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ son vectores unitarios y θ es el ángulo entre ellos. Demostrar que: $\frac{1}{2}\|\vec{a}-\vec{b}\| = |\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|$

(106) Consideremos los vectores de la figura:

Sí $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{a}^{\perp}$, donde:

$\|\vec{c}\| = 8$, $\|\vec{a}\| = 2$. Hallar $m - \sqrt{3}n$



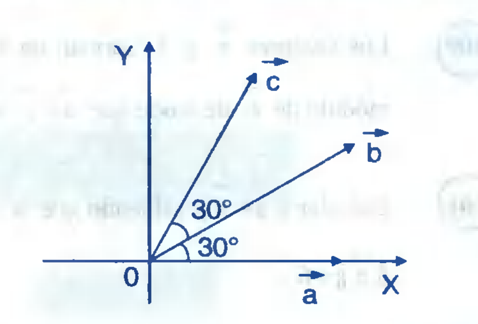
Rpta. $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

(107) En la figura adjunta se dan los vectores.

Si $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, siendo:

$\|\vec{a}\|=3$, $\|\vec{b}\|=2$, $\|\vec{c}\|=6$

Hallar m + n **Rpta.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

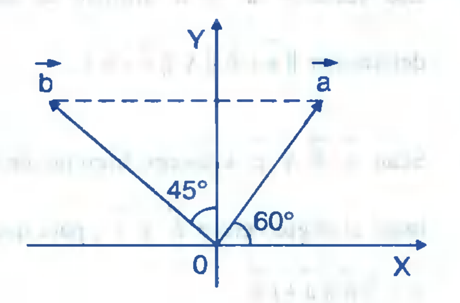


(108) Se tiene los vectores de la figura:

Sí $\|\vec{a}\|=2\sqrt{3}$. Hallar: m + n

donde $\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

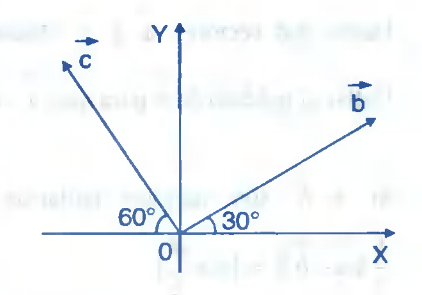
Rpta. $m+n=\frac{3}{2}$



(109) En la figura: $\|\vec{b}\|=10$, $\|\vec{c}\|=20$,

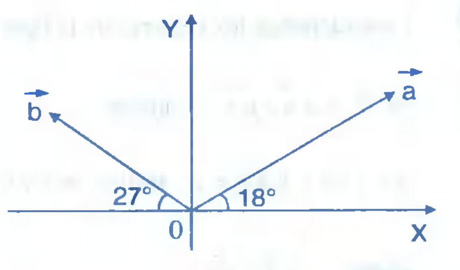
además $\vec{a}=(20,-3)$. Hallar $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$

Rpta. $(\frac{5\sqrt{3}}{6},2+20\sqrt{3})$

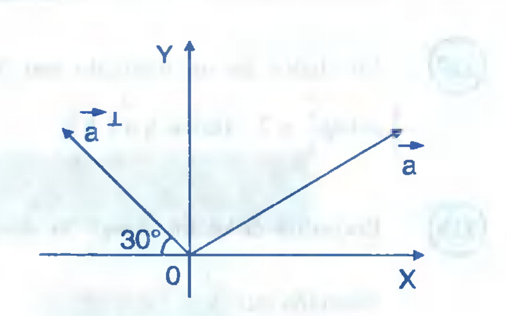


(110) Calcular $\vec{a}.\vec{b}$, donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores de la figura adjunta para los cuales $\|\vec{a}\|=8$ y $\|\vec{b}\|=\sqrt{72}$.

Rpta. $\vec{a}.\vec{b}=-\ 48$



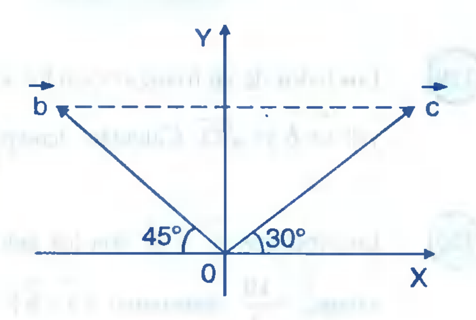
111 Dados los vectores que se muestran en la figura. Hallar $m+\sqrt{3}n$, sabiendo que $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{a}^{\perp}$, siendo $\vec{a}$ un vector unitario y $\|\vec{c}\| = 8$.



Rpta. $8\sqrt{3}$

112 En la figura se tiene los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ donde $\|\vec{a}\| = 2\sqrt{3}$ sí $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

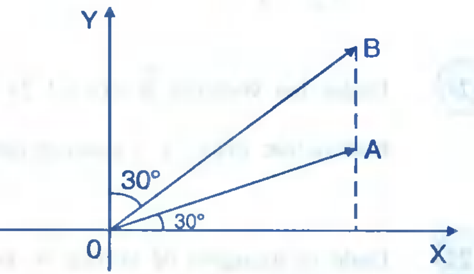
Hallar m – n.



Rpta. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

113 En la figura: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{OY}$ y $\|\overrightarrow{OA}\| = 4$.

Si $\overrightarrow{OB} = m\,\overrightarrow{OA} + n\,\overrightarrow{OA}^{\perp}$, Hallar el valor de m – n.



Rpta. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$

114 Los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, sí $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 3$, además $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = -\frac{5}{2}$. Hallar $\|\vec{a}-\vec{b}\|$. **Rpta.** $\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{19}$

115 Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que $\vec{a} = (5,-2)$, $comp_{\vec{a}}^{\vec{b}} = -58$ y $\|\vec{b}\| = 29$. Hallar $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}$. **Rpta.** $-2\sqrt{29}$

116 Si $\vec{a}$ es un vector del mismo sentido que $\vec{v} = (1,2)$ tal que $\|\vec{a}\| = 50$ y $\|\vec{b}\| = 29$. Hallar $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}$. **Rpta.** -40

117 Los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ sí $\|\vec{a}\|=4$, $\|\vec{b}\|=6$ y $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}=2$. Hallar $\|\vec{a}+\vec{b}\|$. **Rpta.** $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{76}$

118 Encontrar el vector $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ si $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}=-3$ y si (1,-1) es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{b}$. **Rpta.** $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-3,3)$

119 Los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$, tales que $\|\vec{a}\|=3$, $\|\vec{b}\|=2\sqrt{2}$ y $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{53}$. Calcular $2comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}-comp_{\vec{a}}^{(\vec{a}+\vec{b})}$.

120 Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los lados de un paralelogramos si $\|\vec{a}\|=6$, $\|\vec{a}\|=2\|\vec{b}\|$ y $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}=\frac{10}{3}$, determinar $\|\vec{a}-\vec{b}\|$. **Rpta.** $\|\vec{a}-\vec{b}\|=5$

121 Dados los vectores $\vec{a}=(k+2,\ 2k)$ y $\vec{b}=(-3,\ k+1)$, determinar los valores de k de manera que $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ y $\vec{b}$ están en direcciones opuestas. **Rpta.** $k\in<-\frac{3}{2},2>$

122 Dado el triángulo de vértice A, B y C con ángulo en A igual a 45°; $\|\overrightarrow{AB}\|=6\sqrt{2}$, graficar y hallar $\|\overrightarrow{BC}\|$, $comp_{\overrightarrow{BC}}^{\overrightarrow{AB}}-comp_{\overrightarrow{BC}}^{\overrightarrow{AC}}$

123 Los lados de un triángulo son $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ tales que $\|\vec{a}\|=10$, $\|\vec{b}\|=6$ y $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}=-5$. Hallar la longitud de $\vec{a}-\vec{b}$ **Rpta.** $\|\vec{a}-\vec{b}\|=14$

124 Los lados de un triángulo son $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ tales que $\|\vec{a}\|=8$, $\|\vec{b}\|=6$ y $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{68}$. Hallar $comp_{\vec{a}}^{(\vec{a}+\vec{b})}-3comp_{\vec{b}}^{(\vec{a}-\vec{b})}$ **Rpta.** 32

125 Sí $\|\vec{a}-\vec{b}\|=4$, $\|\vec{b}\|=3$ y $comp_{\vec{b}}^{\vec{a}-\vec{b}}=\frac{22}{3}$. Hallar la norma de $\vec{a}$. **Rpta.** $\|\vec{a}\|=\sqrt{69}$

126 Sea $\|\vec{a}\|=\sqrt{65}$, $\|\vec{a}+\vec{b}\|=164$ y $comp_{\vec{a}}^{(\vec{a}+\vec{b})}=\frac{102}{\|\vec{a}\|}$. Hallar $comp_{\vec{b}}^{(\vec{a}-\vec{b})}$.

Rpta. $comp_{\vec{b}}^{(\vec{a}-\vec{b})}=\frac{12}{5}$

127 Sabiendo que $proy_{\vec{a}}^{(a,b)}=(1,2)$ y $proy_{\vec{a}}^{(x,y)}=(-4,-8)$. Hallar $proy_{\vec{a}}^{(4\vec{a}-x,\ 4\vec{b}-y)}$

128 Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos tales que el módulo de $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=k$ y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\frac{\pi}{3}$ y la norma de su diferencia es 2 – k. Hallar k **Rpta.** k = 1

129 Sí $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}=(2,-5)$, $proy_{\vec{b}^{\perp}}^{\vec{a}}=(-3,2)$ y $\vec{b}=2\vec{a}+\vec{a}^{\perp}$. Hallar $\|\vec{b}\|$ **Rpta.** $\|\vec{b}\|=5\sqrt{2}$

130 Dados los vectores $\vec{a}=(3,\sqrt{3})$ y $\vec{b}=(\sqrt{3},-1)$. Hallar $2(proy_{\vec{a}}^{\vec{b}}+proy_{\vec{b}}^{\vec{a}})$

Rpta. $(3+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$

131 Dado el ΔABC en el cual ∡ A = 120° $\|\overrightarrow{AB}\|=4$ y $\|\overrightarrow{AC}\|=7$, encontrar $\|\overrightarrow{BC}\|$ y las proyecciones de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sobre $\overrightarrow{BC}$.

132 Dado el ΔABC con ∡ A = 45°, $\|\overrightarrow{AB}\|=8$, $\|\overrightarrow{AC}\|=6\sqrt{2}$, encontrar $\|\overrightarrow{BC}\|$ y las proyecciones de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sobre $\overrightarrow{BC}$.

133 Dado el triángulo ABC con $\|\overrightarrow{AB}\|=10$, $\|\overrightarrow{AC}\|=9$, $\|\overrightarrow{BC}\|=7$, encontrar las proyecciones de $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ sobre $\overrightarrow{AB}$.

134 Dado el ΔABC con $\|\overrightarrow{AB}\|=5$, $\|\overrightarrow{AC}\|=7$, $\|\overrightarrow{BC}\|=9$, encontrar las proyecciones de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sobre $\overrightarrow{CB}$.

135 Sí $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\|\vec{a}\|=p$, $\|\vec{b}\|=q$, $\|\vec{c}\|=r$, $\vec{a}.\vec{b}=pq$, $\vec{a}.\vec{c}=pr$ y $proy_{\vec{b}}^{\vec{c}}=r$.

Hallar el módulo de $\vec{d}$. **Rpta.** $\|\vec{d}\|=p+q+r$

136 Hallar el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ sí $\vec{a}=(1,2)$ y $\vec{b}=(1,3)$.

Rpta. $\theta=\arccos(\frac{7}{\sqrt{5}})$

137 Si $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}=(1,3)$ y $proy_{\vec{a}}^{\vec{b}}=(3,1)$, calcular $\vec{a}+\vec{b}$ y el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. **Rpta.** $\vec{a}+\vec{b}=(\frac{20}{3},\frac{20}{3})$

138 Demuestre que: $comp_{\vec{b}}^{(\vec{a}+\vec{c})}=comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}+comp_{\vec{b}}^{\vec{c}}$

139 Demuestre que: Sí $comp_{\vec{a}+\vec{b}}^{\vec{a}}-comp_{\vec{a}+\vec{b}}^{\vec{b}}=0$ entonces $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$

140 Sí $\vec{a}.\vec{b}\neq 0$ y $\vec{a}.\vec{c}\neq 0$. Demuéstrese: $proy_{\vec{c}}^{\vec{a}}=proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} \Leftrightarrow \vec{c}=\lambda\vec{b}$

141 Sean $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ vectores en V_2 tal que $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$. Demostrar que:

i) $proy_{\vec{a}}^{\vec{b}}+proy_{\vec{a}}^{\vec{c}}+proy_{\vec{a}}^{\vec{d}}=\vec{a}$

ii) Si $\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|=\|\vec{d}\|$ entonces $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}+proy_{\vec{c}}^{\vec{a}}+proy_{\vec{d}}^{\vec{a}}$ es paralelo a $\vec{a}$.

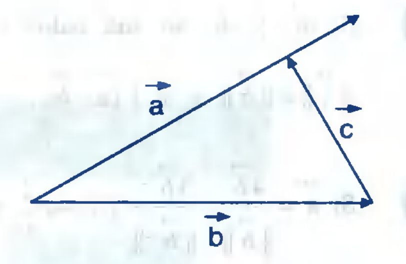
142 En el paralelogramo ABCD, $\measuredangle$ (BAD) = 60°.

$\|\overrightarrow{AB}\|=a$, $\|\overrightarrow{AD}\|=2a$, donde $a\in R-\{0\}$

Sí $p=\|proy_{\overrightarrow{AD}}^{\overrightarrow{AC}}\|$ y $q=\|proy_{\overrightarrow{AB}}^{\overrightarrow{AC}}\|$.

Hallar p + q **Rpta.** $p+q=\frac{9}{2}a$

(143) En la figura, $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores de V_2, tales que $\vec{b}$ es unitario, $\vec{c}$ es ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{a}.\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}\|\vec{a}\|$. Hallar $comp_{\vec{c}}^{\vec{a}}$



Rpta. $comp_{\vec{c}}^{\vec{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(144) En el rectángulo de la figura: H, P y Q son puntos medios $\overrightarrow{AB} = 4\,\overrightarrow{FB}$, $\|\overrightarrow{OC}\| = 4a$, $\|\overrightarrow{OA}\| = a$ Sí $\vec{v} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QC}$.

Hallar: $comp_{\overrightarrow{AB}}^{\vec{v}} + comp_{\overrightarrow{QB}}^{\vec{v}}$

Rpta. $\frac{\sqrt{5}}{20}(26\sqrt{5}+53)a$

(145) Dados tres puntos A, B y C, los cuales forman un triángulo, hallar la dirección de una altura cualesquiera del triángulo, usando el vector proyección.

Rpta. La altura relativa al lado $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - proy_{\overrightarrow{AB}}^{\overrightarrow{AC}}$

(146) Consideremos el cuadrilátero ABCD tal que E(1,5) es el punto medio de $\overrightarrow{AB}$, H(4,2) es el punto medio de $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CE}$ es paralelo al vector (2,3), $\overrightarrow{DE}$ es paralelo a (1,-2) y $proy_{\overrightarrow{AC}}^{\overrightarrow{CH}} = (5,5)$ encontrar los vértices A, B, C y D.

Rpta. A(3,7), B(-1,3), C(-3,-1) y D(5,-3)

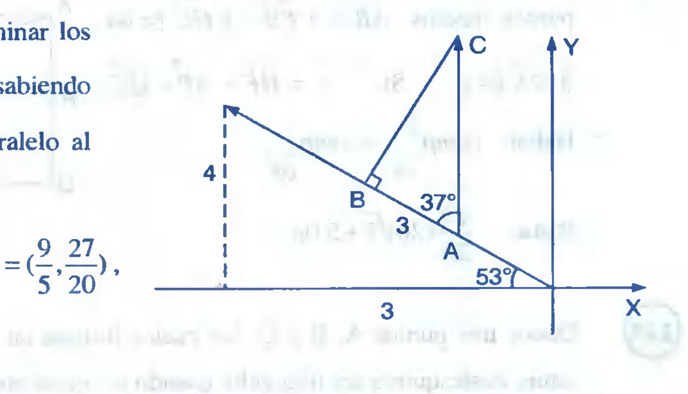
(147) En el paralelogramo ABCD, $\measuredangle(BAD) = 60°$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, $\|\overrightarrow{AD}\| = 4$, sí $p = \|proy_{\overrightarrow{AD}}^{\overrightarrow{AC}}\|$, $q = \|proy_{\overrightarrow{AB}}^{\overrightarrow{AC}}\|$. Hallar p + q. **Rpta.** p + q = 9

148 Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son nulos y $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} + (proy_{\vec{a}}^{\vec{b}})^{\perp} = (\vec{a})^{\perp} + \vec{b}$ entonces probar que: $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ y $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$.

149 Si $\vec{a} = \dfrac{4\vec{b}}{\|\vec{b}\|} - \dfrac{3\vec{b}^{\perp}}{\|\vec{b}^{\perp}\|}$ y $comp_{\vec{a}^{\perp}}^{\vec{b}} = 4$. Hallar $\vec{a}^{\perp}.\vec{b}$

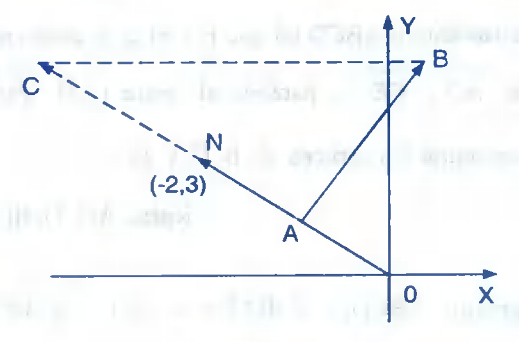
150 Sean P(2,3), Q(5,7), R(2,-3) y S(1,2) calcule $proy_{\overrightarrow{PQ}}^{\overrightarrow{RS}}$ **Rpta.** $proy_{\overrightarrow{PQ}}^{\overrightarrow{RS}} = (\frac{51}{25}, \frac{68}{25})$

151 En la figura adjunta, determinar los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, sabiendo que: $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$ y $\overrightarrow{AC}$ paralelo al eje Y.



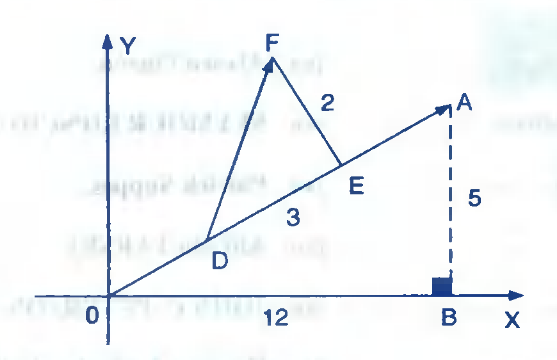
Rpta. $\overrightarrow{AB} = (-\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$, $\overrightarrow{BC} = (\frac{9}{5}, \frac{27}{20})$, $\overrightarrow{AC} = (0, \frac{15}{4})$

152 En la adjunta, determinar los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CB}$ sabiendo que $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{13}$, $\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\|\overrightarrow{OA}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



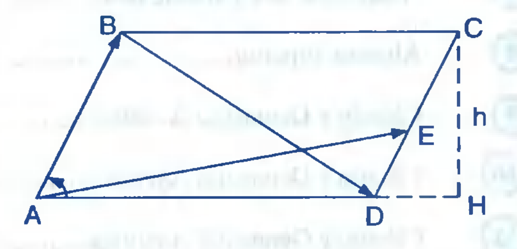
Rpta. $\overrightarrow{AB} = (\frac{9}{2}, 3)$, $\overrightarrow{OC} = (-3, \frac{9}{2})$, $\overrightarrow{CB} = (\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$

153 Un triangulo DEF se encuentra sobre un plano inclinado como se muestra en la figura adjunta. Hallar el vector $\overrightarrow{DF}$.



Rpta. $\overrightarrow{DF} = (2,3)$

154 En el paralelogramos de la figura se tiene: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$, m $\measuredangle$(BAD) = 60°. La altura relativa a la base $\overrightarrow{AD}$ es h. Si $\vec{M} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BD}$ y $\vec{P} = proy_{\overrightarrow{AD}}^{\vec{M}}$, hallar $\|\vec{P}\|$ en función de h.



Rpta. $\|\vec{P}\| = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}h$

155 Si $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son diferentes de $\vec{0}$, demuestre que:

i) Si $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son paralelos, entonces $proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = proy_{\vec{c}}^{\vec{a}}$

ii) Si $comp_{r\vec{b}}^{\vec{a}} = comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}$, si $r > 0$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$

iii) Si $comp_{r\vec{b}}^{\vec{a}} = -comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}$, si $r < 0$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$

BIBLIOGRAFÍA

1. Conjuntos y Estructuras,.. por: **Alvaro Pinzón.**
2. Teoría de Conjuntos y Temas Afines,.................... por: **SEYMOUR LIPSCHUTZ.**
3. Lógica Matemática,.. por: **Patrick Suppes.**
4. Introducción a la Lógica,... por: **Alfredo TARSKI.**
5. Matemática Básica, ... por: **JOHN C. PETERSON.**
6. Análisis Matemático Vol. I,...................................... por: **Hasser – La Salle – Sulliva.**
7. Análisis de una Variable Real,................................ por: **Miguel A. Sanz Alix.**
8. Álgebra Superior,... por: **Leithold LEVIS.**
9. Cálculo y Geometría Analítica,............................... por: **Stein.**
10. Cálculo y Geometría Analítica,.............................. por: **Larzon - Hosttler.**
11. Calculo y Geometría Analítica,.............................. por: **Louis Leithold.**
12. Elementos de Álgebra Superior,............................. por: **Pablo Miguel y Merino.**
13. Álgebra I,.. por: **Armando Rojo.**
14. Álgebra,... por: **PAULK REES.**
15. Álgebra,... por: **Stanley A. SMITH.**
16. Variable Compleja,... por: **ARTHUR A. HAUSER.**
17. Variable Compleja,... por: **Willian R. Derrick.**
18. Variable Compleja,... por: **DAVIS WUNSCH.**
19. Ejercicios y problemas de Análisis Matemática,..... por: **B. Deminovich.**
20. Ejercicios y problemas de Análisis Matemático,..... por: **G. N. Berman.**

PEDIDOS AL POR MAYOR Y MENOR

AV. GERARDO UNGER N° 247 Of. 202

Urbanización Ingeniería (Frente a la UNI)

Teléfono: 388 – 8564 Fax: 382 – 4990

Celular: 9853 – 3465

email: edueduca@hotmail.com

LIMA – PERU

IMPRESO EN:

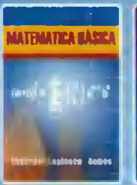
EDITORIAL SERVICIOS GRAFICOS J.J.



Eduardo Espinoza Ramos
Graduado y Titulado en Matemática Pura.

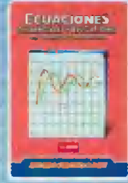
Catedrático de las principales
Universidades de la Capital

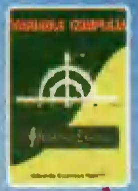
OBRAS PUBLICADAS

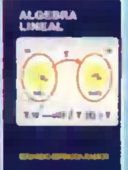








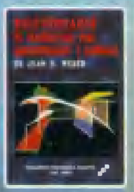


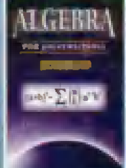












- Solucionario de Análisis Matemático por Demidovich tomo III
- Solucionario de Análisis Matemático por G.Berman, tomo I, II
- Solucionario de Leithold 2da. Parte.
- Geometria Vectorial en R^2
- Geometria Vectorial en R^3